



УДК 533.6.011

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-203-216

**И. НЬЮТОН И А.Н. КРЫЛОВ: АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА**  
**I. NEWTON AND A.N. KRYLOV: AERODYNAMICAL PROBLEM****В.И. Ванько****V.I. Vanko**Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана  
Россия 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1Bauman Moscow State Technical University  
5 building 1, Second Baumanskaya St., Moscow, 105005, Russia

E-mail: vvanko@mail.ru

**Аннотация**

Излагается вариационная постановка и решение задачи Ньютона о поиске формы тела вращения наименьшего лобового сопротивления. Выводятся: закон сопротивления Ньютона (пропорциональность силы сопротивления квадрату скорости); формула силы сопротивления движущемуся в среде телу; ставится и решается соответствующая вариационная задача. Подчёркивается выдающаяся роль акад. А.Н. Крылова в современном решении задачи. Излагаются результаты автора: алгебраическое доказательство единственности решения; выведено достаточное условие единственности решения задачи в виде ограничения на выбор габаритов (линейных размеров) проектируемого летательного аппарата. Отмечается вклад отечественных учёных в разработку теории летательных аппаратов, формы которых оптимальны по волновому сопротивлению (рассматриваются большие сверхзвуковые скорости движения летательного аппарата).

**Abstract**

This article is devoted to two anniversaries taking place in 2008: 375 and 155 the day of birth of Isaak Newton and from the day of birth of academician A.N. Krylov. A. Krylov (prominent shipbuilder and applied mathematician) in Russian translated a book "The mathematical principles of natural philosophy" the first in Russian language and made clear the comments "dark" places of text. After a book became accessible to the native researchers. The drag's law (proportionally to square motion's velocity) is concluded; the formula of resistance force to moving body is obtained; the overall dimensions of the least drag's straight truncated cone is determined; the boundary conditions are discussed; the presence platform bow's is based. The variational task about the rotational body with the least drag is formulated and solved. The outstanding role of academician A. Krylov in the modern variational solution problem is emphasized. The author's results are presented: an algebraic investigation of existence and uniqueness the Newton's problem solution; example of the bow section's design of the least drag. The sufficient condition solution uniqueness as a limitation for the dimensions of bow is received. The native scientists contribution to the development of the optimal forms vehicles is marked: the problem about minimization wave resistance for flying apparatus is solved.

**Ключевые слова:** лобовое сопротивление, минимизация, тело вращения, задача Ньютона, существование и единственность решения.

**Keywords:** drag, minimization, revolution body, Newton's problem, existence and uniqueness of solution.

**Введение**

Работа посвящена двум юбилеям, состоявшимся в 2018 году: 375 лет со дня рождения И. Ньютона и 155 лет со дня рождения академика А.Н. Крылова.

В 1687 г. вышел в свет исторический труд сэра Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии». В России книга впервые была опубликована в



«Известиях Николаевской морской академии» в переводе с латыни «с пояснениями и примечаниями Флота Генерала А.Н. Крылова, заслуженного профессора академии, ординарного академика Императорской академии наук» [Крылов., 1914].

В разделе 7 (Книга II) «О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел» Ньютон решает задачу о сопротивлении движению шара и длинного круглого цилиндра равных диаметров в «редкой» среде (модель идеального газа или слабо сопротивляющейся жидкости); затем исследует движение усеченного конуса в той же среде и ставит задачу о нахождении формы тела вращения, испытывающего наименьшее сопротивление при своем движении [Ньютон, 1687].

Без каких-либо пояснений Ньютон приводит геометрическое решение последней задачи, рис. 1: «Когда же кривая  $DNFG$  будет такова, что, если из любой ее точки  $N$  опустить на ось  $AB$  перпендикуляр  $NM$  и из конечной точки  $G$  провести прямую  $GP$  параллельно касательной  $N\tau$ , построенной к кривой в точке  $N$ , то имеет место пропорция:

$$MN : GP = GP^3 : (4BP \cdot GB^2) .» \quad (1)$$

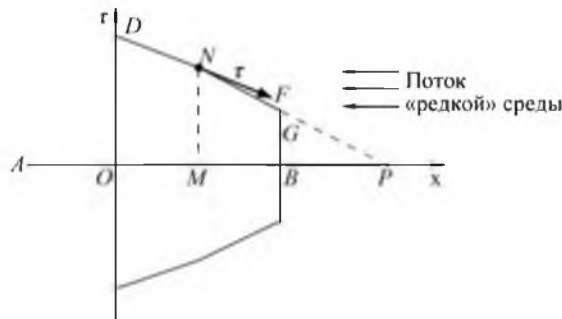


Рис. 1. Чертёж из книги «Математические начала натуральной философии»

Fig. 1. Drawing out of «Mathematical principles of natural philosophy»

### Вывод закона сопротивления среды

Постановка задачи о теле вращения наименьшего сопротивления зависит от закона сопротивления среды. Ньютон представлял себе «редкую среду» состоящей из неподвижных равномерно распределенных в ней абсолютно упругих шариков массой  $m$  (поэтому и назвал среду редкой).

