УДК 517.19
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-41-51

ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ ТРЁХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОДНОЙ ШЕСТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

INVARIANT SYSTEMS OF THREE SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SIX-DIMENSIONAL LIE ALGEBRA

В. О. Лукащук, К. Р. Кадырова
V.O. Lukashchuk, K.R. Kadyrova

Уфимский государственный авиационный технический университет
Россия, 450008 г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12

Ufa State Aviation Technical University,
12 K. Marx St., Ufa, 450008, Russia

Email: voluks@gmail.com

Аннотация
Решается задача построения реализаций шестимерной алгебры Ли с двумя ненулевыми коммутационными соотношениями в пространстве дифференциальных операторов первого порядка, зависящих от четырех переменных и нахождения соответствующих инвариантных систем трёх обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для представителя каждого из найденных классов неподобных алгебр Ли операторов определяется число дифференциальных инвариантов второго порядка и дополнительных инвариантных соотношений. Приводится пример, иллюстрирующий возможность использования полученных результатов для интегрирования систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Abstract
We consider a six-dimensional Lie algebra with two nonzero commutation relations. We proved that there are 21 types of such non-similar Lie algebras in the space of first-order differential operators on a space of four variables. Then we construct canonical forms of basis operators for the realizations in the space of four variables of these types of non-similar Lie algebras. The number of second-order differential invariants and additional invariant relations was calculated for each basis operators. The general forms of the corresponding invariant systems of three second-order ordinary differential equations are obtained for fifteen non-similar Lie algebras. An illustrative example is given to show how the results can be used for integration of a system of three second-order ordinary differential equations admitting considered six-dimensional Lie algebra.

Ключевые слова: алгебра Ли, дифференциальные инварианты, инвариантная система обыкновенных дифференциальных уравнений.
Keywords: Lie algebra, differential invariants, invariant system of ordinary differential equations.

Введение

Групповой анализ, появившийся впервые во второй половине девятнадцатого века в работах Софуса Ли, и сегодня является одним из эффективных методов интегрирования дифференциальных уравнений и их систем. С. Ли [2011] предложил ряд методов, позволяющих найти решение и понизить порядок дифференциального уравнения, используя допускаемую им алгебру Ли симметрий. В частности, им был разработан метод канонических переменных, который позволяет проинтегрировать в квадратурах обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка, допускающее двумерную алгебру Ли. Данный метод основан на использовании классификации двумерных неподобных алгебр Ли.

Построение классов обыкновенных дифференциальных уравнений базируется на классификациях допускаемых ими неподобных алгебр Ли в пространствах различной размерности. Задачи о выделении представителей неподобных классов алгебр Ли решались, например, в работах P.J. Olver [1992], В.М. Бойко [2003]. В работах F.M. Mahomed [1989], Н.Х. Ибрагимова [1994], P.G.L. Leach [2003], С. В. Хабирова [2010] подобие алгебр Ли операторов используется для анализа симметрийных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе ищется общий вид системы трёх ОДУ второго порядка

$$\ddot{x} = f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\ \ \ddot{y} = g(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\ \ \ddot{z} = h(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \tag{1}$$

допускающей шестимерную алгебру Ли. Такие системы часто встречаются при моделировании динамики взаимодействия различных типов природных объектов, поэтому методы, позволяющие проинтегрировать или исследовать свойства системы, имеют весомое значение для приложений. Свойства подобия алгебр Ли для исследования систем ОДУ использовались в работах F. M. Mahomed [2001, 2013], Н. Х. Ибрагимова [2010], С. В. Мелешко [2015, 2017], Р. К. Газизова [2017a], А. А. Гайнетдиновой [2017].

В данной работе на основе известной классификации неизоморфных шестимерных алгебр Ли, приведенной в [Мубаракзянов, 1963], строится реализация одной шестимерной алгебры Ли с двумя ненулевыми коммутационными соотношениями в пространстве четырех переменных. Выписываются представители всех неподобных классов такой алгебры, и для каждого из них устанавливается количество дифференциальных инвариантов второго порядка и дополнительных инвариантных соотношений, если таковые имеются, а также строятся соответствующие инвариантные системы вида (1). В заключение приводится пример, иллюстрирующий возможность использования результатов классификации для интегрирования систем трёх ОДУ второго порядка.

В работе, следуя [Ovsyannikov, 1982], используется обозначение: $\dfrac{\partial}{\partial t} = \partial_t$.

