Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 4. С. 330–338.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 4. P. 330–338.

УДК 517.9
MSC 35L20
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338
Оригинальное исследование

Замечания о восстановлении решений начально-краевых задач для сингулярных волновых уравнений

[1] **Половинкина М. В.**, [2,3] **Половинкин И. П.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

[1] Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Россия, 394036, г. Воронеж, проспект Революции, 19

[2] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

[3] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.
polovinkin@yandex.ru

Аннотация. Объект исследования статьи — смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка с двумя переменными (одна пространственная переменная и переменное время) с оператором Бесселя. Предполагается, что известны несколько первых коэффициентов разложения начальной функции в ряд Фурье по функциям Бесселя. Отдельно рассмотрен случай классического разложения начальной функции по синусам кратных дуг, когда оператор Бесселя действует лишь по временной переменной. Рассматривается проблема восстановления решения по этим данным. В статье использованы результаты и методы, которые ранее представили в своих в работах Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Е. О. Сивкова, Н. Д. Выск.

Ключевые слова: оператор Бесселя, функции Бесселя, метод восстановления, начально–краевая задача, волновое уравнение

Для цитирования: Половинкина М. В., Половинкин И. П. 2023. Замечания о восстановлении решений начально-краевых задач для сингулярных волновых уравнений. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 330–338. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338

Original Research

Remarks on the Recovery of Solutions of Initial Boundary Value Problems for Singular Wave Equations

[1] **Marina V. Polovinkina**, [2,3] **Igor P. Polovinkin**
(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)*

[1] Voronezh State University of Engineering Technologies,
19 Revolution av., Voronezh, 394036, Russia

[2] Voronezh State University,
1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018 Russia

[3] Belgorod State National Research University,
85 Pobedy st., Belgorod, 308015 Russia
polovinkin@yandex.ru

Abstract. The paper deals with a mixed problem for a second-order hyperbolic equation with two variables (one spatial variable and one time variable) with the Bessel operator. It is assumed that the first few coefficients of the expansion of the initial function into a Fourier series by Bessel functions are known. The case of the classical expansion of the initial function by the sines of multiple arcs, when the Bessel operator acts only with respect to the time variable, is considered separately. The problem of recovery of the solution based on these data is considered. The paper uses the results and methods presented in the works by G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, E. O. Sivkova, N. D. Vysk.

Keywords: Bessel Operator, Bessel Functions, Recovery Method, Initial Boundary Value Problem, Wave Equation

For citation: Polovinkina M. V., Polovinkin I. P. 2023. Remarks on the Recovery of Solutions of Initial Boundary Value Problems for Singular Wave Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 330–338. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338

1. Введение. Опишем для замкнутости повествования общую задачу, рассмотренную в [1, 2], на которую мы далее будем опираться. Пусть

$$\mathcal{X} = \left\{ x = \{x_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty} : \|x\|_{\mathcal{X}} = \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} \omega_\kappa |x_\kappa|^2 \right)^{1/2} \right\}, \; 0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_N < \omega_{N+1} < \omega_{N+2} < \ldots .$$

Определим оператор $\mathrm{Q} : \mathcal{X} \to \ell_2$ равенством

$$\mathrm{Q}\,x \; = \; (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots), \; x = \{x_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty} \in \mathcal{X}.$$

Пусть $\mu_\kappa = \eta_\kappa^2$. Потребуем, чтобы $\lim\limits_{\kappa\to\infty} (\mu_\kappa/\omega_\kappa) = 0$. Тогда $\mathrm{Q}\,x \in \ell_2$ для всех $x = \{x_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty} \in \mathcal{X}$.

