УДК: 517.9
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-245-261

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

PERIODIC AT INFINITY SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HOMOGENEOUS SPACES

В.Е. Струков, И.И. Струкова
V.E. Strukov, I.I. Strukova

Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Voronezh State University, Russia,1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006

E-mails: sv.post.of.chaos@gmail.com, irina.k.post@yandex.ru

Аннотация
В статье изучаются периодические на бесконечности функции из однородных пространств и распределения из гармоничных пространств. Формулируется определение однородного пространства функций, заданных на вещественной оси или полуоси, со значениями в комплексном банаховом пространстве. В частности, однородными являются пространства Степанова, Лебега, амальгам Винера, пространства функций ограниченной вариации и непрерывных функций, а также многие их подпространства. На основе однородных пространств функций строятся гармоничные пространства распределений. В рассматриваемых пространствах функций (распределений) вводятся понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций (распределений), изучаются их свойства. Вводятся понятия канонического и обобщенного рядов Фурье периодической на бесконечности функции (распределения), коэффициентами которых являются медленно меняющиеся на бесконечности функции (распределения). Изучаются свойства рядов Фурье. Получены критерии периодичности на бесконечности функции (распределения). Особое внимание уделяется получению критериев периодичности на бесконечности решений дифференциальных и разностных уравнений.

Abstract
The article under consideration studies periodic at infinity functions from homogeneous spaces and distributions from harmonic spaces. We give a definition of a homogeneous space of functions defined on the real axis or semi-axis with values in a complex Banach space. For instance, Stepanov spaces, Lebesgue spaces, Wiener amalgams, the space of functions of bounded variation and continuous functions and some of their subspaces belong to this class. On the basis of homogeneous spaces of functions harmonic spaces of distributions are constructed. In the spaces of functions (distributions) under consideration we introduce the concepts of slowly varying and periodic at infinity functions (distributions) and study their properties. For periodic at infinity function (distribution) we also introduce the concepts of canonical and generalized Fourier series, whose coefficients are slowly varying at infinity functions (distributions). We study the properties of Fourier series and derive criteria of periodicity at infinity of a function (distribution). Special attention is paid to obtaining criteria of periodicity at infinity of solutions to differential and difference equations.

Ключевые слова: периодическая на бесконечности функция, однородное пространство, периодическое на бесконечности распределение, банахов модуль, спектр Берлинга, разностное уравнение, дифференциальное уравнение.
Keywords: periodic at infinity function, homogeneous space, periodic at infinity distribution, Banach module, Beurling spectrum, difference equation, differential equation.

1. Однородные пространства функций и гармоничные пространства распределений

1.1. Однородные пространства функций

Пусть X – комплексное банахово пространство, $End X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Пусть $\mathbb{J}$ – один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.

Символом $L^1_{loc}(\mathbb{J}, X)$ обозначим линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{J}$ (классов эквивалентности) функций со значениями в банаховом пространстве X.

Через $S^p(\mathbb{J}, X)$, где $p \in [1,\infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [Левитан, Жиков, 1978], состоящее из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{J}, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s\in\mathbb{J}} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}, \ p \in [1,\infty),$$

принимаемая за норму.

Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений (см. [Левитан, Жиков, 1978; Баскаков, Кричтал, 2005; Баскаков, 2013]).

Определение 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X, называется однородным, если выполнены следующие условия:

(a) пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$$

инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

(b) в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа изометрий $S(t), t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \ s,t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X); \tag{1}$$

(c) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и выполнено неравенство $\|f * x\| \le C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C \ge 1$ (как правило, $C = 1$);

(d) $\varphi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ для любой $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $supp\varphi$, причем $\|\varphi x\| \le \|\varphi\|_1 \|x\|$ и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно.

Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, где $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$ бесконечно дифференцируема и $supp\varphi$ — компакт.

Определение 2. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ функций из $S^1(\mathbb{R}_+, X)$ будем называть однородным, если существует однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, ассоциированное с пространством $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ такое, что для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ существует продолжение $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ со следующими свойствами:

1) $y(t) = x(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$;

2) $\|y\| \le C\|x\|, C > 0$;

3) $y \in \mathsf{F}_0(\mathbb{R}_-, X)$;

4) $S(t)x \in \mathsf{F}(\mathbb{R}_+, X)$ для всех $t \ge 0$, $x \in \mathsf{F}(\mathbb{R}_+, X)$;

5) для любого другого продолжения $z \in \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$, обладающего свойствами 1–4, выполняется условие $y - z \in \mathsf{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Примерами однородных пространств являются ([Струков, Струкова, 2018а, б]):

1) пространства $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (классов) функций и пространство $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ существенно ограниченных (классов) функций;

2) пространства амальгам Винера $(L^p(\mathbb{R}, X), l^q(\mathbb{R}, X))$, $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$;

3) пространства Степанова $S^p = S^p(\mathbb{R}, X)$ для всех $p \in [1, \infty)$;

4) пространство $\mathsf{V}(\mathbb{R}, X) \subset L^\infty(\mathbb{R}, X)$ функций ограниченной вариации (см. [Струкова, 2016б]);

5) пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ ограниченных непрерывных функций и его подпростанства:

a) подпространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \subset C_b(\mathbb{R}, X)$ равномерно непрерывных функций,

b) подпространство $C_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций,

c) подпространство $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности функций (см. [Струкова, 2014; Струкова, 2015; Баскаков, Струкова, 2016; Струкова, 2016а]),

d) подпространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, состоящее из ω-периодических на бесконечности функций, $\omega \in \mathbb{R}_+$ (см. [Струкова, 2014; Струкова, 2015; Струкова, 2016а; Баскаков, Струкова, 2016]),

e) подпространство $AP_\infty = AP_\infty(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ непрерывных почти периодических на бесконечности функций (см. [Баскаков, 2013; Баскаков, 2015; Баскаков и др., 2018]).

Банахово пространство $M(\mathbb{R}, X)$ векторных (со значениями в X) борелевских мер ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ со сверткой мер в качестве умножения не является пространством функций, но его можно рассматривать как гармоничное пространство распределений (см. определение 3).

Далее символом $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ будем обозначать однородное пространство. Если $X = \mathbb{C}$, то оно будет обозначаться символом $\mathsf{F}(\mathsf{J})$.

Через $\mathsf{F}_c(\mathsf{J}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ вида $\{x \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X):$ функция $t \mapsto S(t)x : \mathsf{J} \to \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ непрерывна$\}$. Через $\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$, содержащее все функции $\varphi x, x \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$, где $\varphi \in C_b(\mathsf{J}, X)$ бесконечно дифференцируема и $supp \varphi$ – компакт.

Непосредственно из определения 1 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура определяется сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ (см. §2). В частности, пространства $\mathsf{F}_c(\mathbb{R}, X)$ совпадают с пространствами S-непрерывных векторов (см. определение 4).

