УДК 517.956
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-174-182

КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

THE CORRECTNESS OF A MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF DEGENERATED MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS

С.А. Алдашев
S.A. Aldashev

Институт математики и математического моделирования
ул. Пушкина,125, Алматы, 0500100, Казахстан

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
125 Pushkin st., Almaty, 0500100, Kazakhstan,

E-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация
Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Автором ранее изучены локальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений. В данной статье используется метод, предложенный в ранних работах автора, показаны однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи в цилиндрической области для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений. Получен также критерий единственности регулярного решения этих задач.

Abstract
Correct statements of boundary value problems on the plane for elliptic equations by the method of the theory of analytic functions of a complex variable are well studied. In the study of similar issues, when the number of independent variables is more than two, there are difficulties of a fundamental nature. The very attractive and convenient method of singular integral equations loses its force due to the absence of any complete theory of multidimensional singular integral equations. The author has previously studied local boundary value problems in a cylindrical domain for multidimensional elliptic equations. In this article, the method proposed in the author`s earlier works is used. The unique solvability is shown and an explicit form of the classical solution of a mixed problem in a cylindrical domain for a single class of degenerate multidimensional elliptic equations is obtained. A criterion for the uniqueness of a regular solution of these problems was also obtained.

Ключевые слова: корректность, смешанная задача, вырождающиеся эллиптические уравнения, функция Бесселя.
Keywords: correctness, mixed problem, degenerate elliptic equations, Bessel function.

Введение

Смешанная задача для вырождающихся многомерных линейных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах изучена [Краснов, 1959], [Барановский, 1958]. Однако, насколько известно автору, эта задача для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений не исследована.

В данной работе показана однозначная разрешимость классического решения смешанной задачи в цилиндрической области для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений.

С помощью теории многомерных сферических функций получен явный вид решения в виде ряда, который можно использовать при изучении прикладных задач.

Постановка задачи и результат

Пусть D_α – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$, плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=0$, где $|x|$ – длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α, обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ соответственно.

В области D_α рассмотрим взаимно-сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv t^p \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

$$L^*\vartheta = t^p \Delta_x \vartheta + \vartheta_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_{x_i} - b\vartheta_t + d\vartheta = 0, \tag{1*}$$

где $p=const>0$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным

$$x_1,\ldots,x_m, m\geq 2, \text{ а } \quad d(x,t)=c-\sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t.$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1},t, r\geq 0, 0\leq\theta_1<2\pi, 0\leq\theta_i\leq\pi, i=2,3,\ldots,m-1$.

В качестве смешанной задачи рассмотрим задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C^1(\bar{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{S_0}=\tau(r,\theta), \quad u_t\big|_{S_0}=\nu(r,\theta), \quad u\big|_{\Gamma_\alpha}=\psi(t,\theta), \tag{2}$$

при этом $\tau(1,\theta)=\psi(0,\theta)$, $\nu(1,\theta)=\psi_t(0,\theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leq k\leq k_n, (m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2), \theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}), W_2^l(S_0)$, $l=0,1,\ldots$ – пространство Соболева.

Имеет место [Михлин, 1962]

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$. Если $l\geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$\left|f_0^1(r)\right|\leq c_1, \ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2\leq c_2, \quad c_1, c_2=const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^{k}(r,t),\ a_{in}^{k}(r,t),\ \tilde{b}_{n}^{k}(r,t),\ \tilde{c}_{n}^{k}(r,t), \tilde{d}_{n}^{k}(r,t), \rho_{n}^{k}, \overline{\tau}_{n}^{k}(r), \overline{\nu}_{n}^{k}(r), \psi_{n}^{k}(t),$ обозначим коэффициенты ряда (3), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta),\ a_i\frac{x_i}{r}\rho,$ $b(r,\theta,t)\rho,\ c(r,\theta,t)\rho,\ d(r,\theta,t)\rho,\ \rho(\theta), i=1,\ldots,m, \tau(r,\theta), \nu(r,\theta), \psi(t,\theta),$ причем $\rho(\theta)\in C^{\infty}(H)$, H-единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t)\in W_2^l(D_\alpha)\subset C(\overline{D}_\alpha), l\geq m+1, i=1,\ldots,m, c(r,\theta,t)\leq 0,$ $\forall(r,\theta)\in D_\alpha$. Тогда справедлива

Теорема. Если $\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)\in W_2^l(S_0),\ \psi(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha), l>\frac{3m}{2}$, то задача 1 имеет единственное решение.