Сформулируем задачу об оптимальном восстановлении оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \ldots, x_N$ [2]. Пусть

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1\}.$$

Предположим, что для каждого $x \in \mathcal{W}$ известен такой вектор $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, для которого

$$\|I_N\, x - y\|_{\ell_2^N} = \left(\sum_{\kappa=1}^{N} |x_\kappa - y_\kappa|^2 \right)^{1/2} \leqslant \delta,$$

где $I_N\, x = (x_1, \ldots, x_N)$. Всякое отображение $\mathbf{m} : \ell_2^N \to \ell_2$ считается методом восстановления. Погрешность метода восстановления $\mathbf{m}$ определим равенством

$$e(\mathrm{Q}, \mathcal{W}, I_N, \delta, \mathbf{m}) = \sup_{x\in\mathcal{W},\; y\in\ell_2^N : \|I_N x - y\|_{\ell_2^N} \leqslant\delta} |\mathrm{Q}\,x - \mathbf{m}\,(y)|_{\ell_2}\,.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(\mathrm{Q}, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \inf_{\mathbf{m} : \ell_2^N \to \ell_2} e(\mathrm{Q}, \mathcal{W}, I_N, \delta, \mathbf{m}). \tag{1}$$

Метод, на котором достигается точная нижняя грань, определенная в равенстве (1), назовем оптимальным методом восстановления оператора Q в классе $\mathcal{W}$ по информации I_N, полученной с погрешностью δ в норме пространства ℓ_2^N.

Пусть $\{e_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty}$ — стандартный базис в пространстве ℓ_2, т.е. $e_\kappa = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$,где «1» стоит на κ-м месте, все остальные компоненты равны нулю. Введем обозначения:

$$A = \max_{1\leqslant\kappa\leqslant N} \frac{\mu_\kappa}{\omega_\kappa}\,, \quad B = \max_{\kappa > N} \frac{\mu_\kappa}{\omega_\kappa}\,.$$

Пусть для некоторых чисел $1 \leqslant p \leqslant N$, $q > N$ и $p \leqslant r \leqslant N$ выполнены равенства

$$A = \frac{\mu_p}{\omega_p}, \;\; B = \frac{\mu_q}{\omega_q}, \;\; \mu_r - B\omega_r = \max_{p\leqslant\kappa\leqslant N} (\mu_\kappa - B\omega_\kappa). \tag{2}$$

Эти числа определяются неоднозначно, так что для определенности будем считать, что p — наибольшее, а q и r — наименьшие из чисел, для которых выполнены соответствующие равенства (2). Пусть $s_{\varrho+1}$ — наибольшее из чисел, для которых $s_\varrho < s_{\varrho+1} \leqslant r$ и

$$\frac{\mu_{s_{\varrho+1}} - \mu_{s_\varrho}}{\omega_{s_{\varrho+1}} - \omega_{s_\varrho}} = \max_{s_\varrho < \kappa\leqslant r} \frac{\mu_\kappa - \mu_{s_\varrho}}{\omega_\kappa - \omega_{s_\varrho}}\,, \; \varrho = 1, \ldots, h-1, \;\; s_0 = p, \;\; s_h = r.$$

Пусть

$$G_\varrho = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_\kappa}{\omega_\kappa} > \frac{\mu_{s_{\varrho+1}} - \mu_{s_\varrho}}{\omega_{s_{\varrho+1}} - \omega_{s_\varrho}} \right\},$$

$$G_h = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_\kappa}{\omega_\kappa} > B \right\}.$$

Теорема VO [2].

1. При $B \geqslant A$ для любого $\delta > 0$ $E(\mathrm{Q}, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \sqrt{\dfrac{\mu_q}{\omega_q}}$, метод $\widehat{\mathbf{m}}(y) = 0$ оптимальный.

2. При $B < A$, $1/\sqrt{\omega_{s_{\varrho+1}}} \leqslant \delta < 1/\sqrt{\omega_{s_\varrho}}$, $\varrho = 1, \ldots, h-1$,

$$E(\mathrm{Q}, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_{s_\varrho} \frac{\omega_{s_{\varrho+1}}\delta^2 - 1}{\omega_{s_{\varrho+1}} - \omega_{s_\varrho}} + \mu_{s_{\varrho+1}} \frac{1 - \delta^2\omega_{s_\varrho}}{\omega_{s_{\varrho+1}} - \omega_{s_\varrho}}},$$

метод

$$\widehat{\mathbf{m}}(y) = \sum_{\kappa \in G_\varrho} \eta_\kappa \left(1 + \frac{\mu_{s_{\varrho+1}} - \mu_{s_\varrho}}{\mu_{s_\varrho}\omega_{s_{\varrho+1}} - \mu_{s_{\varrho+1}}\omega_{s_\varrho}}\omega_\kappa\right)^{-1} y_\kappa e_\kappa$$

оптимальный.

