УДК 517.43
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-183-191

ЧЕТЫРЕХКРАТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 4-го ПОРЯДКА С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

FOUR FOLD EXPANSION IN SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH DOUBLE CHARACTERISTICS

Э.Г. Оруджев, Л.И. Амирова
E.G. Orudzhev, L.I. Amirova

Бакинский Государственный Университет
Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23

Baku State University,
23 Academic Zahid Khalilov St., Baku, AZ1148, Republic of Azerbaijan

E-mail: elsharorucov63@mail.ru, kamhas06@rambler.ru

Аннотация
На отрезке [0,1] рассмотрен параметрический почти регулярный порядка 2 дифференциальный пучок четвертого порядка с двумя двукратными чисто мнимыми характеристическими корнями при распадающихся краевых условиях типа Штурма, два из которых заданы на левом конце. Доказано существование последовательности расширяющихся контуров в плоскости спектрального параметра, на которых ядро резольвенты (функция Грина) убывает. Исходя из оценки функции Грина на контурах доказана теорема о четырехкратном разложении достаточно гладких функций, обращающихся в нуль вместе с производными порядка выше, чем порядок уравнения на концах отрезка, по решению исследуемой задачи.

Abstract
On the closed interval [0,1] is considered parametric nearly regular order two differential bundle of fourth order with two double purely imaginary characteristic roots under decaying Sturm type boundary conditions, two of which are given at the left end. The existence is proven the sequence of expanding contours in the plane of the spectral parameter on which the resolvent kernel (the Green function) decreases. According to the solution of the problem, the theorem on the four fold decomposition of sufficiently smooth functions are proved on the base estimate of the Green function on the contours, vanishing together with derivatives of order higher than the order of the equation at the ends of the segment.

Ключевые слова: регулярные задачи, собственные значения, функция Грина, формула разложения.
Keywords: regular problems, eigenvalues, Green function, decomposition formula.

Введение и постановка задачи

Рассмотрим спектральную задачу для уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^2 Y+P_{20}(x)\frac{d^2Y}{dx^2}+\left(\lambda P_{31}(x)+P_{30}(x)\right)\frac{dY}{dx}+\left(\lambda^2P_{42}(x)+\lambda P_{41}(x)+P_{40}(x)Y\right)=0 \quad (1)$$

при краевых условиях

$$Y(0)=Y'(0)=Y(1)=Y'(1)=0, \quad (2)$$

где

$$P_{20}(x)\in C^2[0,1],\ P_{31}(x)\in C^2[0,1],\ P_{30}(x)\in C^1[0,1],\ P_{42}(x)\in C^2[0,1],$$
$$P_{41}(x)\in C^1[0,1],\ P_{40}(x)\in C[0,1],\ \ \lambda \text{ спектральный параметр.}$$

В работе [Шкаликов, 1983] краевые условия (2) рассмотрены для бигармонического уравнения, возникающие при решении плоской задачи теории упругости, где указано, что краевая задача почти регулярна порядка 2 в смысле данной работы и имеет место 4-х кратное разложение по собственным функциям, но там не были изучены асимптотические разложения собственных значений и не описаны асимптотические формулы для них, позволяющие существование замкнуто расширяющихся контуров $C_\nu(\nu=1,2,...)$ таких, что C_1 охватывает начало координат, $C_\nu(\nu=1,2,...)$, контуры C_ν расположены на расстоянии $d>0$ от множества собственных значений для интегрирования резольвенты по этим контурам, чтобы получить формулы кратных разложений. А асимптотика решений подобных (1) уравнений была изучена в работе [Вагабов, 1985], где найдены условия на коэффициенты уравнения (1), обеспечивающие разложения решений по параметру только по целым степеням, в результате которого в уравнении остаются только главные члены (в общем случае кратных характеристических корней решения дифференциальных уравнений с полиномиальным вхождением λ могут содержать дробные степени параметра, сопровождающихся существенными затруднениями аналитического характера и громоздкими вычислениями для спектрального анализа соответствующих дифференциальных пучков). Подобные задачи также были рассмотрены в работе [Гасымов, Магеррамов, 1987], при условии, что $P_{20}(x)=P_{31}(x)=P_{42}(x)=0$. Там же рассмотрены нерегулярные краевые условия, три из которых заданы на левом конце интервала (0,1). А в работе [Оруджев, 1989] изучено достаточно общее уравнение 4-го порядка, полиномиально зависящего от спектрального параметра с нормированными краевыми условиями. При определенных алгебраических условиях на коэффициенты уравнения найдена асимптотика решений по параметру изучаемого уравнения, выделен класс регулярных и почти регулярных краевых задач, для которых получены формулы о кратном разложении по собственным и присоединенным функциям. Далее полученные результаты распространены на пучки произвольного четного порядка [Оруджев, 1999]. Работа [Вагабов, 2016] была посвящена случаю, когда характеристический полином имеет кратные корни ± 1 для уравнений только с главными членами при распадающихся краевых условиях, три из которых заданы на левом конце интервала (0,1). В работе [Оруджев, Амирова, 2018] найдены асимптотические представления по параметру фундаментальных систем решений уравнения (1), изучены асимптотические распределения собственных значений задачи (1)–(2), которые расположены вдоль определенных логарифмических цепей, выписаны асимптотические формулы для них, а четырехкратное разложение по решению спектральной задачи не было изучено. Этому и посвящена настоящая работа.