Разрешимость задачи 1. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu\equiv t^p(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{\delta u}{r^2})-u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0. \tag{4}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}), g_1=1, g_j=(\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2, j>1.$$

Известно [3], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2), n=0,1,\ldots$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных функций $Y_{n,m}^{k}(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставив (5) и (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$, и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\overline{u}_n^k$ получим [Алдашев, 1998], [Алдашев, 1994], [Алдашев, 2005].

$$\begin{gathered}t^p\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1+\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+(\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1)u_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\tilde{u}_{ot}^1+\tilde{c}_0^1\tilde{u}_0^1+\\+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\{t^p\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k+\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+(\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}a_{in}^k)\overline{u}_{nr}^k+\tilde{b}_n^k\overline{u}_{nt}^k+\\+[\tilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}t^p+\sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}_{in-1}^k-na_{in}^k)]\overline{u}_n^k\}=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1t^p\overline{u}_{0rr}^1+\rho_0^1u_{ott}^1+\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1\overline{u}_{0r}^1=0. \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\rho_1^kt^p\overline{u}_{1rr}^k+\rho_1^k\overline{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k\overline{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}t^p\rho_1^k\overline{u}_1^k=\\=-\frac{1}{k_1}(\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\overline{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\overline{u}_{ot}^1+\tilde{c}_0^1\overline{u}_0^1).\ \ n=1,\ k=\overline{1,k_1},\end{gathered} \tag{8}$$

$$\rho_n^k t^p \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} t^p \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} t^p \rho_n^k \bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \{ \sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + [\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m} (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k)] \bar{u}_{n-1}^k \}, \quad (9)$$

$$k = \overline{1, k_n}. \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Суммируя уравнение (8) от 1 до k_1, а уравнение (9) – от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместе с (7), приходим к уравнению (6).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \ldots$ решение системы (7)–(9), то оно является решением уравнения (6).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)–(9) можно представить в виде

$$t^p (\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k) + \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r, t), \quad (10)$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t) \equiv 0$.

Далее из краевого условия (2) в силу (5), с учетом леммы 1 будем иметь:

$$\bar{u}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \ \bar{u}_{nt}^k(r,0) = \bar{v}_n^k(r), \ \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_n^k(t), k = \overline{1, k_n},$$
$$n = 0, 1, \ldots . \quad (11)$$

В силу (10), (11), произведя замену $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_n^k(t)$, получим

$$t^p (\bar{\vartheta}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{\vartheta}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{\vartheta}_n^k) + \bar{\vartheta}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (12)$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \ \bar{\vartheta}_{nt}^k(r,0) = v_n^k(r), \ \bar{\vartheta}_n^k(1,t) = 0, \ k = \overline{1.k_n}, \ n = 0, 1, \ldots . \quad (13)$$

$$\bar{f}_n^k(r,t) = f_n^k(r,t) + \frac{\lambda_n}{r^2} t^p \psi_n^k - \psi_{ntt}^k, \tau_n^k(r) = \bar{\tau}_n^k(r) - \psi_n^k(0), v_n^k(r) = \bar{v}_n^k(r) - \psi_{nt}^k(0).$$

Произведя замену переменной $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \vartheta_n^k(r,t)$ задачу (12), (13) приведем к следующей задаче

$$L\vartheta_n^k = t^p (\vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \vartheta_n^k) + \vartheta_{ntt}^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (14)$$

$$\vartheta_n^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \ \vartheta_{nt}^k(r,0) = \tilde{v}_n^k(r), \ \vartheta_n^k(1,t) = 0,$$
$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \ \tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r,t), \quad (15)$$
$$\tilde{\tau}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \tau_n^k(r), \quad \tilde{v}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} v_n^k(r).$$

Решение задачи (14), (15) ищем в виде

$$\vartheta_n^k(r,t) = \vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t), \quad (16)$$

где $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ решение задачи

$$L\vartheta_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \quad (17)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,0) = \vartheta_{1nt}^k(r,0) = 0, \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \quad (18)$$

а $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ – решение задачи

$$L\vartheta_{2n}^{k}=0, \tag{19}$$

$$\vartheta_{2n}^{k}(r,0)=\overline{\tau}_{n}^{k}(r),\ \vartheta_{2nt}^{k}(r,0)=\tilde{\nu}_{n}^{k}(r),\ \vartheta_{2n}^{k}(1,t)=0. \tag{20}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\vartheta_{n}^{k}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_{s}(r)T_{s}(t), \tag{21}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_{n}^{k}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^{k}(t)R_{s}(r),\ \tilde{\tau}_{n}^{k}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^{k}R_{s}(r),\ \tilde{\nu}_{n}^{k}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{ns}^{k}R_{s}(r). \tag{22}$$

Подставляя (21) в (17), (18), с учетом (22) получим задачу:

$$R_{srr}+\frac{\overline{\lambda}_{n}}{r^{2}}R_{s}+\mu R_{s}=0,\ 0<r<1, \tag{23}$$

$$R_{s}(1)=0,\ |R_{s}(0)|<\infty, \tag{24}$$

$$T_{stt}-\mu t^{p}T_{s}(t)=a_{ns}(t),\ 0<t<\alpha, \tag{25}$$

$$T_{s}(0)=0,\ T_{st}(0)=0. \tag{26}$$

Ограниченным решением задачи (23), (24) является ([7])

$$R_{s}(r)=\sqrt{r}J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \tag{27}$$

где $\nu=\dfrac{n+(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ – нули функции Бесселя первого рода, $\mu=\mu_{s,n}^{2}$.

Задача (25), (26) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $T_{s,n}(t)$ [Бицадзе, 1981]

$$T_{s,n}(t)-\mu_{s,n}^{2}\int_{0}^{t}(t-\xi)\xi^{p}T_{s,n}(\xi)d\xi=\int_{0}^{t}(t-\xi)a_{ns}(\xi)d\xi, \tag{28}$$

которое имеет – и притом единственное – решение.

Подставляя (27) в (22), получим:

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}_{n}^{k}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^{k}(t)J_{\nu}(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\tau}_{n}^{k}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^{k}J_{\nu}(\mu_{s,n}r),$$
$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\nu}_{n}^{k}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{ns}^{k}J_{\nu}(\mu_{s,n}r),\ 0<r<1. \tag{29}$$

Ряды (29) разложены в ряды Фурье-Бесселя ([9]), если

$$a_{ns}^{k}(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_{0}^{1}\sqrt{\xi}\tilde{f}_{n}^{k}(\xi,t)J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{30}$$

$$b_{ns}^{k}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_{0}^{1}\sqrt{\xi}\tilde{\tau}_{n}^{k}(\xi)J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\ e_{ns}^{k}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_{0}^{1}\sqrt{\xi}\tilde{\nu}_{n}^{k}(\xi)J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{31}$$

где $\mu_{s,n}s=1,2,...$ – положительные нули функции Бесселя $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (27), (28) получим решение задачи (17), (18) в виде

$$\vartheta_{1n}^{k}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \tag{32}$$

где $a_{ns}^{k}(t)$ определяется из (30).

Далее, подставляя (27) в (19), (20), с учетом (22), получим задачу:

$$V_{stt}-\mu_{s,n}^{2}t^{p}V_{s}(t)=0,\ 0<t<\alpha,$$

$$V_{s}(0)=b_{ns}^{k},\ V_{st}(0)=e_{ns}^{k},$$

в которой, произведя замену переменных

$$T_s(t) = V_s(t) - b_{ns}^k - te_{ns}^k, \tag{33}$$

приходим к следующей задаче:

$$T_{stt} - \mu_{s,n}^2 t^p T_s(t) = q_{ns}^k(t), \tag{34}$$

$$T_s(0) = 0,\ T_{st}(0) = 0,$$
$$q_{ns}^k(t) = \mu_{s,n}^2 t^p (b_{ns}^k + te_{ns}^k). \tag{35}$$

Задача (34),(35) сводится также к интегральному уравнению (28), где вместо $a_{ns}^k(t)$ берется $q_{ns}^k(t)$.

Из (27), (28), (33) найдем решение задачи (19), (20)

$$\vartheta_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{36}$$

где b_{ns}^k, c_{ns}^k находятся из (31).

Следовательно, сначала решив задачу (7), (11) (n=0), а затем (8) ,(11) (n=1) и т. д. найдем последовательно все $\vartheta_n^k(r,t)$ из (16), где $\vartheta_{1n}^k(r,t), \vartheta_{2n}^k(r,t)$ определяются из (32),(36), $k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots.$

Итак, в области D_α имеет место

$$\int_H \rho(\theta) Lu dH = 0. \tag{37}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0, V_0 -$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H) -$ плотна в $L_2(H)$, $T(t) \in V_1, V_1 -$ плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V, V = V_0 \otimes H \otimes V_1 -$ плотна в $L_2(D_\alpha)$ [10].

Отсюда и из (37) следует, что

$$\int_{D_\alpha} f(r,\theta,t) Lu dD_\alpha = 0,$$

$$Lu = 0,\ \forall (r,\theta,t) \in D_\alpha.$$

Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \{\psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [\vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t)]\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{38}$$

где $\vartheta_{1n}^k(r,t), \vartheta_{2n}^k(r,t)$ находятся из (32), (36).

Учитывая формулу ([9]):

$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z),$$

оценки [Тихонов, 1966], [Михлин, 1962]

$$|k_n| \le c_1 n^{m-2},\ \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n.m}^k(\theta) \right| \le c_2 n^{\frac{m}{2} - 1 + q},\ j = \overline{1,m-1}, q = 0,1,\ldots, \tag{39}$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta),\ \psi(t,\theta)$, как показывается в [4–6], что полученное решение (38) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$.

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлена.

Единственность решения задачи 1. Для этого сначала построим решение краевой задачи для уравнения (1*) с данными

$$\vartheta\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0,\ \vartheta\Big|_{s_\alpha} = 0,\ \vartheta_t\Big|_{s_\alpha} = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}_n^k(r) Y_{n.m}^k(\theta),\ k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots, \tag{40}$$

где $\bar{v}_n^k(r) \in G$, G – множество функции $v(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [10].

Решение задачи (1*), (40) будем искать в виде (5), где функции $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда аналогично п. 2 функции $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений (7)–(9), где $\tilde{a}_{in}^k, a_{in}^k, \tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde{a}_{in}^k, -a_{in}^k, -\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k$, $i=1,...,m$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...$.

Далее, из краевого условия (40), в силу (5), получим:

$$\bar{\vartheta}_n^k(1,t)=0, \bar{\vartheta}_n^k(r,\alpha)=0, \bar{\vartheta}_{nt}^k(r,\alpha)=\bar{v}_n^k(r),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,.... \tag{41}$$

Как раннее замечено, каждое уравнение системы (7)–(9) представимо в виде (10). Как в п. 2, нетрудно показать, что задача (10),(41) имеет также единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1*), (40) в виде ряда (38) построено, которая в силу оценок (39), принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$.

Из определения сопряженных операторов L, L^* ([Смирнов, 1981])

$$\vartheta Lu - uL^*\vartheta = -\vartheta P(u) + uP(\vartheta) - u\vartheta Q,$$

где

$$P(u) = t^p \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos(N^\perp, x_i) - u_t \cos(N^\perp, t),$$

$$Q = \sum_{i=1}^m a_i \cos(N^\perp, x_i) - b\cos(N^\perp, t),$$

а $N^\perp$ – внутренняя нормаль к границе ∂D_α, по формуле Грина имеем:

$$\int_{D_\alpha} (\vartheta Lu - uL^*\vartheta) dD_\alpha = \int_{\partial D_\alpha} [(\vartheta \frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial \vartheta}{\partial N})M + u\vartheta Q]ds, \tag{42}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = t^p \sum_1^m \cos(N^\perp, x_i) - \cos(N^\perp, t)\frac{\partial}{\partial t}, M^2 = t^{2p}\sum_{i=1}^m \cos^2(N^\perp, x_i) + \cos^2(N^\perp, t).$$

Из (42), принимая во внимание однородные условия (2) и условия (40), получим:

$$\int_{S_\alpha} v(r,\theta) u(r,\theta,\alpha) ds = 0. \tag{43}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{v}_n^k(r) Y_{n.m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_\alpha)$ [Колмогоров, 1976], то из (43) заключаем, что $u(r,\theta,\alpha)=0$, $\forall (r,\theta) \in S_\alpha$.

Таким образом, мы приходим к задаче Дирихле:

$$Lu = 0,\ u\big|_{S_0} = 0,\ u\big|_{\Gamma_\alpha} = 0,\ u\big|_{S_\alpha} = 0,$$

которая имеет нулевое решение ([Берс, 1966]).

Следовательно, единственность решения задачи 1 установлена.

Теорема доказана.

Заключение

В работе показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи в цилиндрической области для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений.

Список литературы
References

1.Алдашев С.А. 1998. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений. Дифференц. уравнения, т. 34, № 1: 64–68.

Aldashev S.A. 1998. O zadachah Darbu dlya odnogo klassa mnogomernyih giperbolicheskih uravneniy [On Darboux problems for a class of multidimensional hyperbolic equations]. Differents. uravneniya, v. 34, № 1: 64–68.

2.Алдашев С.А. 1994. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, Гылым, 170 с.

Aldashev S.A. 1994. Kraevyie zadachi dlya mnogomernyih giperbolicheskih i smeshannyih uravneniy. [Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations] Almatyi, Gyilyim, 170 p.

3.Алдашев С.А. 2005. Критерий существования собственных функций спектральной задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. Дифференц. уравнения, т. 41, № 6 : 795–801.

Aldashev S.A. 2005. Kriteriy suschestvovaniya sobstvennyih funktsiy spektralnoy zadachi Darbu-Prottera dlya vyirozhdayuschihsya mnogomernyih giperbolicheskih uravneniy [A criterion for the existence of eigenfunctions of the Darboux-Protter spectral problem for degenerate multidimensional hyperbolic equations]. Differents.uravneniya, v. 41, № 6: 795–801.

4.Барановский Ф.Т. 1958. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости. Ученые записки Ленингр. Пед. Института, т. 183: 23–58.

Baranovskiy F.T. 1958. Smeshannaya zadacha dlya lineynogo giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka, vyirozhdayuschegosya na nachalnoy ploskosti. [Mixed problem for a linear second order hyperbolic equation that degenerates on the initial plane]. Uchenyie zapiski Leningr. Ped. Instituta, т. 183: 23–58.

5.Бицадзе А.В. 1981. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука. 448 с.

Bitsadze A.V. 1981. Nekotoryie klassyi uravneniy v chastnyih proizvodnyih [Some classes of partial differential equations]. M., Nauka Publ. 448 p.

6.Бейтмен Г., Эрдейн А. 1974. Высшие трансцендентные функции, т. 2, М., Наука, 295 с.

Beytmen G., Erdeyn A. 1974. Vyisshie transtsendentnyie funktsii [Higher transcendental functions], t. 2,M., Nauka Publ, 295 p.

7.Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. 1966. Уравнения с частными производными. М., Мир.

Bers L., Dzhon F., Shehter M. 1966. Uravneniya s chastnyimi proizvodnyimi [Partial differential equations]. M., Mir Publ.

8.Краснов М.Л. 1959. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. Матем. сб., т. 49(91): 29–84.

Krasnov M.L. 1959. Smeshannyie kraevyie zadachi dlya vyirozhdayuschihsya lineynyih giperbolicheskih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka [Mixed boundary value problems for degenerate second-order linear hyperbolic differential equations]. Matem.sb., v. 49(91): 29–84.

9.Камке Э. 1965. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 703 с.

Kamke E. 1965. Spravochnik po obyiknovennyim differentsialnyim uravneniyam [Handbook of ordinary differential equations]. M., Nauka Publ, 703 p.

10.Колмогоров А.Н., Фомин С.В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 543 с.

Kolmogorov A.N., Fomin S.V. 1976. Elementyi teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M., Nauka Publ, 543 p.

11.Михлин С.Г. 1962. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 254 с.

Mihlin S.G. 1962. Mnogomernyie singulyarnyie integralyi i integralnyie uravneniya [+ Multidimensional singular integrals and integral equations]. M., Fizmatgiz, 254 p.

12.Смирнов В.И. 1981. Курс высшей математики. Т.4, г. 2, М., Наука, 550 с.

Smirnov V.I. 1981. Kurs vyisshey matematiki [Higher mathematics course]. T. 4, g. 2, M., Nauka Publ, 550 p.

13.Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1966. Уравнения математической физики. М., Наука, 724 с.

Tihonov A.N., Samarskiy A.A. 1966. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. M., Nauka Publ, 724 p.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Алдашев С.А. 2019. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2): 174–182. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-174-182.

Aldashev S.A. 2019. The correctness of a mixed problem for one class of degenerated multidimensional elliptic equations. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 174–182 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-174-182.