3. При $B < A$, $\delta < 1/\sqrt{\omega_r}$

$$E(\mathrm{Q}, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_r\delta^2 + \mu_q \frac{1 - \delta^2\omega_r}{\omega_q}}\ ,$$

метод

$$\widehat{\mathbf{m}}(y) = \sum_{\kappa \in G_h} \eta_\kappa \left(1 + \frac{\mu_q}{\mu_r\omega_q - \mu_q\omega_r}\omega_\kappa\right)^{-1} y_\kappa e_\kappa$$

оптимальный.

4. При $B < A$, $\delta \geqslant 1/\sqrt{\omega_p}$

$$E(\mathrm{Q}, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_p}{\omega_q}}\ ,$$

метод $\widehat{\mathbf{m}}(y) = 0$ оптимальный.

В работе [2] с помощью теоремы VO решена задача об оптимальном восстановлении в фиксированный момент времени решения первой начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения по известному конечному набору коэффициентов Фурье начальной функции. Ниже мы обсудим возможности применения этой теоремы к аналогичной проблеме для сингуляных одномерных волновых уравнений.

2. Одномерное волновое уравнение с двумя сингулярностями. В этом разделе нам понадобятся минимальные сведения о весовых пространствах Киприянова и j–функциях Бесселя.

Символом $C^\infty_{ev}([0,1])$ обозначим пространство всех функций из пространства $C^\infty([0,1])$, удовлетворяющих условию четности (гладкости четного продолжения)

$$\frac{d^\kappa g}{dx^\kappa}(0) = 0, \quad \kappa = 1, 3, 5, \ldots.$$

Пусть $L_{2,\gamma}(0,1) = L_2^\gamma(0,1)$ означает замыкание пространства $C^\infty_{ev}([0,1])$ по норме

$$\|g(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} = \sqrt{\int\limits_0^1 x^\gamma\, |g(x)|^2\, dx}.$$

Весовые пространства $H^n_\gamma(0,1)$ (пространства И. А. Киприянова – см. [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]) введем как замыкание класса $C^\infty_{ev}([0,1])$ по норме

$$\|f\|_{n,\gamma} = \left(\sum_{\substack{0 \leqslant i_1 + 2i_2 \leqslant n \\ i_1 = 0,1}} \int\limits_0^1 x^\gamma |D_x^{i_1} B_{x,\gamma}^{i_2} f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $B_{x,\gamma}$ — оператор Бесселя, определенный формулой $B_{x,\gamma}\, u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = x^{-\gamma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^\gamma \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$, $D_x = \frac{d}{dx}$.

j–функция Бесселя порядка ν определяется формулой

$$j_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{z^\nu} J_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m}\, m!\Gamma(m+\nu+1)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, $J_\nu(z) = \sum\limits_{m=0}^\infty \dfrac{(-1)^m z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}\, m!\Gamma(m+\nu+1)}$ – функция Бесселя первого рода порядка ν.

Потребность в j–функциях Бесселя возникает при решении задачи Штурма-Лиувилля следующего вида (см. [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13])

$$B_{x,2\nu+1}\,\Phi = -\lambda\Phi, \quad x \in \ [0,1], \tag{3}$$

$$d\Phi/dx(0) = 0, \quad \Phi(1) = 0, \tag{4}$$

которая имеет собственные функции $j_\nu(\epsilon_\kappa\, x)$, соответствующие собственным значениям ϵ_κ^2, где $\{\epsilon_\kappa\}$, $\kappa = 1, 2, \ldots,$ — последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $j_\nu(\cdot)$, а значит и функции $J_\nu(\cdot)$, пронумерованных в порядке возрастания.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для сингулярного волнового уравнения:

$$B_{t,\vartheta}\, u = B_{x,\gamma}\, u, \ \ x \in (0,1), \ \ t > 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(+0,t) = 0, \ \ u(1,t) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,+0) = 0, \ \ u(x,+0) = \varphi(x), \tag{7}$$

$\gamma > 0$, $\vartheta > 0$.