1.2. Гармоничные пространства распределений

Каждому однородному пространству функций $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество однородных пространств $\mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [Струков, Струкова, 2018б]), которые определяются как линейные пространства функций вида

$$\mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) = \{f_n * x \mid x \in \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)\}, n \in \mathbb{N},$$

с нормой $\|f_n * x\|_{\mathsf{F}^{(n)}} = \|f_n * x\|_{\mathsf{F}} + \|x\|_{\mathsf{F}}$, где функции $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, имеют вид

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^n}{n!} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases} \tag{3}$$

Символом $\mathsf{S} = \mathsf{S}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство Шварца пробных функций, а символом $\mathsf{S}' = \mathsf{S}'(\mathbb{R}, X)$ – пространство распределений медленного роста с естественными операциями сложения и умножения на число (см. [Владимиров, 1981; Струков, Струкова, 2018б]).

Определение 3. Линейное подпространство $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X) \subset \mathsf{S}'(\mathbb{R}, X)$ называется гармоничным пространством распределений, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого распределения Φ из $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ найдется функция φ из однородного пространства $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ такая, что $\Phi = (D + I)^n \varphi$ и $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. При этом для пространства $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ будем использовать обозначение $\mathsf{F}^{(-n)}(\mathbb{R}, X)$ и говорить, что пространство распределений $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ соответствует однородному пространству функций $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$.

Заметим, что в определении 3 функция φ представима в виде $\varphi = f_n * \Phi$, где функция f_n из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (3).

Под пространством $\mathsf{F}^{(0)}(\mathbb{R}, X)$ будем понимать само однородное пространство $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$. Тогда каждому однородному пространству $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ ставится в соответствие счетное множество пространств $\mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, каждое из которых можно рассматривать как гармоничное пространство распределений.

В каждом из пространств $\mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим операторы $\mathsf{D}_n^m : D(\mathsf{D}_n^m) \subset \mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \to \mathsf{F}^{(n-m)}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\mathsf{D}^m = (D + I)^m, m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

и операторы $\mathsf{D}^{-m} : D(\mathsf{D}^{-m}) \subset \mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \to \mathsf{F}^{(n+m)}(\mathbb{R}, X)$, действующие по правилу

$$\mathsf{D}^{-m}\Phi = f_m * \Phi, \Phi \in \mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X), m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где функция f_m из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (3).

При этом под оператором D^0 будем понимать тождественный оператор I, действующий в соответствующем пространстве $\mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Следует отметить, что операторы D^m, $m \in \mathbb{Z}$, обладают свойством $\mathsf{D}^{-m}\mathsf{D}^m = I$, $m \in \mathbb{Z}$.

Далее символом $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ будет обозначаться одно из пространств $\mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемое как гармоничное пространство распределений. В работе [Струков, Струкова, 2018б] была получена следующая

Теорема 1. Любое гармоничное пространство распределений $\boldsymbol{F}(\mathbb{R},X)$ (т. е. $\boldsymbol{F}(\mathbb{R},X)=\mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$ для некоторого $n\in\mathbb{Z}$) изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций $\mathsf{F}(\mathbb{R},X)$.

Замечание 1. Гармоничные пространства распределений $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}_+,X)=\mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}_+,X)$, $n\in\mathbb{Z}$, вводятся аналогично однородным пространствам функций $\mathsf{F}(\mathbb{R}_+,X)$ (см. определение 2). Для них будут справедливы результаты, аналогичные тем, которые будут получены для пространств $\boldsymbol{F}(\mathbb{R},X)$. Отметим, что $\boldsymbol{F}_c(\mathsf{J},X)=\left(\mathsf{F}^{(n)}(\mathsf{J},X)\right)_c=\left(\mathsf{F}_c(\mathsf{J},X)\right)^{(n)}$ и $\boldsymbol{F}_0(\mathsf{J},X)=\left(\mathsf{F}^{(n)}(\mathsf{J},X)\right)_0=\left(\mathsf{F}_0(\mathsf{J},X)\right)^{(n)}$, $n\in\mathbb{Z}$, где J – один из промежутков $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$.

2. Гармонический анализ периодических векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $End\,\mathcal{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Пусть $L^1(\mathbb{R})$ – банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой функций в качестве умножения

$$(f*g)(t)=\int_{\mathbb{R}}f(t-s)g(s)ds,\ t\in\mathbb{R},\ f,g\in L^1(\mathbb{R}).$$

Будем считать, что $\mathcal{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см. [Росс, Хьюитт, 1975; Баскаков, Криштал, 2005; Баскаков, 2016; Баскаков и др., 2018]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T:\mathbb{R}\to End\,\mathcal{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1. Для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ выполняются следующие условия:

1) из равенства $fx=0$, справедливого для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x\in\mathcal{X}$ – нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathcal{X}$);

2) для всех $f\in L^1(\mathbb{R})$, $x\in\mathcal{X}$, $t\in\mathbb{R}$, имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathcal{X}$ с представлением $T:\mathbb{R}\to End\,\mathcal{X}$):

$$T(t)(fx)=(T(t)f)x=f(T(t)x).$$

Если $T:\mathbb{R}\to End\,\mathcal{X}$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x=fx=\int_{\mathbb{R}}f(t)T(-t)xdt,\ f\in L^1(\mathbb{R}),\ x\in\mathcal{X},$$

определяет на $\mathcal{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением T.

Замечание 2. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем $\mathcal{X}$ ассоциировано единственное представление $T:\mathbb{R}\to End\,\mathcal{X}$ (см. [Баскаков, Криштал, 2005]). Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение $(\mathcal{X},T)$.

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей содержится в [Росс, Хьюитт, 1975; Баскаков, 1978; Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005; Баскаков, 2015; Баскаков, 2016; Баскаков и др., 2018].

Определение 4. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля X назовем непрерывным (относительно представления T) или T-непрерывным, если функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathsf{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x, t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля X обозначим через X_c или $(\mathsf{X},T)_c$. Оно образует замкнутый подмодуль из X, т. е. X_c – замкнутое линейное подпространство из X, инвариантное относительно всех операторов $T(f)$, $T(t)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

Далее через $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 5. Спектром Берлинга вектора $x \in \mathsf{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида

$$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ с } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}.$$

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0 \in \mathbb{R}:$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\hat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

Свойства спектра Берлинга векторов из банаховых модулей рассматривались в [Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005].

Определение 6. Пусть $\omega > 0$. Вектор $x_0 \in (\mathsf{X},T)$ называется ω-периодическим (относительно представления T), если $T(\omega)x_0 = x_0$.

Множество ω-периодических векторов обозначим через $\mathsf{X}_\omega = \mathsf{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в X, инвариантное относительно операторов $T(t), t \in \mathbb{R}$.