В данной работе исследуется функция Грина задачи (1)–(2) вне δ-окрестности спектра и порядок убывания этой функции. Путем конструктивного анализа ядра резольвенты доказывается теорема четырехкратной разложимости определенных функций по решению этой задачи.

Заметим, что в случае кратных корней главного характеристического многочлена при вычислении предела интегралов по замкнуто расширяющимся контурам C_ν при $\nu\to\infty$ от решения задачи неоднородного уравнения n-го порядка с правой частью $f(x)$ и регулярными по Биркгофу [Оруджев, 1998] краевыми условиями, в $g_0(x,\xi,\lambda)f(\xi)$ (где $g_0(x,\xi,\lambda)$ главная часть преобразованной функции Грина) первый член разложения по параметру λ коэффициента при $e^{\theta_k \lambda(x-\xi)} f(\xi),\ k=\overline{1,n}$, где $\theta_k,\ k=\overline{1,n}$ различные корни главного характеристического многочлена, определяют полученную формулу разложения. Остальные члены разложения рассматриваются как исчезающие по сравнению с первыми. В случае кратных характеристических корней такое рассмотрение не принимается. В этой работе в результате детального аналитического анализа в выражении $g_0(x,\xi,\lambda)f(\xi)$ удовлетворены те свойства членов разложения по параметру λ при $e^{\pm i\lambda(x-\xi)} f(\xi)$, использование которых приводит к ожидаемому результату, если интегрировать по частям первое слагаемое 2 раза, второе слагаемое один раз.

Здесь также заметим, что ранее подобные сингулярные дифференциальные операторы с экспоненциально убывающими коэффициентами в пространстве $L_2(0,\infty)$, порожденные дифференциальным уравнением (1) с условиями $Y(0)=Y'(0)=0$, исследовалось [Orudzhev, 1999; Оруджев, 2002], где получены разложения определенных финитных функций по собственным функциям дискретного спектра и по главным функциям непрерывного спектра, а в работе [Orudzhev, 2010] доказана единственность обратной задачи теории рассеяния. В пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ подобные пучки исследовались в работе [Mirzoev, Orudzhev, Aliyev 2012], где получена формула спектрального разложения определенных финитных функций. Если один из характеристических корней имеет кратность три, исследования в пространстве $L_2(0,\infty)$ спектральных свойств сингулярных пучков с экспоненциально убывающими коэффициентами проводились в работах [Orudzhev, Aliev, 2014; Orudzhev, Aliyev, 2019].