С помощью стандартной процедуры метода Фурье разделения переменных мы приходим к задаче Штурма–Лиувилля (3)–(4), после чего легко получить представление решения задачи (5)–(7) в виде

$$u(x,t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa\, j_\zeta(\epsilon_\kappa t)\, j_\nu(\epsilon_\kappa x), \tag{8}$$

$\nu = (\gamma-1)/2$, $\zeta = (\vartheta-1)/2$,

$$A_\kappa = \frac{\epsilon_\kappa^{2\nu}}{2^{2\nu-1}\Gamma^2(\nu+1)J_{\nu+1}^2(\epsilon_\kappa)} \int_0^1 x^\gamma\, \varphi(x)\, j_\nu(\epsilon_\kappa x)\, dx, \ \ \kappa = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

суть коэффициенты разложения

$$\varphi(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa j_\nu(\epsilon_\kappa x) \tag{10}$$

в ряд Фурье–Бесселя (см. [11, 12, 13]) функции $\varphi(x)$. От представлений (8), (9), (10) для дальнейшего удобства перейдем к представлениям

$$u(x,t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa\, j_\zeta(\epsilon_\kappa t)\, \Lambda_{\nu,\kappa}(x),$$

$$a_\kappa = \int_0^1 x^\gamma\, \varphi(x)\, \Lambda_{\nu,\kappa}(x)\, dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \Lambda_{\nu,\kappa}(x), \tag{11}$$

$$\Lambda_{\nu,\kappa}(x) = \frac{j_\nu(\epsilon_\kappa\, x)}{\|j_\nu(\epsilon_\kappa\, x)\|_{L_2^\gamma}} = \frac{\epsilon_\kappa^\nu}{2^{(2\nu-1)/2}\Gamma(\nu+1)J_{\nu+1}(\epsilon_\kappa)}\, j_\nu(\epsilon_\kappa\, x).$$

Положим

$$W_{2,\gamma}^n = \{g \in H_\gamma^n(0,1) : \ \|D_x^{i_1} B_{x,\gamma}^{i_2} g(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} \leqslant 1, \ \ i_1 + 2i_2 = n, i_1 = 0,1\},$$

считая при этом, что производная $D_x^{i_1} B_{x,\gamma}^{i_2} g(\cdot)$ кусочно непрерывна при $i_1 + 2i_2 = n$, $i_1 = 0, 1$. Далее будем считать n четным. Это приводит нас к возможности применять равенство

$$B_{x,2\nu+1}^{n/2}\, j_\nu(\epsilon\, x) = -\epsilon^n\, j_\nu(\epsilon\, x), \ \ n = 2, 4, \ldots, \ \ \epsilon > 0.$$

Следуя [2], введем в рассмотрение «информационный» оператор F_δ^N, который каждой функции $\varphi \in W_{2,\gamma}^n$ ставит в соответствие некоторый вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ приближенных значений первых N коэффициентов в разложении (11) функции φ, удовлетворяющий условию

$$\sum_{\kappa=1}^{N} |a_\kappa - y_\kappa|^2 < \delta^2, \ \ \delta > 0$$

и поставим задачу по этим данным восстановить решение задачи (5)–(7) в момент времени $T > 0$ в классе $W^n_{2,\gamma}$. Методом восстановления будем считать любой оператор $\mathbf{m} : \mathbb{R}^N \to L_{2,\gamma}(0,1)$, следуя [2]. Пусть

$$U(m,N,\delta) = \{(\varphi,y) : \varphi \in W^n_{2,\gamma}, y = (y_1,\ldots,y_N) \in \mathbb{R}^N, \sum_{\kappa=1}^{N} |A_\kappa - y_\kappa|^2 < \delta^2\}.$$

Величина

$$e(T, W^n_{2,\gamma}, F^N_\delta, \mathbf{m}) = \sup_{(\varphi,y)\in U(m,N,\delta)} \| u(\cdot,T) - \mathbf{m}(y)(\cdot) \|_{L_{2,\gamma}(0,1)}$$

называется погрешностью восстановления для метода $\mathbf{m}$. Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W^n_{2,\gamma}, F^N_\delta) = \inf_{m:\mathbb{R}^N\to L_{2,\gamma}(0,1)} e(T, W^n_{2,\gamma}, F^N_\delta, \mathbf{m}). \tag{12}$$

Метод, на котором достигается введенная в (12) точная нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