Ряд Фурье вектора $x \in \mathsf{X}_\omega$ имеет вид

$$x : \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n, \tag{6}$$

где

$$x_n = \hat{x}\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(\tau) x e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau, n \in \mathbb{Z}.$$

Если ряд Фурье вектора $x \in \mathsf{X}_\omega$ абсолютно сходится, т. е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$, то справедливо равенство $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} x_n$.

Периодические векторы и их ряды Фурье рассматривались в статье [Баскаков, Струкова, 2016]. В частности, в этой работе были доказаны следующие результаты, используемые в дальнейшем:

Теорема 2. Для того, чтобы вектор $x_0 \in \mathsf{X}$ был ω-периодическим (т. е. $x_0 \in \mathsf{X}_\omega$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение

$$\Lambda(x_0) \subset \frac{2\pi}{\omega} \mathbb{Z}.$$

Теорема 3. Для любого $x \in \mathsf{X}_\omega$ с рядом Фурье вида (6) справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k \right\| = 0.$$

3. Периодические на бесконечности функции из однородных пространств и гармоничные распределения

3.1. Периодические на бесконечности функции из однородных пространств и их ряды Фурье

Далее символом $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ обозначается однородное пространство функций, удовлетворяющее всем условиям (a)–(d) определения 1 (для $\mathsf{J} = \mathsf{R}_+$ – удовлетворяющее всем условиям (1)–(5) определения 2).

В банаховом пространстве $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ рассмотрим (полу-)группу $S : \mathsf{J} \to End\,\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ операторов, действующих по правилу $(S(t)x)(\tau) = x(t+\tau)$, $t, \tau \in \mathsf{J}$.

Определение 7. Функция $x \in \mathsf{F}_c(\mathsf{J}, X)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если $(S(t)x - x) \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$ для любого $t \in \mathsf{J}$.

Определение 8. Пусть $\omega > 0$. Функция $x \in \mathsf{F}_c(\mathsf{J}, X)$ называется ω-периодической на бесконечности, если $(S(\omega)x - x) \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$.

Множества медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ обозначим символами $\mathsf{F}_{sl\,\infty}(\mathsf{J}, X)$ и $\mathsf{F}_{\omega\,\infty}(\mathsf{J}, X)$ соответственно. Заметим, что они образуют линейные замкнутые подпространства из $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$, инвариантные относительно (полу-)группы сдвигов S. Для случая $\mathsf{J} = \mathsf{R}$ эти пространства рассматривались в работе [Струков, Струкова, 2018б]. Почти периодические на бесконечности функции из однородных пространств изучались в [Струков, Струкова, 2018а].

Рассмотрим фактор-пространство $\mathsf{X}(\mathsf{J}) = \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$, $\mathsf{J} \in \{\mathsf{R}_+, \mathsf{R}\}$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y \in x + \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$ – класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$. Символом $\mathsf{X}_c(\mathsf{J})$ обозначим подпространство $\mathsf{F}_c(\mathsf{J}, X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$ фактор-пространства $\mathsf{X}(\mathsf{J})$, а символом $\mathsf{X}_\omega(\mathsf{J})$ – подпространство $\mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$.

Отметим, что банахово пространство $\mathsf{X}(\mathsf{J})$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом: $\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}$, $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathsf{X}(\mathsf{J})$.

В пространстве $\mathsf{X}(\mathsf{R})$ действует сильно непрерывная изометрическая группа операторов $\widetilde{S} : \mathsf{R} \to End\,\mathsf{X}(\mathsf{R})$ вида

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x},\ x \in \mathsf{F}(\mathsf{R}, X),\ t \in \mathsf{R}. \tag{7}$$

Фактор-пространство $\mathsf{X}(\mathsf{R})$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathsf{R})$-модуля с помощью формулы $f\widetilde{x} = \widetilde{f * x}$, $f \in L^1(\mathsf{R})$, $x \in \mathsf{F}(\mathsf{R}, X)$.

Ясно, что подпространства $\mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$, $\mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{R}, X)$, $\mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$ являются замкнутыми подмодулями из $L^1(\mathsf{R})$-модуля $\mathsf{F}(\mathsf{R}, X)$, в которых действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура определяется сверткой функций (2). Однако формула (2) не позволяет корректно задать структуру $L^1(\mathsf{R})$-модуля в $\mathsf{F}(\mathsf{R}_+, X)$. Тем не менее такой структурой наделяются фактор-пространства $\mathsf{X}(\mathsf{J})$, $\mathsf{X}_c(\mathsf{J})$ и $\mathsf{X}_\omega(\mathsf{J})$. Случай $\mathsf{J} = \mathsf{R}$ очевиден: в этом случае $\mathsf{X}_c(\mathsf{R})$ и $\mathsf{X}_\omega(\mathsf{R})$ являются замкнутыми подмодулями фактор-модуля $\mathsf{X}(\mathsf{R})$.

Замечание 3. Пусть $\mathsf{J} = \mathsf{R}_+$. Каждую функцию $x \in \mathsf{F}(\mathsf{R}_+, X)$ продолжим до функции y на R так, чтобы продолжение y удовлетворяло всем 5 условиям определения

2. Тогда класс эквивалентности $\widetilde{x} \in \mathsf{X}(\mathbb{R})$ не зависит от способа такого продолжения на $\mathbb{R}$ и, следовательно, банахово пространство $\mathsf{X}(\mathbb{R}_+)$ изометрически вкладывается в $\mathsf{X}(\mathbb{R})$ в качестве замкнутого подмодуля. При этом группа операторов $\widetilde{S}$ корректно определена на $\mathsf{X}(\mathbb{R}_+)$.

Непосредственно из определения представления $\widetilde{S}$, задаваемого формулой (7), следует, что $\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in \mathsf{X}_\omega(\mathbb{J})$. Следовательно, имеет место

Теорема 4. Функция $x \in \mathsf{F}_c(\mathbb{J}, X)$ является ω-периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathsf{F}_0(\mathbb{J}, X)$ является ω-периодическим вектором относительно представления $\widetilde{S} : \mathbb{J} \to End\,\mathsf{X}(\mathbb{J})$.

Получен следующий спектральный критерий периодичности на бесконечности функции из однородного пространства:

Теорема 5. Для того, чтобы функция $x \in \mathsf{F}_c(\mathbb{J}, X)$ была ω-периодической на бесконечности (т. е. принадлежала пространству $\mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение $\Lambda_{ess}(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Доказательство. Поскольку фактор-пространство $\mathsf{X}(\mathbb{J})$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, то из определения 5 данной статьи и определений 10, 11 статьи [Баскаков, Струкова, 2016] следует, что $\Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda_{ess}(x)$, где $\widetilde{x} = x + \mathsf{F}_0(\mathbb{J}, X)$. Поэтому утверждение теоремы следует из теорем 2 и 4. Теорема доказана.

Определение 9. Каноническим рядом Фурье функции $x \in \mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{J},$$

где функции $x_n : \mathbb{J} \to X, n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau, t \in \mathbb{J}, n \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

и называются каноническими коэффициентами Фурье функции x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau$, $t \in \mathbb{J}$, $k \in \mathbb{Z}$, – обычные коэффициенты Фурье непрерывной периодической функции x.

Определение 10. Обобщенным рядом Фурье функции $x \in \mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{J}, \tag{9}$$

где $y_n, n \in \mathbb{Z}$, – такие функции из $\mathsf{F}(\mathbb{J}, X)$, для которых $y_n - x_n \in \mathsf{F}_0(\mathbb{J}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, а функции x_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (8).

Из результатов, полученных в [Струков, Струкова, 2018б], и замечания 3 следует

Теорема 6. Пространство $\mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обладает следующими свойствами:

1. Канонические коэффициенты Фурье $x_n, n \in \mathbb{Z}$, (определенные формулой (8)) принадлежат пространству $\mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$.

2. Коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье функции $x \in \mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ принадлежат пространству $\mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ и удовлетворяют условию $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|_{\mathsf{F}} = 0$.

3. По любой функции $x \in F_{\omega,\infty}(J, X)$ (не обязательно непрерывной) можно построить обобщенный ряд Фурье (9) такой, что $y_n \in C_{sl,\infty}(J, X)$, $n \in Z$. Более того, функции y_n, $n \in Z$, могут быть выбраны так, что они допускают расширение на C до ограниченных целых функций сколь угодно малого экспоненциального типа.

Рассмотрим функции e_k, $k \in Z$, следующего вида $e_k(t) = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in J$.

Определение 11. Будем говорить, что ряд Фурье (9) периодической на бесконечности функции $x \in F_{\omega,\infty}(J, X)$ суммируем на бесконечности методом Чезаро, если существует последовательность $(y_n^0, n \in N)$ функций из $F_0(J, X)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\| x - \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)y_k e_k + y_n^0 \right\|_F = 0.$$

При этом каждая из функций y_k, $k \in Z$, эквивалентна функции x_k, определяемой формулой (8), т. е. $y_k - x_k \in F_0(J, X)$, $k \in Z$.

Из теорем 3 и 4 следует

Теорема 7. Ряд Фурье любой функции $x \in F_{\omega,\infty}(J, X)$ суммируем на бесконечности методом Чезаро.

Отметим, что выбор обобщенных коэффициентов Фурье в этой теореме не имеет значения.

Пусть $\omega > 0$. Далее символом $F_\omega(J, X)$ обозначим подпространство ω-периодических функций из $F_c(J, X)$, т. е. функций, удовлетворяющих условию $S(\omega)x = x$, $x \in F_c(J, X)$.

Рассмотрим последовательность $(A_N, N \in N)$ операторов из $End F_c(J, X)$ следующего вида: $A_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)$, $N \geq 1$, причем $\|A_N\| = 1$, $N \geq 1$.

Получен следующий критерий представимости периодической на бесконечности функции из однородного пространства $F(J, X)$ в виде суммы периодической и исчезающей на бесконечности функций:

Теорема 8. Для того, чтобы функция $x \in F_{\omega,\infty}(J, X)$ была представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in F_\omega(J, X)$, $x_0 \in F_0(J, X)$, необходимо и достаточно, чтобы в $F_c(J, X)$ существовал $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $x \in F_{\omega,\infty}(J, X)$ представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in F_\omega(J, X)$, $x_0 \in F_0(J, X)$. Тогда $A_N(x_1 + x_0) = x_1 + A_N x_0$, $N \geq 1$. Поскольку $x_0 \in F_0(J, X)$, то $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x_0 = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = x_1$.

Достаточность. Пусть для некоторой функции $x \in F_{\omega,\infty}(J, X)$ существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = y$. Покажем, что x представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in F_\omega(J, X)$, $x_0 \in F_0(J, X)$. В силу равенств

$$S(\omega)y - y = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S((k+1)\omega)x - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)x\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}(S(N\omega)x - x)\right) = 0$$

функция y является периодической, т. е. $y \in \mathsf{F}_\omega(\mathsf{J}, X)$, откуда вытекает, что $A_N y = y$ для любого $N \geq 1$. Обозначив $x - y = x_0 \in \mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X)$, получим следующую цепочку равенств:

$$\lim_{N\to\infty} A_N x_0 = \lim_{N\to\infty} A_N(x-y) = \lim_{N\to\infty} (A_N x - y) = y - y = 0. \tag{10}$$

По функции x_0 построим класс $\widetilde{x}_0 = x_0 + \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$, который в силу теоремы 4 является ω-периодическим вектором в пространстве $\mathsf{X}(\mathsf{J}) = \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$, т. е. $\widetilde{x}_0 \in \mathsf{X}_\omega(\mathsf{J}) = \mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$. Наряду с операторами A_N, $N \geq 1$, рассмотрим последовательность $(\widetilde{A}_N, N \in \mathsf{N})$ операторов из $End\,\mathsf{X}(\mathsf{J})$ следующего вида: $\widetilde{A}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{S}(k\omega)$, $N \in \mathsf{N}$. Тогда $\widetilde{A}_N \widetilde{x}_0 = \widetilde{x}_0$ для любого $N \geq 1$. С другой стороны, из (10) следует справедливость равенства $\lim_{N\to\infty} \widetilde{A}_N \widetilde{x}_0 = \widetilde{0}$, откуда непосредственно получаем, что $\widetilde{x}_0 = \widetilde{0}$. А значит $x_0 \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$, т. е. функция x представима в виде $x = y + x_0$, где $y \in \mathsf{F}_\omega(\mathsf{J}, X)$, $x_0 \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$. Теорема доказана.

3.2. Периодические на бесконечности распределения из гармоничных пространств и их ряды Фурье

В соответствии с определением 3 и замечанием 1 для произвольного распределения Φ из гармоничного пространства распределений $\boldsymbol{F}(\mathsf{J}, X)$, где $\boldsymbol{F}(\mathsf{J}, X) = \mathsf{F}^{(n)}(\mathsf{J}, X)$ для некоторого $n \in \mathsf{Z}$, найдется функция y из однородного пространства $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ такая, что $\Phi = \mathsf{D}^n y$, где оператор D^n, $n \in \mathsf{Z}$, определяется одной из формул (4) или (5)). При этом $y = \mathsf{D}^{-n}\Phi$, $n \in \mathsf{Z}$.

Введем понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности распределений из пространств $\boldsymbol{F}(\mathsf{J}, X)$.

Пространства $\boldsymbol{F}_c(\mathsf{J}, X)$ и $\boldsymbol{F}_0(\mathsf{J}, X)$ определим следующим образом:

$\boldsymbol{F}_c(\mathsf{J}, X) = \{\Phi \in \boldsymbol{F}(\mathsf{J}, X) : \Phi = \mathsf{D}^n y,\ y \in \mathsf{F}_c(\mathsf{J}, X)\}$;

$\boldsymbol{F}_0(\mathsf{J}, X) = \{\Phi \in \boldsymbol{F}(\mathsf{J}, X) : \Phi = \mathsf{D}^n y,\ y \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)\}$.

Определение 12. Распределение $\Phi \in \boldsymbol{F}_c(\mathsf{J}, X)$ называется медленно меняющимся на бесконечности, если $S(\alpha)\Phi - \Phi \in \boldsymbol{F}_0(\mathsf{J}, X)$ для всех $\alpha \in \mathsf{R}$.

Определение 13. Пусть $\omega > 0$. Распределение $\Phi \in \boldsymbol{F}_c(\mathsf{J}, X)$ называется ω-периодическим на бесконечности, если $S(\omega)\Phi - \Phi \in \boldsymbol{F}_0(\mathsf{J}, X)$

Множества медленно меняющихся и периодических на бесконечности распределений обозначим символами $\boldsymbol{F}_{sl,\infty} = \boldsymbol{F}_{sl,\infty}(\mathsf{J}, X)$ и $\boldsymbol{F}_{\omega,\infty} = \boldsymbol{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X)$. Непосредственно из определения следует, что $\boldsymbol{F}_{sl,\infty}(\mathsf{J}, X)$ и $\boldsymbol{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X)$, образуют линейные замкнутые подпространства из $\boldsymbol{F}_c(\mathsf{J}, X)$, инвариантные относительно (полу-)группы сдвигов S.

Из теоремы 1 следует

Лемма 1. Пространства $\boldsymbol{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X)$ и $\mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X)$ изоморфны, т. е. распределение $\Phi \in \boldsymbol{F}(\mathsf{J}, X)$ является ω-периодическим на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathsf{D}^{-n}\Phi \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ является ω-периодической на бесконечности. Пространства

$\boldsymbol{F}_{sl.\infty}(\mathsf{J},X)$ и $\mathsf{F}_{sl.\infty}(\mathsf{J},X)$ также изоморфны.

Из леммы 1 следует, что

$$\boldsymbol{F}_{sl.\infty}(\mathsf{J},X)=\{\Phi\in\boldsymbol{F}(\mathsf{J},X):\Phi=\mathsf{D}^n y,\ y\in\mathsf{F}_{sl.\infty}(\mathsf{J},X)\};$$

$$\boldsymbol{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)=\{\Phi\in\boldsymbol{F}(\mathsf{J},X):\Phi=\mathsf{D}^n y,\ y\in\mathsf{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)\}.$$

Таким образом, все результаты, полученные для периодических на бесконечности функций из однородных пространств, справедливы также и для периодических на бесконечности гармоничных распределений.

Рассмотрим функции e_k, $k\in\mathsf{Z}$, следующего вида $e_k(t)=e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t\in\mathsf{J}$.

Определение 14. Каноническим рядом Фурье распределения $\Phi\in\boldsymbol{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{k\in\mathsf{Z}}\Phi_k e_k,$$

где $\Phi_k, k\in\mathsf{Z}$, – такие распределения из $\boldsymbol{F}_c(\mathsf{J},X)$, что функции $y_k=\mathsf{D}^{-n}\Phi_k\in\mathsf{F}(\mathsf{J},X)$ являются каноническими коэффициентами Фурье функции $y=\mathsf{D}^{-n}\Phi\in\mathsf{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)$. Такие распределения $\Phi_k, k\in\mathsf{Z}$, будем называть каноническими коэффициентами Фурье распределения Φ.

Определение 15. Обобщенным рядом Фурье распределения $\Phi\in\boldsymbol{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{k\in\mathsf{Z}}\Psi_k e_k, \tag{11}$$

где $\Psi_k, k\in\mathsf{Z}$, – такие распределения из $\boldsymbol{F}_c(\mathsf{J},X)$, для которых $\Psi_k-\Phi_k\in\boldsymbol{F}_0(\mathsf{J},X)$, а распределения Φ_k, $k\in\mathsf{Z}$, являются каноническими коэффициентами Фурье распределения Φ.

Из теоремы 6 и леммы 3.1 вытекает

Теорема 9. Пространство $\boldsymbol{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)$ обладает следующими свойствами:

1. Канонические коэффициенты Фурье $\Phi_k, k\in\mathsf{Z}$, являются медленно меняющимися на бесконечности распределениями, т. е. $\Phi_k\in\boldsymbol{F}_{sl.\infty}(\mathsf{J},X)$, $k\in\mathsf{Z}$.

2. Коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье (11) распределения $\Phi\in\boldsymbol{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)$ принадлежат пространству $\boldsymbol{F}_{sl.\infty}(\mathsf{J},X)$ и удовлетворяют условию $\lim\limits_{k\to\infty}\|\Psi_k\|_{\mathsf{F}}=0$.

Для $\mathsf{J}=\mathsf{R}$ аналогичные теореме 9 результаты были получены в работе [Струков, Струкова, 2018б].

Определение 16. Будем говорить, что ряд Фурье (11) распределения $\Phi\in\boldsymbol{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)$ суммируем на бесконечности методом Чезаро, если ряд Фурье функции $y=\mathsf{D}^{-n}\Phi\in\mathsf{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)$ суммируем на бесконечности методом Чезаро (см. определение 11).

Из теоремы 7 следует

Теорема 10. Ряд Фурье любого распределения $\Phi\in\boldsymbol{F}_{\omega.\infty}(\mathsf{J},X)$ суммируем на бесконечности методом Чезаро.

Рассмотрим последовательность $(A_N, N\in\mathsf{N})$ операторов из $End\,\boldsymbol{F}_c(\mathsf{J},X)$ следующего вида $A_N=\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}S(k\omega)$, $N\geq 1$, причем $\|A_N\|=1$, $N\geq 1$.

Пространство ω-периодических распределений $\boldsymbol{F}_\omega(\mathsf{J},X)$, используемое в следующей теореме, строится на основе подпространства $\mathsf{F}_\omega(\mathsf{J},X)$ ω-периодических функций из однородного пространства $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ по следующему правилу:

$$\boldsymbol{F}_{\omega}(\mathsf{J}, X) = \{\Phi \in \boldsymbol{F}(\mathsf{J}, X) : \Phi = \mathsf{D}^n y,\ y \in \mathsf{F}_{\omega}(\mathsf{J}, X)\}.$$

Из теоремы 8 вытекает следующий критерий представимости периодического на бесконечности гармоничного распределения из пространства $\boldsymbol{F}(\mathsf{J}, X)$ в виде суммы периодического и исчезающего на бесконечности распределений:

Теорема 11. Для того, чтобы распределение $\Phi \in \boldsymbol{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X)$ было представимо в виде $\Phi = \Phi_1 + \Phi_0$, где $\Phi_1 \in \boldsymbol{F}_{\omega}(\mathsf{J}, X)$, $\Phi_0 \in \boldsymbol{F}_0(\mathsf{J}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы в $\boldsymbol{F}_c(\mathsf{J}, X)$ существовал $\lim\limits_{N\to\infty} A_N \Phi$.

Отметим, что предел в условиях теоремы 11 понимается по норме соответствующего пространства распределений.

4. Периодические на бесконечности решения разностных и дифференциальных уравнений

4.1. Периодические на бесконечности решения разностных уравнений

Пусть X – комплексное банахово пространство, $\mathsf{J} \in \{\mathsf{R}_+, \mathsf{R}\}$. Рассмотрим разностное уравнение вида

$$x(t+1) = Bx(t) + y_0(t),\ t \in \mathsf{J}, \tag{12}$$

где $B \in End\, X$, $y_0 \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$.

Теорема 12. Пусть спектр $\sigma(B)$ оператора B удовлетворяет условию

$$\sigma(B) \cap \mathsf{T} \subset \{1\}. \tag{13}$$

Тогда каждое ограниченное решение $x_0 : \mathsf{J} \to X$ разностного уравнения (12) принадлежит пространству $\mathsf{F}_{1,\infty}(\mathsf{J}, X)$.

Доказательство. Пусть функция $x_0 \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ удовлетворяет разностному уравнению (12), т. е. $S(1)x_0 - Bx_0 = y_0$, где $(Bx_0)(t) = Bx_0(t), t \in \mathsf{J}$. Поскольку $y_0 \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$, то

$$\widetilde{S}(1)\widetilde{x}_0 - B\widetilde{x}_0 = \widetilde{0}, \tag{14}$$

где $\widetilde{Bx_0} = B\widetilde{x}_0 = Bx_0 + \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$.

Докажем включение $\Lambda(\widetilde{x}_0) \subset 2\pi\mathsf{Z}$. Пусть $\lambda_0 \in \mathsf{R} \setminus 2\pi\mathsf{Z}$. Выберем функцию $f \in L^1(\mathsf{R})$ такую, что $\widetilde{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $supp\widetilde{f}$ – компакт, причем $(supp\widetilde{f}) \cap 2\pi\mathsf{Z} = \varnothing$. Покажем, что $f\widetilde{x}_0 = 0$. Из (14) получаем

$$f(\widetilde{S}(1)\widetilde{x}_0 - B\widetilde{x}_0) = (S(1)f)\widetilde{x}_0 - Bf\widetilde{x}_0 = f_1\widetilde{x}_0 - Bf\widetilde{x}_0 = \widetilde{0}, \tag{15}$$

где $f_1 = S(1)f \in L^1(\mathsf{R})$.

В случае $\mathsf{J} = \mathsf{R}_+$ символом $\overline{x}_0$ будем обозначать продолжение $\overline{x}_0 \in \mathsf{F}(\mathsf{R}, X)$ функции x_0 на R, обладающее свойствами 1)–5) определения 2. Если $\mathsf{J} = \mathsf{R}$, положим $\overline{x}_0 = x_0$.

Из (15) получаем включение $(f_1 - Bf) * \overline{x}_0 \in \mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$. Поскольку $\sigma(B) \cap \mathsf{T} \subset \{1\}$, то существует окрестность $V \subset \mathsf{T}$ числа $\gamma_0 = e^{i\lambda_0}$ такая, что определена резольвента $\lambda \mapsto R(e^{i\lambda}, B) : V \to End\, X$ оператора B.

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\widetilde{\varphi} : \mathsf{R} \to \mathsf{C}$ такую, что $\widetilde{\varphi}(\lambda_0) \neq 0$ и $supp\varphi \subset [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ для любого малого $\delta > 0$ такого, что $e^{i\lambda} \in \rho(B)$ для

$|\lambda-\lambda_0|\le\delta$. Тогда она является преобразованием Фурье некоторой функции $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$, а функция

$$\widetilde{F}(\lambda)=\begin{cases}\widetilde{\varphi}(\lambda)(e^{i\lambda}I-B)^{-1}, & \lambda\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta],\\ 0, & \lambda\notin[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta],\end{cases}$$

является (в силу голоморфности функции $\lambda\mapsto(e^{i\lambda}I-B)^{-1}:\mathbb{R}\to End X$) преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции $F:\mathbb{R}\to End X$.

Из равенств

$$\widetilde{\bigl(F*(f_1-Bf)\bigr)}(\lambda)=\widetilde{F}(\lambda)(e^{i\lambda}I-B)\widetilde{f}(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)\widetilde{f}(\lambda)I,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

и формулы (15) следует, что $F*(f_1-Bf)*\overline{x}_0=(\varphi*f)*\overline{x}_0\in\mathrm{F}_0(\mathbb{R},X)$.

Обозначив $\varphi*f$ через g, получаем, что $\widetilde{g}(\lambda_0)=\widetilde{\varphi}(\lambda_0)\widetilde{f}(\lambda_0)\ne 0$. Таким образом, $\lambda_0\notin\Lambda_{ess}(\overline{x}_0)$. Отсюда, в силу теоремы 5 (считая $\omega=1$), следует, что функция $\overline{x}_0$ принадлежит пространству $\mathrm{F}_{1,\infty}(\mathbb{R},X)$ и, следовательно, $x_0\in\mathrm{F}_{1,\infty}(\mathrm{J},X)$. Теорема доказана.

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$x(t+2)+B_1x(t+1)+B_2x(t)=y_0(t),\ t\in\mathrm{J},\tag{16}$$

где $B_k\in End X$, $k=1,2$, $y_0\in\mathrm{F}_0(\mathrm{J},X)$.

Каждой функции $x\in\mathrm{F}(\mathrm{J},X)$ поставим в соответствие функцию $y:\mathrm{J}\to X^2=X\times X$ вида $y(t)=(x_1(t),x_2(t))$, $t\in\mathrm{J}$, где $x_1=x$, $x_2=S(1)x$. Здесь в декартовом произведении X^2 рассматривается норма $\|(x_1,x_2)\|=\max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}$, $(x_1,x_2)\in X^2$. Тогда непосредственно из определения функции y следует, что функция $x\in\mathrm{F}(\mathrm{J},X)$ является решением уравнения (16) тогда и только тогда, когда функция $y\in\mathrm{F}(\mathrm{J},X^2)$ удовлетворяет уравнению

$$f(t+1)=Bf(t)+f_0(t),\ t\in\mathrm{J},$$

где $f_0\in\mathrm{F}_0(\mathrm{J},X^2)$, $f_0(t)=(0,y_0(t))$, $t\in\mathrm{J}$, и оператор $B\in End X^2$ задается матрицей

$$B=-\begin{pmatrix}0 & -I\\ B_2 & B_1\end{pmatrix}\tag{17}$$

Тогда непосредственно из теоремы 12 вытекает следующая

Теорема 13. Пусть спектр $\sigma(B)$ оператора B, задаваемого матрицей (17), удовлетворяет условию (13). Тогда каждое ограниченное решение $x:\mathrm{J}\to X$ разностного уравнения (16) принадлежит пространству $\mathrm{F}_{1,\infty}(\mathrm{J},X)$.

4.2. Периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений

Пусть $A:D(A)\subset X\to X$ – линейный оператор с областью определения $D(A)$, являющийся генератором сильно непрерывной ограниченной полугруппы операторов $U:\mathbb{R}_+\to End X$. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t)-Ax(t)=y(t),\ t\in\mathrm{J},y\in\mathrm{F}_0(\mathrm{J},X).\tag{18}$$

Классическим решением дифференциального уравнения (18) называется дифференцируемая функция $x:\mathrm{J}\to X$ такая, что $x(t)\in D(A)$ для любого $t\in\mathrm{J}$, и удовлетворяющая уравнению (18) для всех $t\in\mathrm{J}$.

Сформулируем два определения слабого решения (mild solution) дифференциального уравнения (18).

Определение 17. Функция $x:\mathrm{J}\to X$ называется слабым решением дифференциального уравнения (18), если функция $z:\mathrm{J}\to X$, $z(t)=\int_0^t x(s)ds$, $t\in\mathrm{J}$, обладает следующими свойствами:

1) $z(t)\in D(A)$ для любого $t\in\mathrm{J}$;

2) $x(t)-x(0)=Az(t)+\int_0^t y(s)ds, t\in\mathrm{J}$.

Определение 18. Функция $x:\mathrm{J}\to X$ называется слабым решением уравнения (18) (см. [Chicone, Latushkin, 1999]), если для всех $s,t\in\mathrm{J}$, $s\le t$, имеют место равенства

$$x(t)=U(t-s)x(s)+\int_s^t U(t-\tau)y(\tau)d\tau,\ s\le t,\ s,t\in\mathrm{J}. \tag{19}$$

При $\mathrm{J}=\mathrm{R}_+$ равенства должны быть выполнены при $s=0$ и $t\ge 0$.

Заметим, что оба определения слабого решения уравнения (18) эквивалентны (см. [Arendt et al., гл. 3]).

Справедлива следующая

Теорема 14. Пусть сильно непрерывная полугруппа операторов $U:\mathrm{R}_+\to End\,X$ ограничена и имеет место включение

$$\sigma(U(1))\cap\mathrm{T}\subset\{1\}. \tag{20}$$

Тогда каждое ограниченное на J слабое решение уравнения (18) с функцией $y\in\mathrm{F}_0(\mathrm{J},X)$ принадлежит пространству $\mathrm{F}_{1,\infty}(\mathrm{J},X)$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (20). Пусть $x:\mathrm{J}\to X$ – ограниченное на J слабое решение уравнения (18).

Положив в (19) $t=s+1$ и заменив впоследствии s на t, получим равенство

$$x(t+1)=U(1)x(t)+\int_t^{t+1}U(t+1-\tau)f(\tau)d\tau,\ t\in\mathrm{J}.$$

Введем обозначения $U(1)=B$, $\int_t^{t+1}U(t+1-\tau)f(\tau)d\tau=y_0(t)$, $t\in\mathrm{J}$, и покажем, что $y_0\in\mathrm{F}_0(\mathrm{J},X)$. В силу ограниченности полугруппы U имеем $\|y_0(t)\|=\left\|\int_t^{t+1}U(t+1-\tau)y(\tau)d\tau\right\|\le M\int_t^{t+1}\|y(\tau)\|d\tau$, $t\in\mathrm{J}$, для некоторого $M>0$. Тогда из того, что $y\in\mathrm{F}_0(\mathrm{J},X)$, получаем, что $y_0\in\mathrm{F}_0(\mathrm{J},X)$, т. е. функция x удовлетворяет разностному уравнению (12). Из (20) следует, что выполнено условие (13) теоремы 12, и, значит, $x\in\mathrm{F}_{1,\infty}(\mathrm{J},X)$. Теорема доказана.

4.3. Дифференциальные уравнения в пространстве гармоничных распределений

Пусть $\boldsymbol{F}(\mathrm{R},X)$ – гармоничное пространство распределений, отвечающее однородному пространству функций $\mathrm{F}(\mathrm{R},X)$, т. е. $\boldsymbol{F}(\mathrm{R},X)=\mathrm{F}^{(n)}(\mathrm{R},X)$ для некоторого $n\in\mathrm{Z}$.

В однородном банаховом пространстве $\mathrm{F}(\mathrm{R},X)$ рассмотрим линейный оператор

$$\mathrm{L}=\frac{d}{dt}-A:D(\mathrm{L})\subset\mathrm{F}(\mathrm{R},X)\to\mathrm{F}(\mathrm{R},X). \tag{21}$$

Определение 19. Функцию $x \in \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ отнесем к области определения $D(\mathsf{L})$ дифференциального оператора L, если существует функция $y \in \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ такая, что для всех $s, t \in \mathbb{J}$, $s \le t$, имеют место равенства (19).

Для $x \in D(\mathsf{L})$ мы положим $\mathsf{L}x = y$, если x и y удовлетворяют равенствам (19). Такое определение оператора L было впервые дано в работе [Баскаков, 1973] (см. также [Баскаков, 1978; Баскаков, 2013; Baskakov, Krishtal, 2016]). Отметим, что в силу включения $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ справедливо включение $D(\mathsf{L}) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.

Далее символом $S(f) : \mathsf{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначен оператор свертки $S(f)x = f * x$ функции $x \in \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ с функцией f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

В работе [Baskakov, Krishtal, 2016] установлена следующая теорема о перестановочности операторов $S(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, с оператором L:

Теорема 15. Для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любой функции x из $D(\mathsf{L})$ функция $S(f)x$ принадлежит $D(\mathsf{L})$ и имеет место равенство

$$\mathsf{L}S(f)x = S(f)\mathsf{L}x.$$

Наряду с дифференциальным оператором $\mathsf{L} : D(\mathsf{L}) \subset \mathsf{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ вида (21) рассмотрим в пространстве распределений $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ подобный ему оператор $\mathsf{L}_n : D(\mathsf{L}_n) \subset \boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X) \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $\mathsf{L}_n = \mathsf{D}^n \mathsf{L} \mathsf{D}^{-n}$, т. е. $\mathsf{L}_n \Phi = \Phi' - A\Phi$, $\Phi \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$. Из их подобия следует, что они обратимы одновременно.

Наряду с дифференциальным уравнением (18) рассмотрим уравнение

$$\Phi' - A\Phi = \Psi, \tag{22}$$

где $\Psi \in \boldsymbol{F}_0(\mathbb{R}, X)$ и $A : D(A) \subset X \to X$ – генератор сильно непрерывной ограниченной полугруппы операторов $U : \mathbb{R}_+ \to End\, X$.

Определение 20. Распределение $\Phi \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$, где $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X) = \mathsf{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, отнесем к области определения $D(\mathsf{L}_n)$ дифференциального оператора L_n, если существует распределение $\Psi \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ такое, что функция $\mathsf{D}^{-n}\Phi$ принадлежит области определения $D(\mathsf{L})$ оператора L и имеет место равенство $\mathsf{L}(\mathsf{D}^{-n}\Phi) = \mathsf{D}^{-n}\Psi$.

Определение 21. Распределение $\Phi \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ называется слабым решением дифференциального уравнения (22), если функция $x = \mathsf{D}^{-n}\Phi \in \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ является слабым решением дифференциального уравнения (18).

Учитывая подобие операторов L и L_n, для дифференциального уравнения (22) справедлива теорема, аналогичная теореме 14. При этом используется, что операторы D^n, D^{-n} перестановочны с операторами свертки с функцией из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и сдвига $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в пространствах $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$, являющихся изоморфными банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями (см. теорему 1).

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 16. Пусть сильно непрерывная полугруппа операторов $U : \mathbb{R}_+ \to End\, X$ ограничена и имеет место включение (20). Тогда каждое ограниченное на $\mathbb{J}$ слабое решение уравнения (22) с распределением $\Psi \in \boldsymbol{F}_0(\mathbb{J}, X)$ принадлежит пространству $\boldsymbol{F}_{1,\infty}(\mathbb{J}, X)$.

Справедливость теоремы 16 для $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ следует из замечания 1.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097, работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00732 А.

The first author was supported by RFBR according to the research project no. 18-31-00097 and the second author was supported by RFBR according to the research project no. 19-01-00732 A.

Список литературы
References

1. Баскаков А.Г. 1973. Некоторые вопросы теории векторных почти периодических функций: Дис. канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 100.

Baskakov A.G. 1973. Nekotorye voprosy teorii vektornykh pochti periodicheskikh funktsiy: Dis. kand. fiz.-mat. Nauk [Some questions regarding the theory of almost periodic vector-valued funcitons: PhD thesis, 100.]. Voronezh, VSU, 100.

2. Баскаков А.Г. 1978. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений. Матем. заметки., 24(2) : 195–206.

Baskakov A.G. 1978. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. Math. Notes, 24(1–2) : 606–612 (in Russian).

3. Баскаков А.Г. 2004. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. СМФН, 9 : 3–151.

Baskakov A.G. 2006. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. J. Math. Sci. (N. Y.), 137(4) : 4885–5036.

4. Баскаков А.Г. 2013. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. УМН, 68(1) : 77–128.

Baskakov A.G. 2013. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. Russian Mathematical Surveys, 68(1) : 69–116.

5. Баскаков А.Г. 2015. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве. Матем. Заметки, 97(2) : 174–190.

Baskakov A.G. 2015. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. Math. Notes., 97(2) : 164–178.

6. Баскаков А.Г. 2016. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. Воронеж, Издательский дом ВГУ, 152.

Baskakov A.G. 2016. Garmonicheskiy analiz v banakhovykh modulyakh i spektral'naya teoriya lineynykh operatorov [Harmonic analysis in Banach modules and spectral theory of linear operators]. Voronezh, Izdatel'skiy dom VGU, 152.

7. Баскаков А.Г., Криштал И.А. 2005. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства. Изв. РАН. Серия матем., 69(3) : 3–54.

Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2005. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. Izv. Math., 69(3) : 439–486.

8. Баскаков, А.Г., Струкова, И.И., Тришина, И.А. 2018. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Сиб. матем. журн., 59(2) : 293–308.

Baskakov A.G., Strukova I.I., Trishina I.A. 2018. Solutions almost periodic at infinity to differential equations with unbounded operator coefficients. Siberian Mathematical Journal, 59(2) : 231–242.

9. Владимиров В.С. 1981. Уравнения математической физики. М., Наука : 512.

Vladimirov V.S. 1984. Equations of mathematical physics. M., Mir : 464.

10. Левитан Б.М., Жиков В.В. 1978. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., Изд-во Московского университета, 205.

Levitan B.M., Zhikov V.V. 1983. Almost periodic functions and differential equations. Cambridge University Press, 224.

11. Росс К.А., Хьюитт Э. 1975. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах. М., Мир, 904. (Ross K.A., Hewitt E. 1970. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups. Berlin, Hedelberg, New York Springer-Verlag, 771.).

Ross K.A., Kh'yuitt E. 1975. Abstraktnyy garmonicheskiy analiz. T. 2. Struktura i analiz kompaktnykh grupp. Analiz na lokal'no kompaktnykh abelevykh gruppakh. [Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups.] M., Mir, 904. (Ross K.A., Hewitt E. 1970. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups. Berlin, Hedelberg, New York, Springer-Verlag, 771.).

12. Струков В.Е., Струкова И.И., 2018. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 50(3) : 254–264.

Strukov V.E., Strukova I.I., 2018. About four derinitions of almost periodic at infinity functions from homogeneous space. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 50(3) : 254–264 (in Russian).

13. Струков В.Е., Струкова И.И., 2018. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях. Вестник ВГУ, серия Физика. Математика. 4 : 195–205.

Strukov V.E., Strukova I.I., 2018. About slowly varying and periodic at infinity functions from homogeneous spaces and harmonic distributions. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 4 : 254–264.

14. Струкова И.И. 2014. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 14(1) : 28–38.

Strukova I.I. 2014. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. Izv. Sarat. univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 14(1) : 28–38.

15. Струкова И.И. 2015. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы. Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика, 3 : 161–165.

Strukova I.I. 2015. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika, 3 : 161–165.

16. Струкова И.И. 2016. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций. Сиб. матем. журн., 57(1) : 186–198.

Strukova I.I. 2016. On Wiener's theorem for functions periodic at infinity. Siberian Math. J., 57(1) : 145–154.

17. Струкова И.И. 2016. Периодические на бесконечности функции ограниченной вариации. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, 44(20)(241) : 50–59.

Strukova I.I. 2016. Periodic at infinity functions of bounded variation. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 44(20)(241) : 50–59 (in Russian).

18. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F.. 2011. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Vol.96. Basel, Birkhauser, Monographs in Mathematics, 412.

19. Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2016. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces. Mediterranean Journal of Mathematics. 13(5) : 2443–2462.

20. Baskakov A., Strukova I. 2016. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J., 7(4) : 9–29.

21. Chicone C., Latushkin Y. 1999. Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations. Amer. Math. Soc. Vol. 70 : 361.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Струков В.Е., Струкова И.И. 2019. Периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений в однородных пространствах. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2): 245–261. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-245-261.

Strukov V.E., Strukova I.I. 2019. Periodic at infinity solutions to differential equations in homogeneous spaces. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 245–261 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-245-261.