Пусть тело вращения (вокруг оси  $Ox$ ) движется со скоростью  $v$  ( $|v| = \text{const}$ ) в ньютоновской среде и сталкивается с расположенными в среде шариками рис. 2, [Алексеев и др., 1979]:

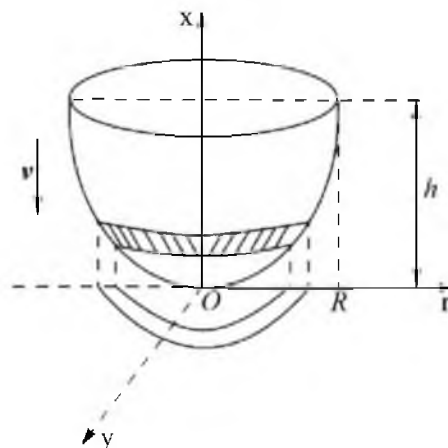


Рис. 2. Вывод закона сопротивления «редкой» среды  
Fig. 2. The conclusion of «sparse» environment's resistance



Дифференциальный элемент  $dr$  на оси  $Or$  при вращении вокруг оси  $Ox$  «заметёт» площадь

$$d\sigma = 2\pi r dr.$$

Этому кольцу, принадлежащему плоскости  $rOy$ , на поверхности движущегося тела соответствует поясok площадью  $d\Sigma$ . За время  $dt$  поясok  $d\Sigma$  «вытеснит» объем

$$dV = 2\pi r dr (v dt). \tag{2}$$

Пусть  $\rho$  – плотность среды. Тогда количество частиц, встретившихся на пути пояска  $d\Sigma$

$$N = \frac{\rho dV}{m}. \tag{3}$$

Вычисляем импульс, действующий на  $d\Sigma$  (за время  $dt$ ). Пусть элемент  $ds$  дуги меридиана поверхности вращения наклонен к оси  $Or$  под углом  $\varphi$ . Отражаясь от точек пояска  $d\Sigma$  (при этом угол падения равен углу отражения), каждая частица массы  $m$  получит приращение количества движения

$$m(v_2 - v_1) = 2mvn \cos \varphi, \tag{4}$$

где  $|v_1| = |v_2|$ ;  $\varphi = \arctg \frac{dx}{dr}$  – угол  $ds$  с осью  $Or$ ;  $n$  – единичная нормаль к элементу поверхности. В уравнении (4) столкновения шариков с движущимся телом – абсолютно упругие.

В силу третьего закона Ньютона, от столкновения с одной частицей тело подвергнется действию импульса

$$dJ = -2mvn \cos \varphi,$$

за время  $dt$  таких импульсов будет  $N$ , причем за счет осевой симметрии компонента суммарного импульса  $J_r$  (по оси  $Or$ ) равна нулю, а  $J_X$  вычисляется в силу (2) и (3) как

$$|J_X| = (Nm2v \cos \varphi) \cos \varphi = 4\rho\pi v^2 \cos^2 \varphi r dr dt.$$

Отсюда получаем составляющую по оси  $Ox$  силы противодействия движению тела:

$$\begin{aligned} dF dt = J_X &\Rightarrow dF = \frac{J_X}{dt} \Rightarrow \\ dF &= (4\pi\rho v^2) \cos^2 \varphi r dr \Rightarrow \\ F &= 4\pi\rho v^2 \int_0^R \cos^2 \varphi r dr = K \int_0^R \frac{r dr}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = K \int_0^R \frac{r dr}{1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Необходимо определить уравнение такой кривой  $x = x(r)$ , чтобы сила сопротивления  $F$  была бы минимальной.

### Постановка и решение задачи

Прежде чем решить проблему минимизации функционала (5), рассмотрим вспомогательную задачу: среди всех усеченных конусов, построенных на данном основании  $AC$  радиуса  $R$  и на данной высоте  $h$ , найти конус (т. е. определить радиус меньшего основания) с наименьшим сопротивлением движению (рис. 3).

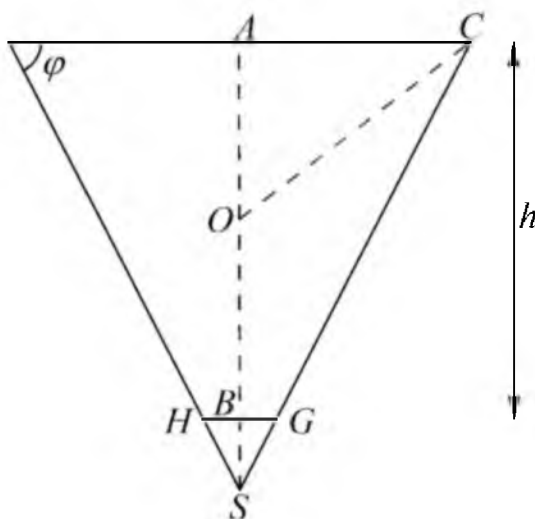


Рис. 3. Построение конуса наименьшего лобового сопротивления  
Fig. 3. The cone's of the least drag construction

Иными словами: построить прямой конус (т. е. при заданном радиусе основания  $R$  найти высоту  $AS=H$ ), усечением которого на высоте  $h$  получим конус с наименьшим сопротивлением.