Если $\varphi(\cdot) \in W^n_{2,\gamma}$, то для разложения (11) в силу неравенства Бесселя для разложения Фурье–Бесселя (см. [11]) будет выполнено неравенство

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \epsilon_\kappa^{2n}\, a_\kappa^2 \leqslant \int_0^1 x^\gamma |B_{x,\gamma}\varphi(x)|^2\, dx \leqslant 1.$$

Это дает возможность положить

$$\omega_\kappa = \epsilon_\kappa^{2n}, \ \ \mu_\kappa = j^2_\zeta(\epsilon_\kappa t),$$

$$A = \max_{1\leqslant\kappa\leqslant N} \frac{j^2_\zeta(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} = \frac{j^2_\zeta(\epsilon_p T)}{\epsilon_p^{2n}}, \ \ B = \max_{\kappa>N} \frac{j^2_\zeta(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} = \frac{j^2_\zeta(\epsilon_q T)}{\epsilon_q^{2n}}.$$

Исходя из асимптотического представления j–функции Бесселя (см. [11])

$$j_\zeta(\tau) = \frac{2^\zeta\Gamma(\zeta+1)}{\tau^\zeta}\sqrt{\frac{2}{\pi\tau}}\left(\cos\left(\tau - (2\zeta+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\tau^{3/2}}\right)\right),$$

а также учитывая теоремы Шафхейтлина о расположении вещественных корней функций Бесселя, можно убедиться в том, что

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\mu_\kappa}{\omega_\kappa} = \lim_{\kappa\to\infty}\frac{j^2_\zeta(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} = 0.$$

Число r определяется из условия

$$j^2_\zeta(\epsilon_r T) - B\epsilon_r^{2n} = \max_{p\leqslant\kappa\leqslant N}\left(j^2_\zeta(\epsilon_\kappa T) - B\epsilon_\kappa^{2n}\right).$$

Числа $\{s_\varrho\}$ определяются с помощью условия

$$\frac{j^2_\zeta(\epsilon_{s_{\varrho+1}}T) - j^2_\zeta(\epsilon_{s_\varrho}T)}{\epsilon^{2n}_{s_{\varrho+1}} - \epsilon^{2n}_{s_\varrho}} = \max_{s_\varrho\leqslant\kappa\leqslant r}\frac{j^2_\zeta(\epsilon_\kappa T) - j^2_\zeta(\epsilon_{s_\varrho}T)}{\epsilon^{2n}_\kappa - \epsilon^{2n}_{s_\varrho}}, \ \ \varrho = 1,\ldots,h-1, \ \ s_0 = p, \ s_h = r.$$

Далее

$$G_\varrho = \left\{\kappa \in \mathbb{N}\cap[1,N] : \frac{j^2_\zeta(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} > \frac{j^2_\zeta(\epsilon_{s_{\varrho+1}}T) - j^2_\zeta(\epsilon_{s_\varrho}T)}{\epsilon_{s_{\varrho+1}} - \epsilon_{s_\varrho}}\right\},$$

$$G_h = \left\{\kappa \in \mathbb{N}\cap[1,N] : \frac{j^2_\zeta(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} > B\right\}.$$

Учитывая изложенное, основываясь на теореме VO, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.

1. При $B \geqslant A$ для любого $\delta > 0$

$$E(T, W^n_2, F^N_\delta) = \frac{j^2_\zeta(\epsilon_q T)}{\epsilon_q^n},$$

метод $u(x,T) = 0$ оптимальный.

2. При $B < A$, $\epsilon_{s_{\varrho+1}}^{-n} \leqslant \delta < \epsilon_{s_\varrho}^{-n}$, $\varrho = 1, \dots, h-1$,

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{j_\zeta^2(\epsilon_{s_\varrho} T)\frac{\epsilon_{s_{\varrho+1}}^{2n}\delta^2 - 1}{\epsilon_{s_{\varrho+1}}^{2n} - \epsilon_{s_\varrho}^{2n}} + j_\zeta^2(\epsilon_{s_{\varrho+1}} T)\frac{1 - \delta^2\epsilon_{s_\varrho}^{2n}}{\epsilon_{s_{\varrho+1}}^{2n} - \epsilon_{s_\varrho}^{2n}}},$$