Реализация неподобных шестимерных алгебр Ли в пространстве четырех переменных

Рассматривается шестимерная алгебра Ли с двумя ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_3] = X_2. \tag{2}$$

Решается задача построения реализаций этой алгебры в пространстве дифференциальных операторов первого порядка от четырёх переменных

$$X_i = \xi^i(t,x,y,z)\partial_t + \eta_1^i(t,x,y,z)\partial_x + \eta_2^i(t,x,y,z)\partial_y + \eta_3^i(t,x,y,z)\partial_z, \quad (i = 1,\dots,6), \tag{3}$$

и выделения среди них представителей классов неподобных алгебр Ли.

Для решения задачи используются результаты работы [Boyko et al, 2003] – реализации четырехмерной алгебры Ли с аналогичными ненулевыми коммутационными соотношениями в том же пространстве. А именно, дополняя каждую из таких неподобных алгебр Ли [Boyko et al, 2003] операторами X_5, X_6 и удовлетворяя нулевым коммутационным соотношениям с этими операторами, строятся все неподобные шестимерные алгебры Ли с коммутационными соотношениями (2). Например, рассмотрим алгебру Ли с операторами [Boyko et al, 2003]:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = t\partial_t + x\partial_x,\ X_4 = \partial_y.$$

Подставляя X_5, X_6 в виде (3) в коммутационные соотношения $\left[X_i, X_j\right] = 0, i = 1,\ldots,4,\ j = 5,6,$ находим

$$X_5 = \eta_2^5(z)\partial_y + \eta_3^5(z)\partial_z,\quad X_6 = \eta_2^6(z)\partial_y + \eta_3^6(z)\partial_z.$$

Из последнего коммутационного соотношения $[X_5, X_6] = 0$ получаем систему

$$\eta_3^5(z)\frac{d\eta_2^6(z)}{dz} = \eta_3^6(z)\frac{d\eta_2^5(z)}{dz},\quad \eta_3^5(z)\frac{d\eta_3^6(z)}{dz} = \eta_3^6(z)\frac{d\eta_3^5(z)}{dz}, \tag{4}$$

связывающую функции $\eta_2^5(z), \eta_3^5(z), \eta_2^6(z), \eta_3^6(z)$. Её решение зависит от вида функций $\eta_3^5(z), \eta_3^6(z)$. Рассмотрим различные возможные случаи.

Пусть $\eta_3^5(z) \neq 0, \eta_3^6(z) \neq 0,$ тогда из системы (4) имеем

$$\eta_3^6(z) = C\eta_3^5(z), \eta_2^6(z) = C\eta_2^5(z), C = Const,$$

то есть операторы X_5 и X_6 линейно зависимы, а алгебра Ли становится пятимерной.

Пусть $\eta_3^5(z) \neq 0, \eta_3^6(z) = 0,$ тогда из системы (4) получаем

$$\eta_2^6(z) = Const \text{ и } X_6 = \partial_y,$$

то есть операторы X_4 и X_6 совпадают, а алгебра Ли снова становится пятимерной. Аналогично, алгебра Ли будет пятимерной, если $\eta_3^6(z) \neq 0, \eta_3^5(z) = 0.$

Пусть $\eta_3^5(z) = \eta_3^6(z) = 0,$ тогда $\eta_2^5(z)$ и $\eta_2^6(z)$ будут произвольными функциями, отличными от константы, поскольку в противном случае алгебра Ли будет пятимерной. Выделим одного представителя в найденном классе алгебр. Для этого сделаем замену переменных в операторах:

$$\bar{t} = t,\ \bar{x} = x,\ \bar{y} = y + \psi(z),\ \bar{z} = \phi(z),$$

сохраняющую вид операторов X_1, X_2, X_3, X_4. Выбирая $\phi(z) = \eta_2^5(z),$ получим

$$X_1 = \partial_{\bar{t}},\ X_2 = \partial_{\bar{x}},\ X_3 = \bar{t}\partial_{\bar{t}} + \bar{x}\partial_{\bar{x}},\ X_4 = \partial_{\bar{y}},$$
$$X_5 = \bar{z}\,\partial_{\bar{y}},\ X_6 = \varphi(\bar{z})\,\partial_{\bar{y}},\ \ (\varphi''(\bar{z}) \neq 0).$$

Остальные алгебры этого класса при помощи замены переменных

$$\bar{t} = \theta(t,x,y,z), \bar{x} = \kappa(t,x,y,z), \bar{y} = \psi(t,x,y,z), \bar{z} = \phi(t,x,y,z), \frac{\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial(t,x,y,z)} \neq 0 \tag{5}$$

могут быть приведены к найденному представителю.

Аналогичным образом были найдены представители всех неподобных шестимерных алгебр Ли с ненулевыми коммутационными соотношениями (2) в пространстве $\mathbf{R}^4$. Таким образом, справедлива

Теорема. Базис неподобных шестимерных алгебр Ли с ненулевыми коммутационными соотношениями (2) в пространстве $\mathbf{R}^4$ подходящей заменой переменных (5) может быть приведен к одному из 21 типов, перечисленных в табл. 1.

Таблица 1
Table 1

Базисы в $\mathbf{R}^4$ неподобных шестимерных алгебр Ли с ненулевыми коммутационными соотношениями $[X_1\ X_3] = X_1, [X_2\ X_3] = X_2$

Bases in $\mathbf{R}^4$ of non-similar six-dimensional Lie algebras with nonzero commutation relations $[X_1\ X_3] = X_1, [X_2\ X_3] = X_2$

Тип	Базисные операторы	Примечание
1	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x, X_4 = \partial_y,$ $X_5 = z\partial_y, X_6 = \varphi(z)\partial_y$	$\varphi'' \neq 0$
2	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = z\partial_y,$ $X_5 = \varphi_1(z)\partial_y, X_6 = \varphi_2(z)\partial_y$	$\varphi_1''\varphi_2'' \neq 0,$ φ_1, φ_2 л.н.з.*
3	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = \partial_z,$ $X_5 = e^y\partial_t, X_6 = e^y\partial_x$	-
4	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t + ze^y\partial_x,$ $X_5 = e^y\varphi_1(z)\partial_t + e^y\varphi_2(z)\partial_x,$ $X_6 = e^y\varphi_3(z)\partial_t + e^y\varphi_4(z)\partial_x$	$\varphi_1'\varphi_3' \neq 0, \varphi_2''\varphi_4'' \neq 0,$ (φ_1, φ_3) и (φ_2, φ_4) л.н.з.*
5	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\varphi_1(z)\partial_t + ze^y\partial_x, X_6 = e^y\varphi_2(z)\partial_t + e^y\varphi_3(z)\partial_x$	$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3'' \neq 0,$ (φ_1, z) и (φ_2, φ_3) л.н.з.*
6	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = ze^y\partial_t + e^y\partial_x, X_6 = e^y\varphi_1(z)\partial_t + e^y\varphi_2(z)\partial_x$	$\varphi_1''\varphi_2' \neq 0$
7	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\partial_x, X_6 = e^y\varphi(z)\partial_t + ze^y\partial_x$	$\varphi' \neq 0$
8	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\partial_x, X_6 = ze^y\partial_t$	-
9	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \partial_z,$ $X_5 = \varphi_1(x)\partial_z, X_6 = \varphi_2(x)\partial_y + \varphi_3(x)\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3' \neq 0,$ φ_1, φ_3 л.н.з.*
10	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \partial_z,$ $X_5 = \varphi_1(x)\partial_y + \varphi_2(x)\partial_z, X_6 = \varphi_3(x)\partial_y + \varphi_4(x)\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_3' \neq 0, \varphi_2'\varphi_4' \neq 0,$ (φ_1, φ_3) и (φ_2, φ_4) л.н.з.*
11	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \partial_z,$ $X_5 = e^y\varphi_1(x)\partial_t + \varphi_2(x)\partial_z, X_6 = e^y\varphi_3(x)\partial_t + \varphi_4(x)\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_3' \neq 0, \varphi_2'\varphi_4' \neq 0,$ (φ_1, φ_3) и (φ_2, φ_4) л.н.з.*
12	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = z\partial_y,$ $X_5 = \varphi_1(x,z)\partial_y, X_6 = \varphi_2(x,z)\partial_y$	$\varphi_{1zz}\varphi_{2zz} \neq 0,$ φ_1, φ_2 л.н.з.*

Окончание табл. 1
The End of Table 1

13	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t+\partial_y,\ X_4=\varphi_1(x)\partial_y,$ $X_5=\partial_z,\ X_6=\varphi_2(x)\partial_y+\varphi_3(x)\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3'\neq 0,$ φ_1,φ_2 л.н.з.*
14	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t+\partial_y,\ X_4=\varphi_1(x)\partial_y,$ $X_5=\varphi_2(x)\partial_y,\ X_6=\varphi_3(x)\partial_y$	$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3'\neq 0,$ $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ л.н.з.*
15	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t+\partial_y,\ X_4=\varphi_1(x)\partial_y,$ $X_5=\partial_z,\ X_6=\varphi_2(x)\partial_y$	$\varphi_1'\varphi_2''\neq 0,$ φ_1,φ_2 л.н.з.*
16	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t+\partial_y,\ X_4=\varphi_1(x)\partial_y,$ $X_5=z\partial_y,\ X_6=\varphi_2(x,z)\partial_y$	$\varphi_1'\neq 0,$ $\varphi_{2x}+\varphi_{2zz}\neq 0$
17	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t+\partial_y,\ X_4=e^y\partial_t,$ $X_5=e^y\varphi(x)\partial_t,\ X_6=\partial_z$	$\varphi'\neq 0$
18	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t+\partial_y,\ X_4=e^y\partial_t,$ $X_5=e^y\varphi_1(x)\partial_t,\ X_6=e^y\varphi_2(x)\partial_t$	$\varphi_1'\varphi_2'\neq 0,$ φ_1,φ_2 л.н.з.*
19	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t+\partial_y,\ X_4=e^y\partial_t,$ $X_5=e^y\varphi_1(x)\partial_t+\varphi_2(x)\partial_z,\ X_6=\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_2'\neq 0$
20	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t,\ X_4=\partial_y, X_5=\varphi(x)\partial_y,\ X_6=\partial_z$	$\varphi'\neq 0$
21	$X_1=\partial_t,\ X_2=x\partial_t,\ X_3=t\partial_t,\ X_4=\partial_y,$ $X_5=z\partial_y,\ X_6=\varphi(x,z)\partial_y$	$\varphi_x+\varphi_{zz}\neq 0$
* Сокращение л.н.з. означает линейно независимы.		

Инвариантные системы трёх обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Найдем системы ОДУ вида (1), допускающие алгебры Ли из табл. 1. Например, для операторов $X_1=\partial_t,\ X_2=\partial_x,\ X_3=t\partial_t+x\partial_x+\partial_y,\ X_4=\partial_z,\ X_5=e^y\partial_t,\ X_6=e^y\partial_x$ (тип 3 из табл. 1) общий дифференциальный инвариант второго порядка имеет вид:

$$I=I\left(\frac{\dot z}{\dot y},\frac{\dot y^2+\ddot y}{\dot y^3e^y},\frac{\dot y\ddot x-\dot x(\dot y^2+\ddot y)}{\dot y^3e^y},\frac{\dot y\ddot z-\dot z(\dot y^2+\ddot y)}{\dot y^3}\right).$$

Следовательно, инвариантную систему ОДУ, допускающую алгебру Ли указанного типа, можно записать как

$$\ddot x=\dot y^2e^y\left(\alpha\left(\frac{\dot z}{\dot y}\right)\dot x+\beta\left(\frac{\dot z}{\dot y}\right)\right),\quad \ddot y=-\dot y^2+\dot y^3e^y\alpha\left(\frac{\dot z}{\dot y}\right),\quad \ddot z=\dot y^2\left(\alpha\left(\frac{\dot z}{\dot y}\right)e^y\dot z+\gamma\left(\frac{\dot z}{\dot y}\right)\right),$$

где α,β,γ – произвольные функции своих аргументов. Взяв линейную комбинацию последних двух уравнений, можно найти её решение.

Рассмотрим операторы типа 1 из табл. 1. Их общий дифференциальный инвариант второго порядка

$$I = I\left(z, \dot{x}, \frac{\ddot{x}}{\dot{z}}, \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2}\right) \tag{6}$$

зависит только от двух дифференциальных инвариантов второго порядка.

Проведем дополнительное исследование данной алгебры, следуя работам Газизова Р.К., Гайнетдиновой А.А. [2017a, 2017b]. Составим три матрицы: $\Omega^{(0)}$ – матрица, состоящая из координат базисных операторов, записанных в строку, $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ – матрицы, состоящие из координат базисных операторов, продолженных до первых и вторых производных, соответственно. Имеем

$$\Omega^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & x & 0 & 0 & 0 & -\dot{y} & -\dot{z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & \dot{z} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(z) & 0 & 0 & \dot{z}\varphi'(z) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & x & 0 & 0 & 0 & -\dot{y} & -\dot{z} & -\ddot{x} & -2\ddot{y} & -2\ddot{z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & \dot{z} & 0 & 0 & \ddot{z} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(z) & 0 & 0 & \dot{z}\varphi'(z) & 0 & 0 & \ddot{z}\varphi'(z)+\dot{z}^2\varphi''(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\Omega^{(0)}$ выписана по базисным операторам, действующим в пространстве четырех независимых переменных, а ее ранг равен трем ($\operatorname{rg}\Omega^{(0)} = 3$), поэтому рассматриваемая алгебра Ли имеет один инвариант. Матрица $\Omega^{(1)}$ выписана по первым продолжениям базисных операторов, действующих в пространстве семи независимых переменных, и $\operatorname{rg}\Omega^{(1)} = 5$, поэтому алгебра имеет два инварианта не выше первого порядка: один уже указанный инвариант и один дифференциальный инвариант первого порядка. Аналогично, матрица $\Omega^{(2)}$ выписана по вторым продолжениям базисных операторов, действующих в пространстве десяти независимых переменных, и $\operatorname{rg}\Omega^{(2)} = 6$, поэтому алгебра дополнительно имеет только два дифференциальных инварианта второго порядка.

Таким образом, анализ рангов подтверждает вид найденного общего дифференциального инварианта второго порядка (6). Приведём матрицу $\Omega^{(2)}$ к ступенчатому виду:

$$\Omega^{(2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dot{y} & -\dot{z} & -\ddot{x} & -2\ddot{y} & -2\ddot{z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{z} & 0 & 0 & \ddot{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{z}^2\varphi''(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы понизить ранг матрицы $\Omega^{(2)}$, положим выражение в последней строке матрицы равным нулю. Это и есть инвариантное соотношение, дополняющее нашу систему ОДУ. Поскольку $\varphi''(z) \neq 0$, получим $\dot{z} = 0$. Инвариантная система для данной алгебры Ли запишется в виде:

$$\ddot{x} = \dot{z}\alpha(z,\dot{x}), \quad \ddot{z} = \dot{z}^2\beta(z,\dot{x}), \quad \dot{z} = 0, \quad \ddot{y} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} = 0, \ \ddot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0,$$

то есть алгебра Ли типа 2 из табл. 1 допускается только тривиальной системой.

Таким образом, по рангам матриц $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ для каждой неподобной алгебры Ли табл. 1 установлено количество дифференциальных инвариантов второго порядка и инвариантных соотношений. Результаты приведены в табл. 2. Из табл. 2 видно, что только четыре типа алгебры Ли с ненулевыми коммутационными соотношениями (2) имеют три дифференциальных инварианта второго порядка, то есть допускаются нетривиальной системой трёх ОДУ второго порядка. Однако, в силу большого количества произвольных функций в операторах, не для всех алгебр Ли удаётся построить инвариантные системы вида (1).

Таблица 2
Table 2

Зависимость количества дифференциальных инвариантов второго порядка и инвариантных соотношений от рангов матриц $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$

The number of second-order differential invariants and invariant relations with respect to ranks of matrices $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$

Тип	rg $\Omega^{(0)}$	rg $\Omega^{(1)}$	rg $\Omega^{(2)}$	Количество дифференциальных инвариантов второго порядка	Количество дополнительных условий
1	3	5	6	2	1
2	3	5	6	2	1
3	4	6	6	3	-
4	3	5	6	2	1
5	3	5	6	2	1
6	3	5	6	2	1
7	3	5	6	2	1
8	3	5	6	2	1
9	3	6	6	3	-
10	3	6	6	3	-
11	3	5	6	2	1
12	2	4	6	1	2
13	3	6	6	3	-
14	2	4	6	1	2

Окончание табл. 2
The End of Table 2

15	3	5	6	2	1
16	2	4	6	1	2
17	3	4	5	2	1
18	2	3	4	2	1
19	3	5	6	2	1
20	3	5	6	2	1
21	2	4	6	1	2

Таким образом, кроме приведённых выше, были найдены инвариантные системы ОДУ второго порядка и дополнительные соотношения для следующих типов алгебры Ли из табл. 1:

тип 2: $$\ddot{x} = \dot{z}\alpha(z,\dot{x}),\ \ \ddot{z} = \dot{z}^2\beta(z,\dot{x}),\ \left(\varphi_2''(z) - \varphi_1''(z)\left(\frac{\varphi_2'(z)z - \varphi_2(z)}{\varphi_1'(z)z - \varphi_1(z)}\right)\right)\dot{z}^2 = 0;$$

тип 8: $$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^y\left(\alpha\left(z,\frac{\dot{z}}{\dot{y}}\right)\dot{x} + \beta\left(z,\frac{\dot{z}}{\dot{y}}\right)\right),\ \ \ddot{y} = -\dot{y}^2 + \dot{y}^3 e^y \alpha\left(z,\frac{\dot{z}}{\dot{y}}\right),\ \ \ddot{z} = -2\dot{y}\dot{z} + \dot{y}^2\dot{z}e^y\alpha\left(z,\frac{\dot{z}}{\dot{y}}\right),$$

тип 9: $$\ddot{x} = \dot{x}^3\alpha(x)e^\theta,\ \ \ddot{y} = \dot{x}^2\beta(x) + \frac{\dot{x}\varphi_2''(x)\dot{y}}{\varphi_2'(x)} + \dot{x}^2\dot{y}\alpha(x)e^\theta,$$

$$\ddot{z} = \dot{x}^2\gamma(x) + \frac{\dot{x}\varphi_1''(x)\dot{z}}{\varphi_1'(x)} + \frac{\dot{x}\dot{y}(\varphi_1'(x)\varphi_3''(x) - \varphi_1''(x)\varphi_3'(x))}{\varphi_1'(x)\varphi_2'(x)} + \dot{x}^2\dot{z}\alpha(x)e^\theta,\ \text{где}\ \theta = y - \frac{\dot{y}\varphi_2}{\dot{x}\varphi_2'};$$

тип 10: $$\ddot{x} = \dot{x}^3\alpha(x)e^\theta,$$

$$\ddot{y} = \dot{x}^2\beta(x) + \frac{\dot{x}\varphi_3''(x)(\varphi_1'(x)\dot{z} - \dot{y}\varphi_2'(x)) - \dot{x}\varphi_1''(x)(\varphi_3'(x)\dot{z} - \dot{y}\varphi_4'(x))}{\varphi_4'(x)\varphi_1'(x) - \varphi_3'(x)\varphi_2'(x)} + \dot{x}^2\dot{y}\alpha(x)e^\theta,$$

$$\ddot{z} = \dot{x}^2\gamma(x) + \frac{\dot{x}\varphi_4''(x)(\varphi_1'(x)\dot{z} - \dot{y}\varphi_2'(x)) - \dot{x}\varphi_2''(x)(\varphi_3'(x)\dot{z} - \dot{y}\varphi_4'(x))}{\varphi_4'(x)\varphi_1'(x) - \varphi_3'(x)\varphi_2'(x)} + \dot{x}^2\dot{z}\alpha(x)e^\theta,$$

$$\text{де}\ \theta = y - \frac{\dot{y}(\varphi_1\varphi_4' - \varphi_3\varphi_2') + \dot{z}(\varphi_3\varphi_1' - \varphi_1\varphi_3')}{\dot{x}(\varphi_4'(x)\varphi_1'(x) - \varphi_3'(x)\varphi_2'(x))};$$

тип 13: $$\ddot{x} = \dot{x}^3\alpha(x)e^\theta,$$

$$\ddot{y} = \dot{x}^2\beta(x) - \frac{\dot{x}(\varphi_2'(x)\dot{z} - \dot{y}\varphi_3'(x))\varphi_1''(x)}{\varphi_3'(x)\varphi_1'(x)} + \frac{\dot{x}\varphi_2''(x)\dot{z}}{\varphi_3'(x)} + \dot{x}^2\dot{y}\alpha(x)e^\theta,$$

$$\ddot{z}=\dot{x}^2\gamma(x)+\frac{\dot{x}\varphi_3''(x)\dot{z}}{\varphi_3'(x)}+\dot{x}^2\dot{z}\alpha(x)e^{\theta},\text{ где }\theta=y-\frac{\dot{z}(\varphi_1'(x)\varphi_2(x)-\varphi_2'(x)\varphi_1(x))+\dot{y}\varphi_3'\varphi_1}{\dot{x}\varphi_3'(x)\varphi_1'(x)};$$

типы 14 и 15: $\dot{x}=0,\ \ddot{y}=0,\ \ddot{z}=0;$

тип 16: $\dot{x}\ddot{z}-\ddot{x}\dot{z}=\dot{x}^3\alpha\left(x,z,\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),\ \dot{x}z\varphi_1'(x)-\dot{z}\varphi_1(x)=0,\ \varphi_1''(x)\dot{z}-\dot{x}\varphi_1'(x)\alpha\left(x,z,\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)=0;$

тип 17: $\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=\dot{x}^3\alpha\left(x,\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),\ \dot{x}\ddot{z}-\ddot{x}\dot{z}=\dot{x}^3\beta\left(x,\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),\ \dot{y}^2+\dot{x}^2\alpha\left(x,\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)=0;$

тип 18: $\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=\dot{x}^3\alpha\left(x,z,\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),\ \dot{x}\ddot{z}-\ddot{x}\dot{z}=\dot{x}^3\beta\left(x,z,\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),\ \dot{y}^2+\dot{x}^2\alpha\left(x,z,\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)=0;$

тип 19: $\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=\dot{x}^3\alpha\left(x,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right),\ \dot{x}\ddot{z}-\ddot{x}\dot{z}=\frac{\dot{x}^2\dot{z}(\varphi_2''(x))}{\varphi_2'(x)}+\dot{x}^3\beta\left(x,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right),\ \dot{y}^2+\dot{x}^2\alpha\left(x,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=0;$

тип 20: $\ddot{x}=0,\ \ddot{y}=\dot{x}\dot{y}\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}+\dot{x}^2\alpha\left(x,\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),\ \ddot{z}=\dot{x}^2\beta\left(x,\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right);$

тип 21: $\ddot{x}=0,\ddot{y}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}\varphi_x(x,z)}\left(\dot{x}^2\varphi_{xx}(x,z)+2\dot{x}\dot{z}\varphi_{xz}(x,z)+\dot{z}^2\varphi_{zz}(x,z)\right)+\dot{x}^2\alpha\left(x,z,\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),$

$$\ddot{z}=\frac{\dot{z}}{\dot{x}\varphi_x(x,z)}\left(\dot{x}^2\varphi_{xx}(x,z)+2\dot{x}\dot{z}\varphi_{xz}(x,z)+\dot{z}^2\varphi_{zz}(x,z)\right)$$

Заключение. Пример использования результатов работы

Результаты работы могут быть использованы как обобщение канонического метода Ли на системы ОДУ вида (1). Пример, приводимый далее, является иллюстрацией применения этого метода Ли.

Рассмотрим систему трёх ОДУ второго порядка

$$\begin{cases}\ddot{x}=\dfrac{2\dot{x}^2}{x}+\dfrac{\dot{x}^2}{x^2}-\dfrac{\dot{x}^4e^{x^{-1}}}{x^6(x\dot{z}+\dot{x}z)},\\[2mm] \ddot{y}=\dfrac{2\dot{x}\dot{y}}{x^2}-\dfrac{\dot{x}(x\dot{z}+\dot{x}z)}{x^2}-\dfrac{\dot{x}^3\dot{y}e^{x^{-1}}}{x^6(x\dot{z}+\dot{x}z)},\\[2mm] \ddot{z}=-\dfrac{2\dot{x}^2z}{x^2}-\dfrac{\dot{x}^2z}{x^3}-\dfrac{2\dot{x}\dot{z}}{x}-\dfrac{\dot{x}^3\dot{z}e^{x^{-1}}}{x^6(x\dot{z}+\dot{x}z)},\end{cases}\tag{7}$$

которая допускает шестимерную алгебру Ли с операторами:

$$X_1=\partial_t, X_2=e^{-x^{-1}}\partial_y, X_3=t\partial_t-x^2\partial_x+xz\partial_z, X_4=x^{-1}\partial_z, X_5=e^{x^{-1}}\partial_t, X_6=\partial_y.\tag{8}$$

Ненулевые коммутационные соотношения данной алгебры Ли совпадают с исследуемыми в работе соотношениями (2). Следовательно, операторы алгебры (8) подобны операторам одного из типов табл. 1. Используя хорошо известную формулу замены переменных в операторах [Ли, Шефферс, 2011], находим замену переменных $\tau = t,\ u = ye^{x^{-1}},\ v = x^{-1},\ w = xz,$ приводящую операторы к каноническому виду 3 из табл. 1. Выполняя замену в системе (7), приводим её к виду

$$\ddot{u} = \dot{v}^2 e^v \left(\frac{\dot{v}}{\dot{w}} \dot{u} + \frac{\dot{w}}{\dot{v}} \right), \quad \ddot{v} = -\dot{v}^2 + e^v \frac{\dot{v}^4}{\dot{w}}, \quad \ddot{w} = \dot{v}^3 e^v,$$

который легко интегрируется:

$$\tau = \frac{1}{C_1}(1+v) + C_3 e^v + C_6, \quad u = \frac{C_1}{2} e^{2v} + C_5 e^v - C_2, \quad w = C_1 e^v + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ – постоянные интегрирования. Сделав обратную замену переменных в этом решении, можно получить решение исходной системы (7).

Список литературы
References

1. Гайнетдинова А.А. 2017. Исследование систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с шестью симметриями. В кн.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017. Материалы научной конференции (Санкт-Петербург, 10-14 апреля 2017 г.). СПб., Изд-во Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена: 52–58.

Gajnetdinova A.A. 2017. Issledovanie sistem dvuh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij tret'ego poryadka s shest'yu simmetriyami. V kn.: Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Gercenovskie chteniya – 2017. Materialy nauchnoj konferencii (Sankt-Peterburg, 10-14 aprelya 2017 g.). SPb., Izd-vo Rossijskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. A. I. Gercena: 52–58. (in Russian)

2. Ли С., Шефферс Г. 2011. Симметрии дифференциальных уравнений. Том 1. Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. М.-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика: 704.

Li S., SHeffers G. 2011. Simmetrii differencial'nyh uravnenij. Tom 1. Lekcii o differencial'nyh uravneniyah s izvestnymi infinitezimal'nymi preobrazovaniyami. M.-Izhevsk, Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika: 704. (in Russian)

3. Мубаракзянов Г.М. 1963. Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом. Известия вузов. Математика. (4): 104–116.

Mubarakzyanov G.M. 1963. Klassifikaciya razreshimyh algebr Li shestogo poryadka s odnim nenil'potentnym bazisnym ehlementom. Izvestiya vuzov. Matematika. (4): 104–116. (in Russian)

4. Ayub M., Khan M., Mahomed F. M. 2013. Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability. Journal of Applied Mathematics. 2013(ID 147921): 1-15.

5. Boyko V. M., Popovych R. O., Nesterenko M. O., Lutfullin M. W. 2003. Realizations of real low-dimensional Lie algebras. Journal of Physics A: Mathematical and General. 36(26): 7337–7360.

6. Gainetdinova A.A., Gazizov R.K. 2017a. Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras. Proceedings of the Royal Society A. 473(2197, ID 20160461):1-13.

7. Gazizov R.K., Gainetdinova A.A. 2017b. Operator of invariant differentiation and its application for integrating systems of ordinary differential. Ufa Mathematical Journal. 9 (4): 12–21.

8. Gazizov R. K., Ibragimov N.H., Lukashchuk V.O. 2010. Integration of ordinary differential equation with a small parameter via approximate symmetries: reduction of approximate symmetry algebra to a canonical form. Lobachevskii Journal of Mathematics. 31(2):141–151.

9. Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P.J. 1992. Lie algebras of differential operators in two complex variables. American Journal of Mathematics 114:1163–1185.

10.Ibragimov N.H., Nucci M.C. 1994. Integration of third order differential equations by Lie's method: Equations admitting three-dimensional Lie algebras. Lie Groups and Their Applications. 1: 49–64.

11.Khabirov S.V. 2010. Classification of three-dimentional Lie algebras in $\mathbb{R}^3$ and their second-order differential invariants. Lobachevskii Journal of Mathematics. 31(2): 152–156.

12.Leach P.G.L. 2003. Equivalence classes of second-order ordinary differential equations with only a three-dimentional Lie algebra of point symmetries and linearisation. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 284: 31 –48.

13.Mahomed F.M., Leach P.G.L. 1989. Lie algebras associated with scalar second-order ordinary differential equations. Journal of Mathematical Physics. 30(12): 2770–2777.

14. Oguis G.F., Moyo S., Meleshko S.V. 2017. Complete group classification of systems of two nonlinear second-order ordinary differential equations of the form y''=F(y). Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 44:318–333.

15.Ovsyannikov L.V. 1982. Group analysis of differential equations. NewYork, Academic Press, 416.

16.Suksern S., Moyo S., Meleshko S.V. 2015. Application of group analysis to classification of systems of three second-order ordinary differential equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 38(18):5097–5113.

17.Wafo Soh C., Mahomed F.M. 2001.Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations. Journal of Physics A. 34(13): 2883–2911.