Ньютон (без объяснений) дает способ построения искомого конуса: поделим отрезок  $AB=h$  пополам точкой  $O$ , найдем гипотенузу  $\triangle ACO$

$$CO = \sqrt{R^2 + (h/2)^2}$$

и отрезок  $CO$  отложим от точки  $O$  вдоль оси  $AB$ :

$$AS = H = \frac{h}{2} + \sqrt{R^2 + (h/2)^2}.$$

Таким образом, построим конус  $ACS$ , который необходимо «усечь» на высоте  $h$ .

Приводим решение А.Н. Крылова, данное в его комментариях к «Математическим началам».

Введем вспомогательный параметр  $\xi$ :  $H = h + \xi$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(h + \xi)}{R}, \quad r_0 = BG = \frac{\xi R}{(h + \xi)}.$$

Сила сопротивления среды, действующая на усеченный конус, есть сумма сопротивления  $F_1$  носовой части  $GH$  и сопротивления  $F_2$  боковой поверхности:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = 4\pi\rho v^2 \left( \int_0^{r_0} r \, dr + \int_{r_0}^R \frac{r \, dr}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right) = \\ &= 2\pi\rho v^2 \left( \frac{\xi^2 R^2}{(h + \xi)^2} \left( 1 - \frac{R^2}{R^2 + (h + \xi)^2} \right) + \frac{R^4}{R^2 + (h + \xi)^2} \right) = \\ &= 2\pi\rho v^2 R^2 \frac{\xi^2 + R^2}{R^2 + (h + \xi)^2} \equiv F(\xi). \end{aligned}$$

Находим стационарную точку:

$$F'(\xi) = 0 \Rightarrow \xi^2 + h\xi - R^2 = 0 \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 + 4R^2}}{2}.$$

Берем положительный корень:

$$\xi = -\frac{h}{2} + \sqrt{R^2 + (h/2)^2},$$

получаем высоту конуса  $ACS$ , предложенную Ньютоном

$$H = h + \xi = \frac{h}{2} + \sqrt{R^2 + (h/2)^2}.$$

Рассмотрим малую секцию усеченного конуса:

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow R \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{R} \rightarrow 1,$$

т. е. образующая усеченного конуса пересекает меньшее основание под углом  $135^\circ$ .

Отсюда Ньютон делает важный вывод, рис. 4: «Если тело образуется обращением эллипса или овала  $ADBE$  около оси  $AB$ , и к производящей кривой проводятся касательные  $FG, GH, HJ$  в точках  $F, B, J$  так, что  $GH \perp AB$  в точке касания, другие же касательные  $FG$  и  $HJ$  составляют с  $GH$  углы  $FGB$  и  $JHB$ , равные  $135^\circ$ , то тело, образуемое обращением фигуры  $ADFGHJE$  около той же оси  $AB$ , будет испытывать меньшее сопротивление, нежели первоначальное (т. е. тело, образованное вращением овала), при движении вдоль оси точкою  $B$  вперед.

Я считаю, что это предложение может быть бесполезно при построении судов».

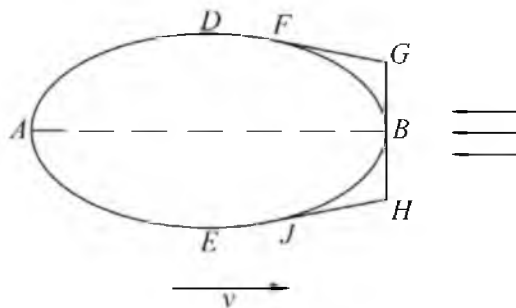


Рис. 4. Сечение тела вращения наименьшего лобового сопротивления  
Fig. 4. The section of the least drag rotational body's

**Пример.** Проектируем носовую секцию некоторого аппарата, головная часть которого должна быть получена вращением параболы  $x = r^n$  вокруг оси  $Bx$ , рис. 5, [Ванько В.И. и др. 2018].

На каждой полуветви производящей кривой находим точки  $F, J$ , проведенные касательные из которых под углом  $45^\circ$  пересекают ось  $Bx$ . Тогда координаты точек  $F, J$  равны

$$\left( \pm \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right) \Rightarrow BG = r_0 = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$



Вычисляем силы сопротивления и объемы тел, образованных вращением параболы  $FBJ$  ( $F_1$  и  $Q_1$  соответственно) и вращением ломаной  $FGBHJ$  ( $F_2$  и  $Q_2$ ).

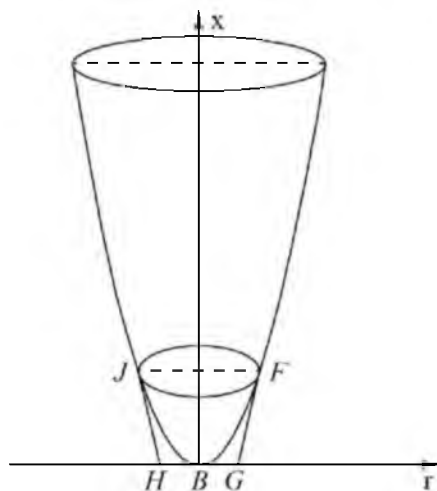


Рис. 5. Проектирование носовой части  
Fig. 5. The bow's design

Сравнительные значения величин приведены в табл. 1 – силы сопротивления даны в условных силовых единицах, объемы в некоторых кубических единицах длины.

Таблица 1  
Table 1

Сравнительные величины сил лобового сопротивления и объёмов носовых частей  
The drags and volumes of nasal parts comparative sizes

Парабола	$F_1$	$Q_1$	$F_2$	$Q_2$	$(F_1 - F_2) / F_1 \times 100\%$	$(Q_1 - Q_2) / Q_1 \times 100\%$
$x = r^2$	0,0866	0,0982	0,0781	0,1145	9,81	16,4
$x =  r ^3$	0,1309	0,1209	0,1204	0,1418	8	17,28

Отмечаем в обоих случаях уменьшение силы сопротивления и увеличение полезного объема носовых секций.

Из (5) получаем экстремальную задачу:

$$J[x(r)] = \int_0^R \frac{r dr}{1 + x'^2} \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$r \in [0, r_0] \Rightarrow x = 0, \quad x(R) = h,$$

кроме того, в силу замечания Ньютона, имеем  $x'(r_0) = 1$ .

В формуле (6) интегрант функционала явно зависит от независимой переменной  $r$ , поэтому интегрировать соответствующее уравнение Эйлера весьма затруднительно.

Получим более удобную форму функционала.

Считая функцию  $x = x(r)$  монотонно возрастающей, обратим зависимость

$$x = x(r) \Rightarrow r = r(x) \Rightarrow dr = r' dx.$$

Тогда

$$\int_0^R \frac{r dr}{1+x'^2} = \int_0^R \frac{r dr}{1+\frac{1}{(dr/dx)^2}} = \int_0^R \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 r dr}{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2} = \int_0^h \frac{r'^3 r dx}{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}.$$

Следовательно, задача ставится так:

$$J[x(r)] = \int_0^R \frac{r'^3 r dx}{1+r'^2} \rightarrow \min, \tag{7}$$

$$r(0) = r_0, \quad r(h) = R, \quad r'(0) = 1.$$

В (7) штрихом обозначаем производную по  $x$ ; далее покажем, что  $r(0) = r_0 \neq 0$ , т. е. тело вращения с минимальным сопротивлением имеет площадку в носовой части. Это соответствует чертежу Ньютона, рис. 1.

*Замечание.* В комментариях А.Н. Крылова к задаче Ньютона показано, что геометрическое условие (1) есть геометрическая интерпретация уравнения Эйлера вариационной задачи (7).

Решаем задачу (7). Интегрант преобразованного функционала явно не содержит независимой переменной, в данном случае  $x$ . Поэтому сразу выписываем первый интеграл (обозначив интегрант через  $f$ ):

$$\begin{aligned} r'f_{r'} - f &= C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r' \left( \frac{r r'^3}{1+r'^2} \right)'_{r'} - \frac{r'^3 r}{1+r'^2} &= C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2r'^3 r}{(1+r'^2)} &= C_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение I порядка (8) интегрируем методом введения параметра [Степанов, 1959]:

$$\begin{aligned} r' = p \Rightarrow \frac{2p^3 r}{(1+p^2)^2} &= C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r = C_1 \frac{(1+p^2)^2}{2p^3}. \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx} = p \Rightarrow d \left( C_1 \frac{(1+p^2)^2}{2p^3} \right) &= p dx \Rightarrow \\ \int dx = \frac{C_1}{2} \int \left( \frac{1}{p} - 2 \frac{1}{p^3} - 3 \frac{1}{p^5} \right) dp &\Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{C_1}{2} \left( \ln p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{p^4} \right) + C_2. \end{aligned}$$



Итак, выведены параметрические уравнения искомым экстремалей (образующих поверхности вращения):

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{2} \left( \ln p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{p^4} \right) + C_2, \\ r = \frac{C_1}{2} \frac{(1+p^2)^2}{p^3}. \end{cases} \quad (9)$$

*Замечание.* Параметрическое представление экстремалей задачи (9) впервые получено А.Н. Крыловым в его комментариях к “Математическим началам”, причем

$$C_1 = \frac{r_0}{2}.$$

Отметим, что аналогичные (9) соотношения получены также в книге [Лаврентьев, Люстерник, 1935].

Известно решение задачи Ньютона, полученное с применением теории оптимального управления (во введенных обозначениях, см. (5)), [Алексеев и др., 1979]:

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{r \, dr}{1+u^2} &\rightarrow \inf, \\ \frac{dx}{dr} &= u, \\ x(0) = 0, \quad x(R) &= h, \\ u &\in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Решение получено также в параметрической форме через параметр  $u = -1/p$  ( $p$  – использованный в данной статье параметр).

Отметим, что представления решений в виде (9) и в цитированных работах совпадают с точностью до обозначения параметров и постоянных.

Пусть начальное значение параметра  $p = p_0 > 0$ . Тогда из второго соотношения (9) получим  $r(p_0) \neq 0$ . В противном случае:  $r(p_0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ , и из первого соотношения (9) получим  $x = C_2$ , т. е. кривая  $x = x(r)$  вырождается в отрезок, параллельный оси  $Ox$ , и при этом нарушается условие взаимной однозначности зависимости  $x \sim r$ .

Исследуем кривые семейства (9). Рассмотрим кривую при  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 0$ ; остальные кривые семейства при любых  $C_1, C_2 \neq 0$  получаются из этой кривой ( $C_1 = 2, C_2 = 0$ ) подобным преобразованием с центром в точке, принятой за начало координат, с коэффициентом подобия  $C_1$  и сдвигом на расстояние  $C_2$ .

Получили кривую Ньютона:

$$\begin{cases} x = \ln p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{p^4}, \\ r = \frac{1}{p^3} + \frac{2}{p} + p. \end{cases} \quad (10)$$

Исследуем поведение кривой (10) на плоскости  $xOr$ . При  $p \rightarrow +0$ :  $r \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ; при  $p \rightarrow +\infty$ :  $r \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .



Поэтому при некотором значении параметра  $p = p^*$  функции  $x(p)$  и  $r(p)$  достигают своих минимальных значений. Найдем стационарные точки ( $p > 0$ ):

$$\frac{dx}{dp} = \frac{p^4 - 2p^2 - 3}{p^5} = 0 \Rightarrow p^4 - 2p^2 - 3 = 0;$$

$$\frac{dr}{dp} = \frac{p^4 - 2p^2 - 3}{p^5} = 0 \Rightarrow p^4 - 2p^2 - 3 = 0.$$

В обоих случаях получили одно и то же биквадратное уравнение, единственный корень которого, удовлетворяющий условию  $p > 0$ , есть  $p^* = \sqrt{3}$ .

Для кривой (10), двумя ветвями уходящей в бесконечность, точка с координатами  $(r(p^*), x(p^*))$  есть точка возврата, рис. 6 [Рашевский, 1950].

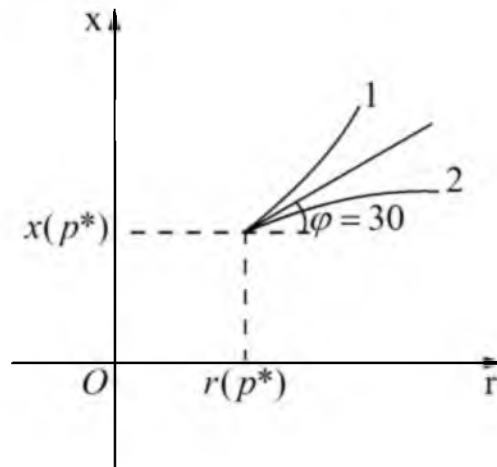


Рис. 6. Кривая Ньютона  
Fig. 6. The Newton's curvature

Итак, при  $p \rightarrow \sqrt{3}$  функции  $r(p)$ ,  $x(p)$  стремятся к своим минимальным значениям:

$$p \in (0, \sqrt{3}]: p \rightarrow \sqrt{3} \Rightarrow r \rightarrow r(p^*), x \rightarrow x(p^*) \text{ – по 1-й ветви;}$$

$$p \in [\sqrt{3}, +\infty): p \rightarrow +\infty \Rightarrow r, x \rightarrow +\infty \text{ – по 2-й ветви.}$$

Покажем, что минимальное значение функционала обеспечивается 1-й ветвью кривой Ньютона:  $p \in (0, \sqrt{3}]$ . Проверяем выполнение усиленного условия Лежандра [Ванько В.И. и др.]:

$$f(x, r, r') = \frac{r'^3 r}{1 + r'^2} \Rightarrow f''_{r'r'} = \frac{2r'r}{(1 + r'^2)^3} (3 - r'^2) > 0, \quad (11)$$

так как  $r, r' > 0$ .

Из неравенства (11) получаем ограничения на изменение параметра  $p$ :  $0 < p < \sqrt{3}$ .

Тангенс угла наклона касательной кривой (10) к оси  $Ox$  выражается в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dr} = \frac{1}{p}.$$



Отметим, что в точке возврата для обеих ветвей

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Так как при  $p \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$ , на 1-й ветви существует точка  $(\tilde{r}, \tilde{x})$ , где  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ , т. е.  $\varphi = 45^\circ$ :  $(\tilde{r}, \tilde{x}) = \left(4, \frac{7}{4}\right)$ , ибо здесь  $\tilde{p} = 1$ .

Теперь приведем слова Ньютона: «...из конечной точки  $G$  проведем прямую  $GP$ ... то имеет место пропорция...», см. (1).

Точка  $G$  на оси  $Og$  должна быть задана при постановке задачи:  $r = r(x) \Rightarrow r(0) = r_0$ , что будет показано далее.

Поэтому, на наш взгляд, задача Ньютона изначально ставилась следующим образом: на оси  $Og$  задавался отрезок  $BG = r_0$  и кривая  $(x(p), r(p))$  строилась так, чтобы точка  $G$  была бы точкой кривой, где касательная образует с осью  $Og$  угол  $45^\circ$  (см. вспомогательную задачу о конусе наименьшего сопротивления).

Итак, пусть  $r(p_0) = r(1) = r_0$ ,  $x(1) = 0$ . Тогда из параметрических соотношений (9) получаем значения постоянных интегрирования:

$$C_1 = \frac{r_0}{2}, \quad C_2 = -\frac{7}{16}r_0.$$

Следовательно, решение задачи имеет вид:

$$\begin{cases} r = \frac{r_0}{4} \frac{(1+p^2)^2}{p^3}, \\ x = \frac{r_0}{4} \left( \ln p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{p^4} \right) - \frac{7}{16}r_0. \end{cases} \quad (12)$$

### Существование и единственность решения

Рассмотрим различные конструктивные требования.

Прежде всего, отметим, что задавать произвольно габариты  $R, h, r_0$ , вообще говоря, нельзя.

Например, пусть  $R = 50$ ,  $r_0 = 16$ ,  $h = 57$  некоторых единиц длины. Из первого уравнения системы (12) прямой подстановкой убеждаемся в том, что  $p = 1/2$  есть одно из его решений. Второе уравнение системы (12) после подстановки значений  $x = h = 57$ ,  $r_0 = 16$  и  $p = 1/2$  приведет к противоречию:  $\ln 1/2 = 0$ .

Покажем, что задание габаритов  $R$  и  $h$  (совместно с условием  $x'(r_0) = 1$ ) определяет единственное решение задачи (7). Из уравнений (12) исключаем  $r_0$  и, вводя параметр  $\omega = h/R$ , получаем уравнение

$$p^4 \ln p = \frac{7}{4}p^4 - p^2 - \frac{3}{4} + \omega(p^5 + 2p^3 + p), \quad (0 < p < 1). \quad (13)$$

Обозначив через  $\varphi_1(p)$  и  $\varphi_2(p)$  левую и правую части уравнения (13), имеем  $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ .

Решения уравнения (13) есть абсциссы точек пересечения графиков функций  $y = \varphi_1(p)$  и  $y = \varphi_2(p)$  на плоскости  $pOy$ .

Функция  $y = p^4 \ln p$  на интервале  $(0, 1)$  корней не имеет:  $y \leq 0, p \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow +0, y(1) = 0$ .

Исследование многочлена пятой степени  $\varphi_2(p)$  в силу теоремы Бюдана – Фурье (построением таблицы перемен знаков функции  $\varphi_2(p)$  и ее производных до пятого порядка включительно в точках  $p = 0$  и  $p = 1$ ) показывает, что многочлен имеет на интервале  $(0, 1]$  один или три корня [Курощ, 1953]. Один корень заведомо существует, так как  $\varphi_2(0) = -3/4, \varphi_2(1) = 4\omega > 0$ , и графики многочленов хотя бы один раз пересекаются. Вычислим производную многочлена  $\varphi_2(p)$ :

$$d\varphi_2/dp = 5\omega p^4 + 7p^3 + 6\omega p^2 + (\omega - 2p). \tag{14}$$

Достаточным условием строгой положительности производной на этом отрезке является положительность последнего слагаемого в формуле (14):

$$\omega - 2p > 0 \rightarrow \omega > 2p,$$

и, так как наибольшее значение параметра  $p = 1$  (на отрезке  $(0, 1]$ ), получим окончательно  $\omega > 2$ , т. е. габариты головной части проектируемого аппарата должны отвечать условию:

$$h > 2R. \tag{15}$$

Покажем, что любому значению параметра  $\omega = h/R > 0$  соответствует единственное значение  $p \in (0, 1)$ .

Разрешив (13) относительно  $\omega$ , получим

$$\omega = \frac{p^4 \ln p + p^2 - \frac{7}{4}p^4 + \frac{3}{4}}{p^5 + 2p^3 + p}$$

$$\omega = \omega(p): p \rightarrow +0 \Rightarrow \omega(p) \rightarrow \infty, \omega(1) = 0.$$

Анализ значений производной функции  $\omega(p)$  на полуинтервале  $(0, 1]$  показывает, что  $\omega'(p) < 0$ , т. е. функция  $\omega(p)$  на этом отрезке монотонно убывает, рис. 7.

Пусть дано отношение габаритов  $h/R = \omega_0$ . На кривой  $\omega = \omega(p)$  находим соответствующее значение  $p = p_0$ . Чтобы определить значение  $r_0$ , необходимо задать в некоторых единицах длины, например, габарит  $R$ . Тогда  $h = \omega_0 R$  и значение  $r_0$  (в тех же единицах) определяется из любого из уравнений (13).

*Замечания.* 1. Рассуждения, изложенные выше, можно рассматривать как доказательство существования поля экстремалей в области  $x > 0, r > 0$ .

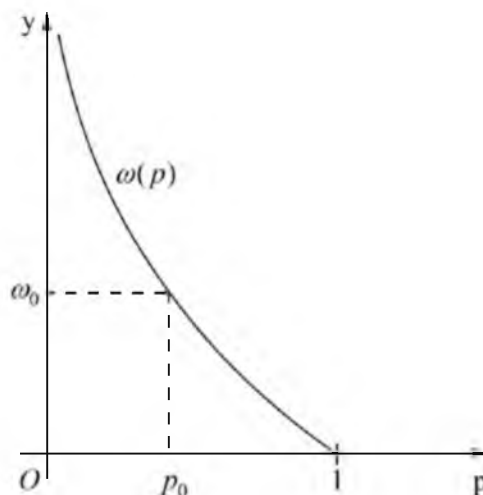


Рис. 7. Поведение функции  $\omega(p)$

Fig. 7. A function  $y = \omega(p)$



2. С помощью анализа Бюдана – Фурье доказывается единственность решения задачи (7) при задании габаритов  $r_0$ ,  $R$  или  $r_0$ ,  $h$ .

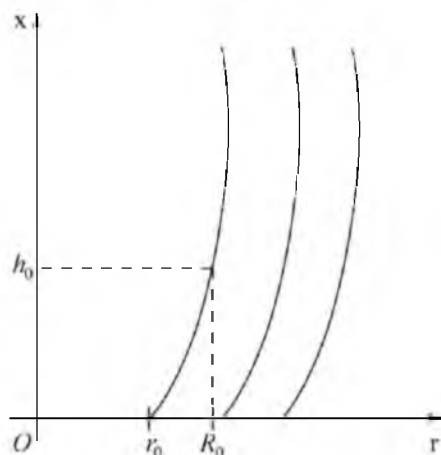


Рис. 8. Выбор габаритов головной части  
Fig. 8. The selection bow's

Последние утверждения очевидны, если встать на геометрическую точку зрения: задание габарита  $r_0$  определяет единственную кривую (10); на этой кривой габарит  $r = R$  определяет единственное значение  $x = h$  (и наоборот) (рис. 8).

3. Рассмотрим решение задачи Ньютона в упрощенной постановке [Краснов и др., 1973].

Поставим задачу (см. (7)):

$$J = \int_0^h \frac{r'^3 r}{1 + r'^2} dx \rightarrow \min, r(0) = 0, r(h) = R.$$

Считая, что  $\frac{1}{1 + r'^2} \approx 1$  (т. е. рассматриваются «пологие» образующие поверхности вращения), получим:

$$J = \int_0^h r'^3 r dx \rightarrow \min, r(0) = 0, r(h) = R.$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$r'^3 - 3(rr'^2)' = 0, \quad (17)$$

следовательно, частное решение  $r = 0$  неприемлемо в силу поставленных краевых условий.

Уравнение (17) приводится к виду:

$$r'^3 + 3rr'r'' = 0. \quad (18)$$

Умножив (18) на  $r'$ , заметим, что полученное выражение есть полная производная:

$$\begin{aligned} r'(r'^3 + 3rr'r'') &= \frac{d}{dx}(r'^3 r) = 0 \Rightarrow r'^3 r = C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r' &= \left(\frac{C_1}{r}\right)^{1/3} \Rightarrow r(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/4} \left(\sqrt[3]{C_1} x + C_2\right)^{3/4}. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу граничных условий, из (19):  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = \left(\frac{3R}{4h}\right)^3 R$ .

Таким образом,  $r = R(x/h)^{3/4}$ , т. е. поверхность минимального сопротивления в рассматриваемой постановке есть парабола степени  $3/4$ .

Обратим внимание на то, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dr}{dx} = \infty,$$

т. е. соответствующая поверхность вращения в носовой части имеет затупление.

Очевидно, что экстремали задачи образуют поле и выполняется усиленное условие Лежандра.

### Заключение

Задача о проектировании тела наименьшего сопротивления в сплошной среде, поставленная и решённая Ньютоном относительно минимизации лобового сопротивления, получила в XX веке значительное развитие в трудах зарубежных и отечественных учёных. Было выяснено, что наряду с лобовым сопротивлением необходимо учитывать фактор удлинения тела, влияющий на величину волнового сопротивления [Лойцянский, 1970] (эффект взаимодействия кормовой части судна или летательного аппарата с окружающей средой), что особенно ярко проявляется при больших скоростях.

Этому вопросу посвящена обширнейшая литература. Отметим лишь работы отечественных учёных (доступные читателю): ставились задачи о выборе формы тела (необязательно вращения), достаточного объёма, и его носовой части, минимального волнового сопротивления; изучалось поведение тела при больших сверхзвуковых скоростях [Чёрный, 1979; Гонор, 1963; Крайко, 1963, 1979; Шидловский, 1965; Таковицкий, 2006].

Отметим любопытный факт. В работе [Таковицкий], подводящей промежуточный итог исследований в этой области, утверждается (большие сверхзвуковые скорости): 1) наличие уплощения носовой части; 2) форма образующей кривой для тела вращения близка к параболе степени  $3/4$ , что соответствует результату, полученному в упрощённой ньютоновской постановке (см. выше).

### Список литературы

#### References

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. 1979. Оптимальное управление. М., Наука, 432 с.

Alexeev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. М., Nauka Publ, 432.

2. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. 2018. Вариационное исчисление и оптимальное управление: 4-ое издание, исправленное и дополненное. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 488 с.