метод

$$u(x,T) = \sum_{\kappa\in G_\varrho}\left(1 + \frac{j_\zeta^2(\epsilon_{s_{\varrho+1}}T) - j_\zeta^2(\epsilon_{s_\varrho}T)}{\epsilon_{s_{\varrho+1}}^{2n} j_\zeta^2(\epsilon_{s_\varrho}T) - \epsilon_{s_\varrho}^{2n} j_\zeta^2(\epsilon_{s_{\varrho+1}}T)}\epsilon_\kappa^{2n}\right)^{-1} y_\kappa j_\zeta(\epsilon_\kappa T)\Lambda_\kappa(x)$$

оптимальный.

3. При $B < A$, $\delta < \epsilon_r^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 j_\zeta^2(\epsilon_r T) + j_\zeta^2(\epsilon_q T)\frac{1 - \delta^2\epsilon_r^{2n}}{\epsilon_q^{2n}}}\ ,$$

метод

$$u(x,T) = \sum_{\kappa\in G_h}\left(1 + \frac{j_\zeta^2(\epsilon_q T)}{\epsilon_q^{2n} j_\zeta^2(\epsilon_r T) - \epsilon_r^{2n} j_\zeta^2(\epsilon_q T)}\epsilon_\kappa^{2n}\right)^{-1} y_\kappa j_\zeta(\kappa T)\Lambda_\kappa(x)$$

оптимальный.

4. При $B < A$, $\delta \geqslant \epsilon_p^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{\frac{j_\zeta^2(\epsilon_p T)}{\epsilon_p^{2n}}}\ ,$$

метод $u(x,T) = 0$ оптимальный.

3. Одномерное волновое уравнение с сингулярностью по времени. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для волнового уравнения с сингулярностью по временной переменной:

$$B_{t,\vartheta}\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in (0,\pi),\ t > 0, \tag{13}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,+0) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x), \tag{15}$$

где $\vartheta > 0$.

С помощью стандартной процедуры метода Фурье разделения переменных легко получить представление решения задачи (13)–(15) в виде

$$u(x,t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa\, j_\zeta(\kappa t)\ \sin(\kappa x),$$

где $\zeta = (\vartheta - 1)/2$,

$$a_\kappa = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\ \sin(\kappa x)\, dx,$$

— коэффициенты разложения в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \sin(\kappa x) \tag{16}$$

функции $\varphi(x)$.

Пусть, как и в [2],

$$W_2^n = \{g \in L_2(0,\pi) :\ D_x^{n-1} g(\cdot) \text{ абсолютно непрерывна на } [0,\pi],\ \|D_x^n g(\cdot)\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant 1\},$$

$$\|g(\cdot)\|_{L_2(0,\pi)} = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |g(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Следуя, как и ранее, [2], введем в рассмотрение «информационный» оператор F_δ^N, который каждой функции $\varphi \in W_2^n$ ставит в соответствие некоторый вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{\kappa=1}^{N} |a_\kappa - y_\kappa|^2 < \delta^2,\quad \delta > 0.$$

Поставим задачу по этим данным восстановить решение задачи (13)–(15) в момент времени $T > 0$ в классе W_2^n. Методом восстановления будем считать любой оператор $\mathbf{m} : \mathbb{R}^N \to L_2(0,1)$, следуя [2]. Пусть

$$U(n,N,\delta) = \{(\varphi, y) : \varphi \in W_2^n, y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N, \sum_{\kappa=1}^{N} |a_\kappa - y_\kappa|^2 < \delta^2\}.$$

Величина

$$e(T, W_2^n, F_\delta^N, \mathbf{m}) = \sup_{(\varphi,y)\in U(m,N,\delta)} \| u(\cdot,T) - \mathbf{m}(y)(\cdot) \|_{L_2(0,1)}$$

называется погрешностью восстановления для метода $\mathbf{m}$. Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \inf_{m:\mathbb{R}^N\to L_2(0,1)} e(T, W_2^n, F_\delta^N, \mathbf{m}). \tag{17}$$

Метод, на котором достигается введенная в (17) точная нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

В рассматриваемой задаче восстановления при $\varphi(\cdot) \in W_2^n$ можно положить, как и в [2], $\omega_\kappa = \kappa^{2n}$, поскольку