Функция Грина, ее конструкция и асимптотика

В работе [Оруджев, Амирова, 2018] доказано, что уравнение (1) в каждой из полуплоскостей $\Pi_{\pm}=\{\pm\lambda:\ \mathrm{Im}\geq 0\}$ имеет фундаментальные системы решений, допускающие следующие асимптотические представления:

$$Y_k(x,\lambda)=\left[g_{k0}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{k0}^{(1)}(x)+\frac{1}{\lambda^2}g_{k1}^{(2)}(x)+\frac{E_{k0}(x,\lambda)}{\lambda^3}\right]e^{\pm i\lambda x},\ k=\overline{1,4}, \qquad (3)$$

где берется знак (+) при $i=\overline{1,2}$, знак (-) при $k=\overline{3,4}$; $g_{k0}^{(\nu)}(x),\ \nu=\overline{0,2}$ непрерывно дифференцируемые функции до второго порядка включительно, $E_{k0}(x,\lambda),\ k=\overline{1,4}$ ограничены при достаточно больших значениях $|\lambda|$ и непрерывны по $x\in[0,1]$. Там же определены следующие четыре серии асимптотических формул для собственных значений краевой задачи (1)–(2)

$$\lambda_k^{(1)}=\left[-k\pi\mp\frac{\pi}{2}\right]-i\left[\ln\left[k\pi\mp\frac{\pi}{2}\right]-\ln\frac{1}{2}\right]+o(1),\quad k=\pm1,\pm2,... \qquad (4)$$

$$\lambda_k^{(2)}=\left[-k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right]-i\left[\ln 2+\ln\left[k\pi\mp\frac{\pi}{2}\right]\right]+o(1),\quad k=\pm1,\pm2,...$$

Решение неоднородного уравнения (1) с непрерывной правой частью $f(x)$, удовлетворяющее краевым условиям (2), записывается в виде:

$$Y(x,\lambda)=\int_0^1\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(\xi)d\xi, \qquad (5)$$

где $G(x,\xi,\lambda)=\dfrac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ – функция Грина краевой задачи (1)–(2),

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4)\\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4)\\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4)\end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$\Delta(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & Y_1(x,\lambda) & Y_2(x,\lambda) & Y_3(x,\lambda) & Y_4(x,\lambda)\\ U_1(g)_x & U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4)\\ U_2(g)_x & U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4)\\ U_3(g)_x & U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4)\\ U_4(g)_x & U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4)\end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$U_1(y)=Y(0),\quad U_2(y)=Y'(0),\ U_3(y)=Y(1),\ U_4(y)=Y'(1),$$

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{1}{2W(\xi,\lambda)}\sum_{k=1}^{4}W_{4k}(\xi,\lambda),\quad \begin{matrix}+\,если\ \xi\le x\\ -\,если\ \xi> x\end{matrix}, \tag{8}$$

$W(x,\lambda)$ – определитель Вронского от фундаментальных систем решений, $W_{4k}(x,\lambda)$ – алгебраическое дополнение элементов $(4,k)$ в $W(x,\lambda)$.

Собственные значения, определяемые формулами (4), являются асимптотическими корнями уравнения

$$A(\lambda)\equiv 1+\lambda+\left(4\lambda^2-2+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{2i\lambda}+\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{4i\lambda}\right)=0,\ |\lambda|\to\infty \tag{9}$$

и $\Delta(\lambda)=e^{-2i\lambda}A(\lambda)$.

Теорема 1. Для функции Грина краевой задачи (1),(2) при любых $x,\xi\in[0,1]$ вне δ-окрестности спектра имеет место оценка

$$G(x,\xi,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ |\lambda|\to\infty. \tag{10}$$

Доказательство. Для получения асимптотического представления функции Грина сначала получим представление для ее числителя.

Для производных $Y_k^{(\nu)}(x,\lambda)$, $k=\overline{1,4}$, $\nu=1,3$ непосредственным вычислением имеем:

$$Y_k^{(\nu)}(x,\lambda)=\lambda^{\nu}\left[g_{k\nu}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{k1}^{(\nu)}(x)+\frac{1}{\lambda^2}g_{k2}^{(\nu)}(x)+\frac{E_{k\nu}(x,\lambda)}{\lambda^3}\right]e^{\pm i\lambda x}, \tag{11}$$

где

$$g_{k\nu}^{(0)}(x)=\theta_l^{\nu}g_{k0}^{(0)}(x);\ g_{k\nu}^{(1)}(x)=\nu\theta_l^{\nu-1}\frac{d}{dx}g_{k0}^{(0)}(x)+\theta_l^{\nu}g_{k0}^{(1)}(x)$$

$$g_{k\nu}^{(2)}(x)=\frac{\nu(\nu-1)}{2}\theta_l^{\nu-2}\frac{d^2}{dx^2}g_{k0}^{(0)}(x)+\nu\theta_l^{\nu-1}\frac{d}{dx}g_{k0}^{(1)}(x)+\theta_l^{\nu}g_{k0}^{2}(x).$$

причем при $k=1,2$ берется $l=1$ и $\theta_1=i$, при $k=3,4$ берется $l=2$ и $\theta_2=-i$.