Vanko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin N.G. 2018. Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie [Calculus of variations and optimal control]: 4-oe izdanie, ispravlennoe i dopolnennoe. М.: Izd-vo MG TU im. N.E. Bauman, 488.

3. Гонор А.Л. 1963. О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. Прикладная математика и механика (ПММ). XXVIII (вып. 1): 185–189.

Gonor A.L. 1963. O prostranstvennykh telakh naimen'shego soprotivleniya pri bol'shikh sverkhzvukovykh skorostyakh [On spatial bodies of least resistance at high supersonic speeds]. Prikladnaja matematika i mekhanika (PMM). XXXVIII (vyp. 1): 185–189.

4. Крайко А.Н. 1963. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана. ПММ. XXXVIII (вып. 3): 484–495.

Krajko A.N. 1963. Ob opredelenii tel minimal'nogo soprotivlenija pri ispol'zovanii zakonov Njutona i Buzemana [On the determination of bodies of minimal resistance using the laws of Newton and Buseman's resistance]. PMM. XXXVIII (vyp. 3): 484–495.



5. Крайко А.Н. 1979. Вариационные задачи газовой динамики. М., Наука, 447.  
Krajko A.N. 1979. Variatsionnye zadachi gazovoj dinamiki [Variational problems of gas dynamics]. М., Nauka Publ, 447.
6. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. 1973. Вариационное исчисление. М., Наука, 191.  
Krasnov M.L., Makarenko G.I., Kisel'ov A.I. 1973. Variatsyonnoe ischislenie [Calculus of variations]. М., Nauka Publ, 191.
7. Курош А.Г. 1953. Курс высшей алгебры. М., Гос. изд-во технико-теорет. литературы, 335.  
Kurosh A.G. 1953. Kurs vysshej algebrы [Higher algebra course]. М., Gos. Izd-vo tekhniko-teoret. literatury, 335.
8. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. 1935. Основы вариационного исчисления. Т. I, часть II. М.-Л.: Объединённое научно-техн. изд-во наркомата тяжёлой промышленности (ОНТИ НКТП), 400.  
Lavrent'ev M.A., Ljusternik L.A. 1935. Osnovy variatsionnogo ischislenija [Basics of variational calculus]. Т. I, chast II.- М.-Л.: Objedinjonnoe nauchno-tekhn. izd-vo Narkomata tjazholoj promyshlennosti (ONTI NKTP), 400.
9. Лойцянский Л.Г. 1970. Механика жидкости и газа. М., Наука, 904 с.  
Lojtsjanskij L.G. Mekhanika zhydkosti i gaza [Fluid and gas mechanics]. М., Nauka Publ, 904.
10. Ньютон И. 1687. Математические начала натуральной философии. Известия Николаевской морской академии. Петроград. 1915. Вып. 4. С. 1–276; 1916. Вып. 5. С. 1–344.  
Newton I. 1687. Matematicheskie nachala natural'noj filosofii [Mathematical beginnings of natural philosophy]. Izvestija Nikolaevskoj morskoj akademii. Petrograd. 1915. Vyp. 4. 1–276; 1916. Vyp. 5. 1–344.
11. Ньютон И. 1989. Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 687 с.  
Newton I. 1989. Matematicheskie nachala natural'noj filosofii [Mathematical beginnings of natural philosophy]. Perevod s latinskogo i commentarii A.N. Krylova. М.: Nauka Publ, 687.
12. Рашевский П.К. 1950. Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: Гос. теор. изд-во, 428.  
Rashevskij P.K. 1950. Kurs differencial'noj geometrii [Differential geometry course]. М.-Л.: Gos. Teoret. izd-vo, 428.
13. Степанов В.В. 1959. Курс дифференциальных уравнений. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 468.  
Stepanov V.V. 1959. Kurs differencial'nykh uravnenij [Course of differential equations]. М., Gos. Izd-vo fiz.-mat. literatury, 468.
14. Таковицкий С.А. 2006. Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления. Механика жидкости и газа. N 2: 157 – 162.  
Takovitckij S.A. 2006. Analiticheskoe reshenie v zadache postroenija osesymmetrichnykh nosovykh chastej minimal'nogo volnovogo soprotivlenija [Analytical solution in the problem of constructing axisymmetric bow parts of minimum wave resistance]. Mekhanika zhydkosti i gaza. N 2: 157–162.
15. Чёрный Г.Г. 1959. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 220.  
Chorny G.G. 1959. Tehenija gaza s bol'shoj sverkhzvukovoj skorost'ju [Gas flows at high supersonic speeds]. М.: Gos. izd-vo fiz.- mat. literatury, 220.
16. Шидловский В.П. 1965. Введение в динамику разреженного газа. М., Наука. 220.  
Shydlovskij V.P. 1965. Vvedenie v dinamiku razrezhennogo gaza [Introduction to sparse gas dynamics]. М., Nauka Publ, 220.

**Ссылка для цитирования статьи**  
**Reference to article**

Ванько В.И. 2019. И. Ньютон и А.Н. Крылов: аэродинамическая задача. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2): 203–216. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-203-216.

Vanko V.I. 2019. I. Newton and A.N. Krylov: aerodynamical problem. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 203–216 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-203-216.