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa^{2n} a_\kappa^{2n} \leqslant 1.$$

При этом придется положить

$$\mu_\kappa = j_\zeta^2(\kappa T),$$

$$A = \max_{1\leqslant\kappa\leqslant N} \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} = \frac{j_\zeta^2(pT)}{p^{2n}}, \quad B = \max_{\kappa>N} \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} = \frac{j_\zeta^2(qT)}{q^{2n}}.$$

Нетрудно увидеть, что

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{\mu_\kappa}{\omega_\kappa} = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} = 0.$$

Число r определяется из условия

$$j_\zeta^2(rT) - Br^{2n} = \max_{p\leqslant\kappa\leqslant N} \left(j_\zeta^2(\kappa T) - B\kappa^{2n} \right).$$

Числа $\{s_\varrho\}$ определяются с помощью условия

$$\frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}} = \max_{s_\varrho\leqslant\kappa\leqslant r} \frac{j_\zeta^2(\kappa T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{\kappa^{2n} - s_\varrho^{2n}}, \quad \varrho = 1, \dots, h-1, \quad s_0 = p, \ s_h = r.$$

Далее

$$G_\varrho = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1,N] : \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} > \frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1} - s_\varrho} \right\},$$

$$G_h = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1,N] : \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} > B \right\}.$$

Следующее утверждение вытекает из теоремы VO.

Теорема 2.

1. При $B \geqslant A$ для любого $\delta > 0$ $E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \dfrac{j_\zeta^2(qT)}{q^n}$, метод $u(x,T) = 0$ оптимальный.
2. При $B < A$, $s_{\varrho+1}^{-n} \leqslant \delta < s_\varrho^{-n}$, $\varrho = 1, \dots, h-1$,

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{j_\zeta^2(s_\varrho T) \frac{s_{\varrho+1}^{2n}\delta^2 - 1}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}} + j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) \frac{1 - \delta^2 s_\varrho^{2n}}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}}},$$

метод

$$u(x,T) = \sum_{\kappa\in G_\varrho} \left(1 + \frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1}^{2n} j_\zeta^2(s_\varrho T) - s_\varrho^{2n} j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T)} \kappa^{2n} \right)^{-1} y_\kappa j_\zeta(\kappa T) \sin(\kappa x)$$

оптимальный.

3. При $B < A$, $\delta < r^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 j_\zeta^2(rT) + j_\zeta^2(qT)\frac{1-\delta^2 r^{2n}}{q^{2n}}}\ ,$$

метод

$$u(x,T) = \sum_{\kappa\in G_h}\left(1 + \frac{j_\zeta^2(qT)}{q^{2n} j_\zeta^2(rT) - r^{2n} j_\zeta^2(qT)}\kappa^{2n}\right)^{-1} y_\kappa j_\zeta(\kappa T)\sin(\kappa x)$$

оптимальный.

4. При $B < A$, $\delta \geqslant p^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{\frac{j_\zeta^2(pT)}{p^{2n}}}\ ,$$

метод $u(x,T) = 0$ оптимальный.

4. Заключение. Мы убедились в возможности перенесения результатов, связанных с восстановлением решения первой начально–краевой задачи для одномерного волнового уравнения на случай, когда по двум переменным или по одной (временной) вместо второй производной действует оператор Бесселя. Свойства собственных функций задачи Штурма – Лиувилля, порожденной оператором Бесселя (j– функций Бесселя), обеспечивают такую возможность, то есть обеспечивают применение теоремы VO, представленной в [2].