Также непосредственно подсчитывая определитель Вронского, получим

$$W(x,\lambda)=16\lambda^4+O(\lambda^3),\ |\lambda|\to\infty \tag{12}$$

Обозначим

$$Z_j(\xi,\lambda)=\frac{W_{4j}(\xi,\lambda)}{W(x,\lambda)},\ j=\overline{1,4}. \tag{13}$$

Пусть

$$U_k(v_j)=U_{k0}(v_j)+U_{k1}(v_j)=A_{ij}(\lambda)+B_{ij}(\lambda)e^{\theta_l\lambda},\ k,j=\overline{1,4}, \tag{14}$$

где $l=1$ при $j=\overline{1,2}$; $l=2$ при $j=\overline{3,4}$.

Для того, чтобы получить асимптотику по параметру определителя $\Delta(x,\xi,\lambda)$ в верхней полуплоскости Π_+, преобразуем его так, чтобы в первом столбце не оставалось возрастающих показательных функций в Π_+. Для этого II–V столбцы умножим соответственно на $\frac{1}{2}Z_1(\xi,\lambda)$, $\frac{1}{2}Z_2(\xi,\lambda)$, $-\frac{1}{2}Z_3(\xi,\lambda)$, $-\frac{1}{2}Z_4(\xi,\lambda)$.

Полученный таким образом определитель обозначим через $\Delta_0(x,\xi,\lambda)$, а элементы первого столбца через $g_0(x,\xi,\lambda)$, $g_1(\xi,\lambda)$, $g_2(\xi,\lambda)$, $g_3(\xi,\lambda)$, $g_4(\xi,\lambda)$:

$$g_0(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}Y_1(x,\lambda)Z_1(\xi,\lambda)+Y_2(x,\lambda)Z_2(\xi,\lambda), & при\ \xi\le x\\ -Y_3(x,\lambda)Z_3(\xi,\lambda)-Y_4(x,\lambda)Z_4(\xi,\lambda), & при\ \xi\ge x\end{cases}$$

$$g_k(\xi,\lambda)=-A_{k3}Z_3(\xi,\lambda)-A_{k4}Z_4(\xi,\lambda)+\left[B_{k1}Z_1(\xi,\lambda)+B_{k2}Z_2(\xi,\lambda)\right]e^{i\lambda x},\ k=\overline{1,4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_0(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}&=g_0(x,\xi,\lambda)-\frac{e^{i\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\left\{\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}B_{k1}\Delta_{k1}(\lambda)\right]Z_1(\xi,\lambda)e^{i\lambda}+\right.\\
&+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}B_{k2}\Delta_{k1}(\lambda)\right]Z_2(\xi,\lambda)e^{i\lambda}+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}A_{k3}\Delta_{k1}(\lambda)\right]Z_3(\xi,\lambda)+\\
&\left.+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}A_{k4}\Delta_{k1}(\lambda)\right]Z_4(\xi,\lambda)\right\}+\frac{xe^{i\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\left\{\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}A_{k3}\Delta_{k2}(\lambda)\right]Z_3(\xi,\lambda)+\right.\\
&+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}A_{k4}\Delta_{k2}(\lambda)\right]Z_4(\xi,\lambda)+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}B_{k1}\Delta_{k2}(\lambda)\right]Z_1(\xi,\lambda)e^{i\lambda}+\\
&\left.+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}B_{k2}\Delta_{k2}(\lambda)\right]Z_2(\xi,\lambda)e^{i\lambda}\right\}-\frac{e^{-i\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\left\{\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}A_{k3}\Delta_{k3}(\lambda)\right]Z_3(\xi,\lambda)+\right.\\
&+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}A_{k4}\Delta_{k3}(\lambda)\right]Z_4(\xi,\lambda)+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}B_{k1}\Delta_{k3}(\lambda)\right]Z_1(\xi,\lambda)e^{i\lambda}+\\
&\left.+\left[\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}B_{k2}\Delta_{k3}(\lambda)\right]Z_3(\xi,\lambda)e^{i\lambda}\right]\right\}+\frac{xe^{-i\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\left\{\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}A_{k3}\Delta_{k4}(\lambda)\right]Z_3(\xi,\lambda)+\right.\\
&+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}A_{k4}\Delta_{k4}(\lambda)\right]Z_4(\xi,\lambda)+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}B_{k1}\Delta_{k4}(\lambda)\right]Z_1(\xi,\lambda)e^{i\lambda}+\\
&\left.+\left[\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}B_{k2}\Delta_{k4}(\lambda)\right]Z_2(\xi,\lambda)e^{i\lambda}\right\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Для главной части $g_0(x,\xi,\lambda)$ при $\xi\le x$ имеем:

$$\begin{aligned}g_0(x,\xi,\lambda)&=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\lambda^2}(\xi-x)+\frac{1}{\lambda^3}\left[g_{20}^{(1)}(\xi)-i-\xi\left(\frac{d}{d\xi}g_{40}^{(1)}(\xi)-\xi\frac{d}{d\xi}g_{30}^{(1)}(\xi)\right)+\right.\right.\\
&\xi g_{30}^{(1)}(\xi)-\xi g_{10}^{(1)}(x)+x\left(-g_{10}^{(1)}(\xi)-\left(\frac{d}{d\xi}g_{40}^{(1)}(\xi)-\xi\frac{d}{d\xi}g_{30}^{(1)}(\xi)\right)-4g_{30}^{(1)}(\xi)\right)-\\
&\left.\left.-g_{20}^{(1)}(x)\right]\right\}e^{i\lambda(x-\xi)}.\end{aligned} \tag{16}$$

А при $\xi \geq x$ $g_0(x,\xi,\lambda)$ показывается в виде

$$g_0(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\lambda^2}(\xi-x)+\frac{1}{\lambda^3}\left[g_{40}^{(1)}(\xi)-i-4\xi\left(\frac{d}{d\xi}g_{20}^{(1)}(\xi)-\xi\frac{d}{d\xi}g_{10}^{(1)}(\xi)\right)-\right.\right.$$

$$-4g_{10}^{(1)}(\xi)-\xi g_{30}^{(1)}-x\left(-g_{30}^{(1)}(\xi)-\frac{d}{d\xi}g_{20}^{(1)}(\xi)-\xi\frac{d}{d\xi}g_{10}^{(1)}(\xi)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-g_{10}^{(1)}(\xi)\right)-g_{10}^{(1)}(\xi)\right]\right\}e^{-i\lambda x}. \tag{17}$$

При разложении функций от

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^k A_{k\nu}\Delta_{kl}(\lambda),\ l=\overline{1,4},\ \nu=3,4,$$

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1} B_{k\nu}\Delta_{kl}(\lambda),\ l=\overline{1,4},\ \nu=1,2$$

по степеням показательной функции порядок роста коэффициентов не больше единицы. В определителе $\Delta_{\nu p}$ в верхней полуплоскости показательной функцией, имеющей наибольшую действительную часть, является функция $e^{-2i\lambda}$, а при $p \geq 3$ – функция $e^{-i\lambda}$.

Если числитель и знаменатель $\dfrac{\Delta_0(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ умножим на $e^{2i\lambda}$ и сохраним то, что во всех слагаемых действительные части показательной функции не были положительны в Π_+, то $\Delta(\lambda)$ ограничены снизу положительными постоянными, если выбросить внутренности малых кругов с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$, то в оставшейся части будет справедлива формула (10). Эта формула аналогично получается для точек вне δ-окрестности спектра и полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$. Теорема доказана.

Формулы разложений

Из результатов работы [Оруджев, 1989] вытекает, что в λ-плоскости существует последовательность замкнутых расширяющихся контуров C_ν, $\nu=1,2,\ldots$, обладающих свойствами: все C_ν расположены в части λ-плоскости, полученной выкидыванием из нее внутренностей малых кругов некоторого радиуса с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$; кратчайшее расстояние R_ν от начала координат до кривой C_ν стремится к бесконечности при $\nu\to\infty$; контур C_1 охватывает начало координат; между C_ν и $C_{\nu+1}$ лежит по крайней мере одно собственное значение.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ имеет первую непрерывную производную, вторую кусочно-непрерывную производную. Тогда имеет место формула разложения

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\nu}\lambda^3 d\lambda\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi=f(x). \tag{18}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$F_1(x,\xi)=-F_1(\xi)+xF_3(\xi);$$

$$F_2(x,\xi)=F_5(\xi)+xF_7(\xi);$$

$$F_3(x,\xi)=-F_2(\xi)-g_{10}^{(1)}(x)F_1(\xi)+xF_4(\xi)+g_{20}^{(1)}(x)F_3(\xi);$$

$$F_4(x,\xi)=F_6(\xi)-g_{40}^{(1)}(x)F_5(\xi)-xF_8(\xi)-g_{40}^{(1)}(x)F_7(\xi),$$

где

$$F_1(\xi) = -4\xi, \quad F_3(\xi) = -4;$$

$$F_2(\xi) = -4g_{20}^{(1)}(\xi) + 4i - 4\xi\left[\frac{d}{d\xi}g_{40}^{(1)}(\xi) - \xi\frac{d}{d\xi}g_{30}^{(1)}(\xi)\right] - 4\xi g_{30}^{(1)}(\xi);$$

$$F_4(\xi) = -4g_{10}^{(1)}(\xi) - 4\left[\frac{d}{d\xi}g_{40}^{(1)}(\xi) - \xi\frac{d}{d\xi}g_{30}^{(1)}(\xi)\right] - 4g_{30}^{(1)}(\xi);$$

$$F_5(\xi) = -4\xi;$$

$$F_6(\xi) = -4g_{40}^{(1)}(\xi) - 4i - 4\xi\left[\frac{d}{d\xi}g_{20}^{(1)}(\xi) - \xi\frac{d}{d\xi}g_{10}^{(1)}(\xi)\right] - 4\xi g_{10}^{(1)}(\xi);$$

$$F_7(\xi) = -4;$$

$$F_8(\xi) = -4g_{30}^{(1)}(\xi) - 4\left[\frac{d}{d\xi}g_{20}^{(1)}(\xi) - \xi\frac{d}{d\xi}g_{10}^{(1)}(\xi)\right] - 4g_{10}^{(1)}(\xi).$$

Тогда

$$F_1(x,x) = 0,$$

$$F_{1\xi}(x,\xi)\Big|_{\xi=x}^{'} = 4, \; F_{2\xi}(x,\xi)\Big|_{\xi=x}^{'} = 4, \quad F_3(x,x) = -4i, \quad F_4(x,x) = -4i.$$

Интегрируя два раза по частям интегралы

$$\int_0^x F_1(x,\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}f(\xi)d\xi, \quad \int_x^1 F_2(x,\xi)e^{-i\lambda(x-\xi)}f(\xi)d\xi$$

и один раз по частям интегралы

$$\int_0^x F_3(x,\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}f(\xi)d\xi, \quad \int_x^1 F_4(x,\xi)e^{-i\lambda(x-\xi)}f(\xi)d\xi$$

для общего при коэффициенте $\dfrac{1}{\lambda^4}$ будет стоять:

$$\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{i(2i)^3} + \frac{2}{i(2i)^3}\right]f(x) = f(x).$$

На основании формул (15), используя Леммы Жордана [Сидоров, Федорюк, Шабунин, 1982] легко показать, что предел $\int\limits_{C_v}$ от всех сумм, кроме первой, стремится к нулю равномерно при любом $x \in [0,1]$.

В результате, после предельного перехода будем иметь:

$$\lim_{v\to\infty}\int_{C_v}\lambda^3 d\lambda\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi = 2\pi\sqrt{-1}f(x).$$

Теорема доказана.

Введем систему функций $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)\}$ и составим выражение

$$F(x,\xi) = \sum_{m=1}^{4}\sum_{k=0}^{4-m}P_{4-km}\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{v=0}^{m-1}\lambda^v\Phi_{m-1-v}(x)\right),$$

где

$$P_{33} = P_{11} = P_{10} = P_{21} = P_{32} = P_{43} = 0, \qquad P_{22} = 1, \; P_{44} = 1.$$

Из теоремы 2 непосредственным предельным переходом получается следующая

Теорема 3. Предположим, что функция $\Phi_k(x)$, $k = \overline{0,3}$ имеет непрерывные производные до порядка 5-k включительно и обращаются в нуль производные до порядка

4- k включительно на концах интервала (0,1). Тогда имеет место равномерно сходящаяся на [0,1] формула 4-х кратного разложения

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\lim_{\nu\to\infty}\int_{C_\nu}\lambda^s d\lambda\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)F(\xi,\lambda)d\xi=\Phi_s(x),\ s=\overline{0,3} \qquad (19)$$

Формулу (16) можно записать в таком виде

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_\nu\int_{r_\nu}\lambda^s d\lambda\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)F(\xi,\lambda)d\xi=\Phi_s(x),\ s=\overline{0,3},$$

где r_ν – простой замкнутый контур, окружающий только один полюс λ_ν подынтегральных функций, являющихся собственными значениями краевой задачи (1)–(2) и сумма по ν распространена на все собственные значения, и равномерно сходится при всех $x\in[0,1]$.

Заключение

В результате проведенного анализа доказано, что для рассматриваемого на отрезке $[0,1]$ параметрического почти регулярного порядка 2 дифференциального пучка четвертого порядка с двумя двукратными чисто мнимыми корнями при распадающихся краевых условиях типа Штурма, два из которых заданы на левом конце, функция Грина $G(x,\xi,\lambda)$ вне δ-окрестности спектра имеет асимптотическое представление $G(x,\xi,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ |\lambda|\to\infty$, и имеет место формула 4-х кратного разложения системы достаточно гладких функций, обращающихся в нуль вместе с производными порядка выше, чем порядок уравнения на концах интервала, по решению исследуемой задачи.

Список литературы
References

1. Шкаликов А.А. . 1983. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в краевых условиях. Труды семинара имени И.Г. Петровского, вып. 9: 190–229.

Shkalikov A.A.. 1983. Krayevyye zadachi dlya obyknovennyx differencial`nyx uravneniy s parametrom v krayevyx usloviyax [Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary conditions]. Trudy seminara imeni I.Q. Petrovskoqo, vip. 9: 190–229.

2. Вагабов А.И. . 1985. Асимптотика решений дифференциальных уравнений с кратными характеристиками по параметру. ДАН СССР, 283(5): 1047–1050.

Vaqabov A.I. 1985. Asimptotika resheniy differencial`nyx uravneniy s kratnymi harakteristikami po parametru [Asymptotics of solutions of differential equations with multiple characteristics with respect to a parameter]. DAN SSSR, 283(5):1047–1050.

3. Гасымов М.Г., Магеррамов А.М. 1987. Прямые и обратные спектральные задачи для одного класса обыкновенных дифференциальных пучков на конечном отрезке. Дифференциальные уравнения, 23(6): 960–971.

Qasymov M.Q., Magerramov A.M. 1987. Pryamyye i obratnyye spektral`nyye zadachi dlya odnoqo klassa obyknovennix differencial`nix puchkov na konechnom otrezke [Direct and inverse spectral problems for a class of ordinary differential beams on a finite interval]. Differencial`nyye uravneniya, 23(6): 960–971.

4. Оруджев Э.Г. 1989. О краевых задачах для дифференциального уравнения 4-го порядка, полиномиально зависящего от спектрального параметра. Доклады Академии Наук Азербайджанской ССР, 45(10):7–14.

Orudzhev E.G. 1989. O krayevyx zadachax dlya differencial`noqo uravneniya 4-qo poryadka, polinomial`no zavisyasheqo ot spektral`noqo parametra [On boundary value problems for a fourth order differential equation polynomially dependent on the spectral parameter]. Doklady Akademii Nauk Azerbaydzhanskoy SSR, 45(10):7–14.

5. Оруджев Э.Г. 1999. Краевые задачи для дифференциальных уравнений четного порядка с кратными характеристиками. Доклады Академии Наук, Российская Академия Наук, 368(1), 14–17.

Orudzhev E.G. 1999. Krayevyye zadachi dlya differencial`nyx uravneniy chetnoqo poryadka s kratnymi harakteristikami [Boundary value problems for differential equations of even order with multiple characteristics]. Doklady Akademii Nauk, Rossiyskaya Akademiya Nauk, 368(1), 14-17.

6.Вагабов А.И. 2016. Спектральная задача с двумя кратными корнями характеристического уравнения дифференциального пучка четвертого порядка. Успехи современной науки, Т.3, № 5, стр.115-120.

Vaqabov A.I. 2016. Spektral`naya zadacha s dvumya kratnymi kornyami harakteristicheskoqo uravneniya differencial`noqo puchka chetvertoqo poryadka [The spectral problem with two multiple roots of the characteristic equation of a fourth-order differential beam]. Uspexi sovremennoy nauki, T.3, № 5, str.115-120.

7. Оруджев Э.Г., Амирова Л.И. 2018. О собственных значениях спектральной задачи для одного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Проблемы современной науки и образования, 132(12): 14–21.

Orudzhev E.G., Amirova L.I. 2018. O sobstvennyx znacheniyax spektral`noy zadachi dlya odnoqo uravneniya chetvertoqo poryadka s kratnymi xarakteristikami [On the eigenvalues of the spectral problem for a fourth order equation with multiple characteristics]. Problemy sovremennoy nauki i obrazovaniya, 132(12): 14–24.

8. Оруджев Э.Г. 1998. Прямые спектральные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка, полиноминально зависящего от спектрального параметра. Доклады Академии Наук Азербайджана, 54 (1): 9-15.

Orudzhev E.G. 1998. Pryamyye spektral`nyye zadachi dla obyknovennoqo differencial`noqo uravneniya 4-qo poryadka, polinomial`no zavisyasheqo ot spertral`noqo parametra [Direct spectral problems for an ordinary fourth-order differential equation that polynomially depends on the spectral parameter]. Doklady Akademii Nauk Azerbaydzhana, 54(1):9-15.

9. Orudzhev E.G. 1999. Spectral analysis of differential operators with multiple characteristics on a semi-axis. Russian Mathematical Surveys 54 (2): 448-449 (in Russian).

10. Оруджев Э.Г. 2002. Спектральный анализ одного дифференциального пучка с кратными характеристиками. Доклады Национальной Академии Наук Азербайджана, 58(5-6): 40-46.

Orudzhev E.G. 2002. Spektral'nyy analiz odnogo differentsial'nogo puchka s kratkimi otsenkami. [Spectral analysis of a single differential beam with multiple characteristics]. Doklady Natsional'noy Akademii Nauk Azerbaydzhana, 58(5-6): 40-46.

11. Orudzhev E.G. 2010. Uniquennes of Solution of the Inverse Problem of Scattering Theory for a Fourth Order Differential Bundle with Multiple Characteristics. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 6(1): 84-95 (in Russian).

12. Mirzoev S.S., Orudzhev E.G., Aliyev A.R. 2012. Spectral Analysis of a Fourth Order Differential Pensil on the Whole Real Line. Doklady Mathematics 85(1): 57-59 (in Russian).

13. Elshar G.Orudzhev and Sahil A.Aliyev. 2014. Construction of a kernel of the transformation operator for a fourth order differential bundle with multiple characteristics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Special Issue, 40: 351–358 (in Russian).

14. Оруджев Э.Г., Алиев С.А. 2019. Исследование спектра и резольвенты одного диффереациального пучка 4-го порядка с трехкратным характеристическим корнем. Научные Ведомости Белгородского Государственного Университета, Серия: Математика Физика, 51(1): 52-63.

15. Orudzhev E.G., Aliev S.A. 2019. Investigation of the spectrum and rezolvent of a fourth order differential sheaf with a triple characteristic root. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics, Physics, 51(1): 52-63 (in Russian).

16. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., 1982. Лекции по теории комплексного переменного. М. Наука, 488 с.

Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I., 1982. Lekcii po teorii funkciy kompleksnoqo peremennoqo [Lectures on the theory of complex variable]. M. Nauka Publ, 488.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Оруджев Э.Г., Амирова Л.И. 2019. Четырехкратное разложение по решению краевой задачи для дифференциального уравнения 4-го порядка с двукратными характеристиками. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2): 183–191. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-183-191.

Orudzhev E.G., Amirova L.I. 2019. Four fold expansion in solving a boundary value problem for a fourth order differential equation with double characteristics. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 183–191 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-183-191.