Список литературы

1. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. *Математический сборник.* 2002;193(3): 79–100. https://doi.org/10.4213/sm637
2. Выск Н.Д., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным. *Математические заметки.* 2007;81(6):803–815. https://doi.org/10.4213/mzm3743
3. Катрахова А.А. Об аппроксимации решений некоторых сингулярных эллиптических краевых задач. *Доклады Академии Наук СССР.* 1979;249(1):34–37.
4. Катрахова А.А. Об одном численном методе для некоторых сингулярных краевых задач. *Дифференциальные уравнения.* 1981;17(5):805–819.
5. Катрахов В.В., Катрахова А.А. Метод конечных элементов для некоторых вырождающихся эллиптических краевых задач. *Доклады Академии Наук СССР.* 1984;279(4):799–802.
6. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. *Современная математика. Фундаментальные направления.* 2018;64(2):211–426. https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426
7. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 208 с.
8. Киприянов И.А. Преобразование Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов. *Труды МИАН СССР.* 1967;89:130–213.
9. Ляхов Л.Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. Липецк, ЛГПУ, 2007. 232 с.
10. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Наука, 2019. 224 с.
11. Кузнецов А.В., Ляхов Л.Н., Половинкин И.П., Райхельгауз Л.Б., Санина Е.Л., Шишкина Э.Л. j–функции Бесселя и их применения в задачах математической физики. Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2015. 96 с.
12. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя. *Успехи математических наук.* 1951;6(2):102–143.
13. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. *Математический сборник.* 1955;36(78)(2):299–310.

References

1. Magaril-Il'yaev GG, Osipenko KYu. Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error. *Matematicheskiy sbornik.* 2002;193(3):387–407. DOI: 10.1070/SM2002v193n03ABEH000637
2. Vysk ND., Osipenko KY. Optimal reconstruction of the solution of the wave equation from inaccurate initial data. *Math Notes.* 2007;81:723–733. https://doi.org/10.1134/S0001434607050203
3. Katrahova AA. Ob approksimatsii resheniy nekotorykh singulyarnykh ellipticheskikh krayevykh zadach [Approximation of the solutions to some singular elliptic boundary value problems]. *Doklady Mathematics USSR.* 1979;249(1):34–37.
4. Katrakhova AA. Ob odnom chislennom metode dlya nekotoryh singulyarnyh kraevyh zadach [A numerical method for some singular boundary value problems]. *Differential Equations.* 1981;17(5):805–819.

5. Katrakhov VV; Katrakhova AA. Metod konechnykh elementov dlya nekotorykh vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh kraevykh zadach [The finite element method for some degenerate elliptic boundary value problems]. *Doklady Mathematics USSR.* 1984;279(4):799–802.
6. Katrakhov VV., Sitnik SM. Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy [The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya.* 2018;64(2):211–426. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426
7. Kipriyanov IA. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi [Singular elliptic boundary value problems]. M.: Nauka, 1997. 208 p.
8. Kipriyanov IA. Preobrazovaniya Fur'e–Besselya i teoremy vlozheniya dlya vesovykh klassov [Fourier–Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova.* 1967;89:130–213.
9. Lyahov LN. B-gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i integral'nym uravneniyam s V-potentsial'nymi yadrami [B-hypersingular integrals and their applications to the description of Kipriyanov functional classes and integral equations with B-potential kernels]. Lipetsk, LSPU, 2007. 232 p. ISBN 978-5-88526-328-2
10. Sitnik SM., Shishkina EL. Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya [Method of transmutations for differential equations with Bessel operators]. M.: Nauka, 2019. 224 p. ISBN 978-5-9221-1819-4
11. Kuznetsov AV, Lyakhov LN, Polovinkin IP, Raykhelgauz LB, Sanina EL, Shishkina EL. *j*-funktsii Besselya i ikh primenenie v zadachakh matematicheskoy fiziki [Bessel j-functions and their applications in mathematical physics problems]. Voronezh, Izdatel'skiy dom Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta, 2015. 96 p.
12. Levitan BM. Razlozheniya po funktsiyam Besselya v ryady i integraly Furie [Expansion in Fourier Series and Integrals with Bessel Functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 1951; 6(2/42):102–143.
13. Zhitomirskiy YaI. Zadacha Koshi dlya sistem lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s differentsial'nymi operatorami tipa Besselya [A Cauchy problem for for systems of partial differential equations with Bessel–type differential operators. *Matematicheskiy sbornik.* 1955;36(2):299—310.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.08.2023
Поступила после рецензирования 03.10.2023
Принята к публикации 06.10.2023

Received August 22, 2023
Revised October 3, 2023
Accepted October 6, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Половинкина Марина Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Половинкин Игорь Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия; ведущий научный сотрудник Центра прикладной математики Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Marina V. Polovinkina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Igor P. Polovinkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor at the Department of mathematical and applied analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia; Leading Researcher at the Center for Applied Mathematics, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia