МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.952
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-163-173

ДВУМЕРНОЕ ДЕТЕРМИНАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

TWO-DIMENSIONAL DETERMINANT DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATION

И.В. Рахмелевич
I.V. Rakhmelevich

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23

Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация
Исследован класс двумерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений специального вида. Элементы операторной матрицы представляют собой произведения линейных дифференциальных операторов, действующих по отдельным переменным. Доказаны теоремы о решениях однородных и неоднородных детерминантных уравнений, в частности, теорема о взаимосвязи решений однородного детерминантного уравнения и некоторого вспомогательного линейного дифференциально-операторного уравнения. Найдены семейства решений, выражающихся через собственные функции линейных операторов, входящих в состав уравнения, а также функций, принадлежащих ядрам этих операторов. Исследованы свойства решений типа бегущей волны и степенных решений, а также их зависимость от параметров уравнения.

Abstract
The present work is devoted to the study of the class of two-dimensional determinant partial differential equations in which the left-hand side has a form of functional determinant. The elements of this determinant are expressed through some linear differential operators acting on separate independent variables. The most well-known equation related to this class is Monge – Ampere equation. There are investigated separately both homogeneous and inhomogeneous determinant equations in the given work. In particular, there is proved the theorem on the interconnection between the solutions of homogeneous determinant equation and some auxiliary linear differential-operator equation. It is supposed that the right-hand side of inhomogeneous equation can depend on independent variables, unknown function and its first derivatives. The received families of particular solutions are expressed through the eigenfunctions of differential operators acting on separate variables, and also through the functions which belong to the kernels of those operators. In the case of differential operators with constant coefficients there are investigated the solutions of the type of travelling wave both for homogeneous and inhomogeneous equations. The case when each of operators includes only one derivative is analyzed in detail. There are received the solutions of the type of power function for the case when the operators on separate variables are homogeneous and the right-hand side of equation

has the power dependence on unknown function and its first derivatives. The dependence of received solutions on the parameters of equation is researched.

Ключевые слова: детерминантное уравнение, разделение переменных, собственная функция, линейный дифференциальный оператор, решение типа бегущей волны.
Keywords: determinant equation, separation of variables, eigenfunction, linear differential operator, solution of travelling wave type.

Введение

Одним из наиболее известных нелинейных уравнений в частных производных в современной математической физике является уравнение Монжа – Ампера (МА). К настоящему времени подробно изучены свойства симметрии и классификация уравнений МА [Кушнер, 2007, 2008], [Лычагин, Рубцов, 1983], [Овсянников, 1978], [Banos, 2002], [Ibragimov, 1994], [Kruglikov, 1998], [Kushner, 2006], [Tchij, 1999]. Подробно изучены решения уравнений МА, в том числе как однородных, так и неоднородных уравнений [Кушнер, 2008], [Полянин, Зайцев, 2002], а также некоторых модифицированных уравнений типа МА [Рахмелевич, 2016, 2017]. Известны работы, посвященные приложениям уравнения МА к задачам газовой динамики [Хабиров, 1990], [Шабловский, 2015], [Martin, 1953].

Вместе с тем уравнение МА можно рассматривать как частный случай весьма широкого класса детерминантных уравнений. Левая часть таких уравнений может быть представлена в виде определителя, элементами которого являются некоторые дифференциальные выражения. В данной работе изучаются двумерные детерминантные дифференциально-операторные уравнения специального вида. Элементы функционального определителя в левой части уравнения выражаются через некоторые линейные дифференциальные операторы, действующие по отдельным переменным. Проводится исследование решений как однородного, так и неоднородного уравнения, правая часть которого может содержать нелинейности по искомой функции и ее производным. Основное внимание уделяется общим свойствам решений. Некоторые из доказанных теорем проиллюстрированы на конкретных примерах, в которых, в частности, исследована зависимость решений от параметров уравнения.

1. Постановка задачи. Однородное детерминантное уравнение

Класс двумерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений относительно неизвестной функции $u(x,y)$ можно представить в виде:

$$\det\left|\hat{R}u\right| = F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1.1}$$

где $F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ – некоторая заданная функция, $\hat{R}$ – операторная матрица размеров 2×2. В данной работе будем рассматривать уравнения, для которых элементы матрицы $\hat{R}$ определяются выражением:

$$\hat{R}_{ij} = \hat{L}_i \hat{L}_j \quad (i, j = 1,2). \tag{1.2}$$

В выражение (1.2) входят линейные дифференциальные операторы $\hat{L}_1, \hat{L}_2$, которые действуют по переменным x, y соответственно:

$$\hat{L}_1 = \sum_{n=1}^{N_1} a_n(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n}, \quad \hat{L}_2 = \sum_{m=1}^{N_2} b_m(y) \frac{\partial^m}{\partial y^m}. \tag{1.3}$$

Учитывая (1.2), в развернутом виде уравнение (1.1) можно записать как

$$(\hat{L}_1^2 u)(\hat{L}_2^2 u) - \left(\hat{L}_1 \hat{L}_2 u\right)^2 = F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (1.4)$$

Простейшим и хорошо известным уравнением, относящимся к данному классу, является уравнение Монжа – Ампера, для которого $\hat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{L}_2 = \frac{\partial}{\partial y}$. Здесь и далее будем использовать обозначения:

$$\Lambda_i = \ker \hat{L}_i, \quad \widetilde{\Lambda}_i = \ker(\hat{L}_i^2) \quad (i = 1, 2).$$

В данном параграфе рассмотрим однородное уравнение:

$$(\hat{L}_1^2 u)(\hat{L}_2^2 u) - (\hat{L}_1 \hat{L}_2 u)^2 = 0. \qquad (1.4а)$$

Теорема 1.1.

Пусть $v_1(x) \in \widetilde{\Lambda}_1$, $w_2(y) \in \widetilde{\Lambda}_2$; $v_2(x), w_1(y)$ *– произвольные функции, дифференцируемые* $2N_1, 2N_2$ *раз соответственно. Тогда функции*

$$u_1(x, y) = v_1(x) + w_1(y), \qquad (1.5а)$$

$$u_2(x, y) = v_2(x) + w_2(y) \qquad (1.5б)$$

являются решениями уравнения (1.4а).

Доказательство

Рассмотрим функцию (1.5а). Так как по условию теоремы $v_1(x) \in \widetilde{\Lambda}_1$, то $\hat{L}_1^2 u_1(x, y) \equiv 0$. Далее, поскольку правая часть (1.5а) представляет собой сумму функций разных аргументов, то $\hat{L}_1 \hat{L}_2 u_1(x, y) \equiv 0$. Отсюда следует, что функция (1.5а) удовлетворяет уравнению (1.4а). Аналогичные рассуждения проводятся для функции (1.5б). Теорема доказана.

Теорема 1.2.

Пусть функции $v_0(x), v(x)$ дифференцируемы $2N_1$ раз; функции $w_0(y), w(y)$ дифференцируемы $2N_2$ раз, и пусть эти функции удовлетворяют одной из следующих систем уравнений:

$$\hat{L}_1^2 v(x) = 0, \ \hat{L}_2^2 w(y) = 0, \ \hat{L}_1^2 v_0(x) = \kappa(\hat{L}_1 v(x))^2, \ \hat{L}_2^2 w_0(y) = \frac{(\hat{L}_2 w(y))^2}{\kappa}; \qquad (1.6а)$$

$$\hat{L}_1^2 v_0(x) = 0, \ \hat{L}_2^2 w(y) = 0, \ \hat{L}_1^2 v(x) = \kappa(\hat{L}_1 v(x))^2, \ \hat{L}_2^2 w_0(y) = \frac{(\hat{L}_2 w(y))^2}{\kappa w(y)}; \qquad (1.6б)$$

$$\hat{L}_1^2 v(x) = 0, \ \hat{L}_2^2 w_0(y) = 0, \ \hat{L}_1^2 v_0(x) = \frac{(\hat{L}_1 v(x))^2}{\kappa v(x)}, \ \hat{L}_2^2 w(y) = \kappa(\hat{L}_2 w(y))^2; \qquad (1.6в)$$

$$\hat{L}_1^2 v_0(x) = 0, \ \hat{L}_2^2 w_0(y) = 0, \ \hat{L}_1^2 v(x) = \kappa\frac{(\hat{L}_1 v(x))^2}{v(x)}, \ \hat{L}_2^2 w(y) = \frac{(\hat{L}_2 w(y))^2}{\kappa w(y)}. \qquad (1.6г)$$

В системах (1.6а,б,в,г) $\kappa \neq 0$ – некоторая постоянная. Тогда функция

$$u(x, y) = v_0(x) + w_0(y) + v(x)w(y), \qquad (1.7)$$

является решением уравнения (1.4а).

Доказательство

Подставим выражение (1.7) в уравнение (1.4а), в результате чего имеем:

$$(\hat{L}_1^2 v_0)(\hat{L}_2^2 w_0) + vw(\hat{L}_1^2 v)(\hat{L}_2^2 w) + v(\hat{L}_1^2 v_0)(\hat{L}_2^2 w) + w(\hat{L}_1^2 v)(\hat{L}_2^2 w_0) - (\hat{L}_1 v)^2(\hat{L}_2 w)^2 = 0 \qquad (1.8)$$

(здесь для сокращения записи опущены аргументы функций).

Пусть удовлетворяются первые два уравнения системы (1.6а), тогда уравнение (1.8) принимает вид:

$$(\hat{L}_1^2 v_0)(\hat{L}_2^2 w_0) - (\hat{L}_1 v)^2 (\hat{L}_2 w)^2 = 0 \qquad (1.9)$$

В результате разделения переменных в (1.9) получаем третье и четвертое уравнения системы (1.6а). Аналогичные рассуждения проводим для систем (1.6б, в, г). Предполагая, что удовлетворяются первые два уравнения каждой из этих систем, преобразуем (1.8) к виду, аналогичному (1.9). Разделяя переменные в полученных уравнениях, получаем третье и четвертое уравнения каждой из систем (1.6б, в, г). Следовательно, если функции $v_0(x), w_0(y), v(x), w(y)$ удовлетворяют любой из систем (1.6а, б, в, г), то функция (1.7) является решением уравнения (1.4а). Теорема доказана.

Следствие

Пусть $v_0(x) \in \tilde{\Lambda}_1, w_0(y) \in \tilde{\Lambda}_2$, $v(x), w(y)$ – собственные функции операторов $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ соответственно. Тогда функция (1.7) является решением уравнения (1.4а).

Доказательство

Нетрудно убедиться, что поскольку $v(x), w(y)$ – собственные функции операторов $\hat{L}_1, \hat{L}_2$, то они должны удовлетворять третьему и четвертому уравнениям системы (1.6г). Далее, в силу условий $v_0(x) \in \tilde{\Lambda}_1$, $w_0(y) \in \tilde{\Lambda}_2$ функции $v_0(x), w_0(y)$ удовлетворяют первому и второму уравнениям системы (1.6г). Так как при данных условиях все уравнения системы (1.6г) удовлетворяются, то в силу теоремы 1.2, функция (1.7) является решением уравнения (1.4а). Доказательство закончено.

Теорема 1.3.

Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению:

$$(c_1\hat{L}_1 + c_2\hat{L}_2)u = 0, \qquad (1.10)$$

где c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные, причем $c_1^2 + c_2^2 > 0$. Тогда $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.4а).

Доказательство

1. Если $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$, то справедливость утверждения теоремы очевидна.

2. Пусть $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. Рассмотрим операторную матрицу $\hat{\tilde{R}}_{ij}$, полученную в результате преобразования матрицы $\hat{R}_{ij}$ по формулам:

$$\hat{\tilde{R}}_{i1} = c_1\hat{R}_{i1} + c_2\hat{R}_{i2}, \; \hat{\tilde{R}}_{i2} = \hat{R}_{i2}. \qquad (1.11)$$

По известным свойствам определителей [Гантмахер, 2004] имеет место соотношение:

$$\det\left|\hat{\tilde{R}}u\right| = c_1 \det\left|\hat{R}u\right|. \qquad (1.12)$$

Так как $c_1 \neq 0$, то в силу (1.12) уравнения $\det\left|\hat{\tilde{R}}u\right| = 0$ и $\det\left|\hat{R}u\right| = 0$ эквивалентны. Далее, на основании (1.2) и (1.11), и учитывая коммутативность операторов $\hat{L}_1, \hat{L}_2$, первую формулу (1.11) можно записать в виде:

$$\hat{\tilde{R}}_{i1} = \hat{L}_i(c_1\hat{L}_1 + c_2\hat{L}_2). \qquad (1.13)$$

Из (1.13) следует, что если функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.10), то $\hat{\tilde{R}}_{i1}u \equiv 0$ при $i = 1, 2$. Поэтому функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению $\det\left|\hat{\tilde{R}}u\right| = 0$, а следовательно, в силу сказанного выше, и уравнению $\det\left|\hat{R}u\right| = 0$. Теорема доказана.

2. Анализ неоднородного уравнения

В данном параграфе будут сформулированы и доказаны некоторые теоремы о решениях неоднородного детерминантного уравнения (1.4).

Теорема 2.1.

Пусть правая часть уравнения (1.4) имеет вид

$$F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f_1(x) f_2(y) \exp(\gamma u) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\beta_2}, \tag{2.1}$$

где γ, β_1, β_2 *– вещественные параметры. Тогда уравнение (1.4) имеет решение*

$$u(x, y) = v(x) + w(y), \tag{2.2}$$

причем функции $v(x), w(y)$ *удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$\hat{L}_1^2 v(x) = \lambda_1 f_1(x) \exp(\gamma v) [v'(x)]^{\beta_1}, \quad \hat{L}_2^2 w(y) = \lambda_2 f_2(y) \exp(\gamma w) [w'(y)]^{\beta_2}, \tag{2.3}$$

а постоянные λ_1, λ_2 *связаны соотношением*

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \tag{2.3а}$$

Доказательство

Подставим функцию (2.2) в уравнение (1.4) и учтем, что $\hat{L}_1 \hat{L}_2 u(x, y) \equiv 0$, тогда получаем:

$$\left(\hat{L}_1^2 v(x)\right)\left(\hat{L}_2^2 w(y)\right) = f_1(x) f_2(y) \exp[\gamma(v + w)] [v'(x)]^{\beta_1} [w'(y)]^{\beta_2}. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) можно переписать в виде:

$$\frac{\hat{L}_1^2 v(x)}{f_1(x) \exp(\gamma v) [v'(x)]^{\beta_1}} \cdot \frac{\hat{L}_2^2 w(y)}{f_2(y) \exp(\gamma w) [w'(y)]^{\beta_2}} = 1. \tag{2.5}$$

Левая часть уравнения (2.5) представляет собой произведение двух сомножителей, зависящих от разных переменных. Разделяя переменные в (2.5), находим уравнения (2.3) для функций $v(x), w(y)$ и условие (2.3а). Теорема доказана.

Теорема 2.2.

Пусть правая часть уравнения (1.4) не зависит от $u(x, y)$ *и ее производных. Также пусть* $u_0(x, y)$ *удовлетворяет уравнению (1.4), а функции* $v(x), \tilde{v}(x), w(y), \tilde{w}(y)$ *таковы, что* $v(x) \in \Lambda_1, \tilde{v}(x) \in \tilde{\Lambda}_1$, $w(y) \in \Lambda_2, \tilde{w}(y) \in \tilde{\Lambda}_2$. *Тогда функции, определяемые выражениями*

$$u_1(x, y) = u_0(x, y) + v(x) \tilde{w}(y), \tag{2.6а}$$

$$u_2(x, y) = u_0(x, y) + \tilde{v}(x) w(y), \tag{2.6б}$$

также являются решениями уравнения (1.4).

Доказательство

Согласно условию теоремы $\hat{L}_1 v(x) \equiv 0$, $\hat{L}_2^2 \tilde{w}(y) \equiv 0$, поэтому для функции (2.6а) можно записать:

$$\hat{L}_1^2 u_1(x, y) = \hat{L}_1^2 u_0(x, y) + \tilde{w}(y) \hat{L}_1^2 v(x) = \hat{L}_1^2 u_0(x, y), \tag{2.7а}$$

$$\hat{L}_2^2 u_1(x, y) = \hat{L}_2^2 u_0(x, y) + v(x) \hat{L}_2^2 \tilde{w}(y) = \hat{L}_2^2 u_0(x, y), \tag{2.7б}$$

$$\hat{L}_1 \hat{L}_2 u_1(x, y) = \hat{L}_1 \hat{L}_2 u_0(x, y) + (\hat{L}_1 v(x))(\hat{L}_2 \tilde{w}(y)) = \hat{L}_1 \hat{L}_2 u_0(x, y). \tag{2.7в}$$

Из (2.7а, б, в) следует, что $\det\left|\hat{R}u_1\right| = \det\left|\hat{R}u_0\right|$. Поэтому, если $u_0(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.4), то и $u_1(x,y)$ удовлетворяет тому же уравнению. Полностью аналогичные рассуждения проводятся для функции (2.6б). Теорема доказана.

Теорема 2.3.

Пусть правая часть уравнения (1.4) имеет вид $F\left(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f_1(x)f_2(y)$. *Тогда уравнение (1.4) имеет следующее решение:*

$$u(x,y) = v_1(x)w_1(y) + v_2(x)w_2(y), \tag{2.8}$$

причем $v_2(x)\in\Lambda_1$, $w_1(y)\in\Lambda_2$, *а функции* $v_1(x), w_2(y)$ *удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ):*

$$\hat{L}_1^2 v_1(x) = \lambda_1 f_1(x)/v_2(x), \quad \hat{L}_2^2 w_2(y) = \lambda_2 f_2(y)/w_1(y), \tag{2.9}$$

а постоянные λ_1, λ_2 *удовлетворяют условию (2.3а).*

Доказательство

Так как согласно условию теоремы $\hat{L}_1 v_2(x)\equiv 0$, $\hat{L}_2 w_1(y)\equiv 0$, то из (2.8) легко получить, что $\hat{L}_1\hat{L}_2 u(x,y)\equiv 0$. Тогда, подставляя (2.8) в уравнение (1.4), преобразуем его к виду:

$$\frac{v_2(x)\hat{L}_1^2 v_1(x)}{f_1(x)}\cdot\frac{w_1(y)\hat{L}_2^2 w_2(y)}{f_2(y)} = 1. \tag{2.10}$$

Разделяя переменные в (2.10), получаем, что функции $v_1(x), w_2(y)$ должны удовлетворять уравнениям (2.9). Теорема доказана.

Замечание. Семейство решений (2.8) уравнения (1.4), определяемое теоремой 2.3, является обобщением семейства решений (2.2), для случая $\gamma = 0$, т.е. когда правая часть (1.4) не зависит от искомой функции.

Следующая теорема определяет решения типа бегущей волны для неоднородного детерминантного уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема 2.4.

Пусть $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ *– операторы с постоянными коэффициентами, т.е. в выражениях (1.3)* $a_n(x) = \text{const}$, $b_m(y) = \text{const}$, *а правая часть уравнения (1.4) имеет вид:*

$$F\left(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \tilde{F}\left(c_1x + c_2y, u, \frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2.11}$$

Тогда уравнение (1.4) имеет решение типа бегущей волны

$$u(x,y) = U(z), \quad z = c_1x + c_2y, \tag{2.12}$$

причем функция $U(z)$ *удовлетворяет следующему ОДУ:*

$$\sum_{n_1,n_2=1}^{N_1}\sum_{m_1,m_2=1}^{N_2} A_\sigma\left\{U^{(n_1+n_2)}(z)U^{(m_1+m_2)}(z) - U^{(n_1+m_1)}(z)U^{(n_2+m_2)}(z)\right\} = F_0(z,U(z),U'(z)), \tag{2.13}$$

где $\sigma = (n_1,n_2,m_1,m_2)$ *– мультииндекс, а коэффициенты* A_σ *и функция* F_0 *определяются выражениями:*

$$A_\sigma = a_{n_1}a_{n_2}b_{m_1}b_{m_2}c_1^{n_1+n_2}c_2^{m_1+m_2}, \tag{2.13а}$$

$$F_0(z,U(z),U'(z)) = \tilde{F}\left(z,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{u(x,y)=U(z)} \tag{2.13б}$$

Доказательство

Так как в силу условий теоремы коэффициенты операторов $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ явно не зависят от x, y, а правая часть (1.4) явно зависит только от z, то при этих условиях уравнение (1.4) инвариантно относительно преобразования сдвига, и, следовательно, должно иметь решение типа бегущей волны [Полянин, Зайцев, Журов, 2005]. Для получения уравнения относительно функции $U(z)$, подставим (2.12) в дифференциальные выражения, входящие в левую часть уравнения (1.4):

$$(\hat{L}_1^2 u)(\hat{L}_2^2 u) = \sum_{n_1,n_2=1}^{N_1} \sum_{m_1,m_2=1}^{N_2} a_{n_1} a_{n_2} b_{m_1} b_{m_2} c_1^{n_1+n_2} c_2^{m_1+m_2} U^{(n_1+n_2)}(z) U^{(m_1+m_2)}(z), \tag{2.14а}$$

$$\left(\hat{L}_1 \hat{L}_2 u\right)^2 = \sum_{n_1,n_2=1}^{N_1} \sum_{m_1,m_2=1}^{N_2} a_{n_1} a_{n_2} b_{m_1} b_{m_2} c_1^{n_1+n_2} c_2^{m_1+m_2} U^{(n_1+m_1)}(z) U^{(n_2+m_2)}(z). \tag{2.14б}$$

В свою очередь, подставляя (2.14а, б) в (1.4), после элементарных преобразований получаем уравнение (2.13) с коэффициентами, определяемыми выражением (2.13а). Теорема доказана.

Пример.

Пусть $\hat{L}_1 = \dfrac{\partial^{N_1}}{\partial x^{N_1}}, \quad \hat{L}_2 = \dfrac{\partial^{N_2}}{\partial y^{N_2}}$. Тогда уравнение (2.13) принимает вид:

$$U^{(2N_1)}(z) U^{(2N_2)}(z) - \left[U^{(N_1+N_2)}(z)\right]^2 = F_0(z, U, U'). \tag{2.15}$$

Если $N_1 = N_2 = N$, то уравнение (2.15) можно удовлетворить только при $F_0(z, U, U') \equiv 0$, причем в этом случае решением данного уравнения является любая функция, дифференцируемая до порядка $2N$ включительно. Также нетрудно убедиться, что справедливы следующие утверждения:

1) при $F_0(z, U, U') \equiv 0$ и любых N_1, N_2 уравнение (2.15) имеет экспоненциальное решение $U(z) = U_0 \exp(\sigma z)$;

2) при $F_0(z, U, U') \equiv 0$ и любых N_1, N_2, таких, что $N_1 + N_2 -$ четное число, уравнение (2.15) имеет решения в виде гиперболических и тригонометрических функций:

$$U(z) = U_0 \mathrm{ch}(\sigma z), U(z) = U_0 \mathrm{sh}(\sigma z), U(z) = U_0 \cos(\sigma z), U(z) = U_0 \sin(\sigma z).$$

В приведенных здесь решениях U_0, σ – произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (2.15) в случае $N_1 \neq N_2$, при этом будем предполагать, что $F\left(u, x, y, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = f_0 (c_1 x + c_2 y)^\alpha u^\gamma \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^{\beta_1} \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^{\beta_2}$. Тогда правая часть (2.15) имеет вид:

$$F_0(z, U, U') = b_0 z^\alpha [U(z)]^\gamma [U'(z)]^{\beta_\Sigma}, \ \beta_\Sigma = \beta_1 + \beta_2, \ b_0 = f_0 c_1^{\beta_1} c_2^{\beta_2}. \tag{2.16}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2.15) с правой частью вида (2.16) имеет степенное решение: $U(z) = U_0 z^\sigma$. Подставляя эту функцию в уравнение (2.15), находим:

$$Q_{N_1,N_2}(\sigma) U_0^{2-\beta_\Sigma-\gamma} = b_0 \sigma^{\beta_\Sigma} z^\rho, \tag{2.17}$$

где

$$Q_{N_1,N_2}(\sigma) = q_{2N_1} q_{2N_2} - (q_{N_1+N_2})^2, \quad q_n = \prod_{i=0}^{n-1} (\sigma - i),$$

$$\rho = \sigma(\beta_\Sigma + \gamma - 2) + \alpha - \beta_\Sigma + 2(N_1 + N_2). \tag{2.17а}$$

Уравнение (2.17) можно удовлетворить только при условии $\rho = 0$. При этом возможны два случая:

Случай 1). $\beta_\Sigma + \gamma - 2 \neq 0$.

Тогда σ, U_0 определяются выражениями:

$$\sigma = \frac{\beta_\Sigma - \alpha - 2(N_1 + N_2)}{\beta_\Sigma + \gamma - 2}, \quad U_0 = \left(b_0 \sigma^{\beta_\Sigma} / Q_{N_1,N_2}(\sigma)\right)^{1/(2-\beta_\Sigma-\gamma)}.$$

Случай 2). $\beta_\Sigma + \gamma - 2 = 0$.

Из условия $\rho = 0$ с учетом (2.17а) следует, что параметры уравнения должны удовлетворять условию:

$$\alpha - \beta_\Sigma + 2(N_1 + N_2) = 0.$$

Также из уравнения (2.17) получаем, что коэффициент U_0 является произвольным, а величина σ находится из соотношения: $Q_{N_1,N_2}(\sigma) = b_0 \sigma^{\beta_\Sigma}$.

Рассмотрим теперь уравнение (1.4) в случае, когда $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ – однородные операторы. Это означает, что при произвольном $\mu \in \mathbf{R}_+$ они удовлетворяют условиям:

$$\hat{L}_1(\mu x) = \mu^{r_1} \hat{L}_1(x), \quad \hat{L}_2(\mu y) = \mu^{r_2} \hat{L}_2(y), \tag{2.18}$$

где r_1, r_2 – показатели однородности. При этом предполагаем, что правая часть уравнения (1.4) имеет вид:

$$F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f_0 x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} u^{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\beta_2}. \tag{2.19}$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ – вещественные параметры. При данных условиях будем искать решение уравнения(1.4) в виде степенной функции:

$$u(x, y) = U_0 x^{\sigma_1} y^{\sigma_2}, \tag{2.20}$$

где U_0, σ_1, σ_2 подлежат определению в дальнейшем.

Из условий (2.18) однородности операторов $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ следует, что они могут быть представлены в виде:

$$\hat{L}_1 = \sum_{n=1}^{N_1} a_{n0} x^{n+r_1} \frac{\partial^n}{\partial x^n}, \quad \hat{L}_2 = \sum_{m=1}^{N_2} b_{m0} y^{m+r_2} \frac{\partial^m}{\partial y^m}. \tag{2.21}$$

Подставим функцию (2.20) в уравнение (1.4) и учтем соотношения (2.19) и (2.21), тогда после некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} &U_0^2 A(\sigma_1) B(\sigma_2) \{A(\sigma_1 + r_1) B(\sigma_2 + r_2) - A(\sigma_1) B(\sigma_2)\} x^{2(\sigma_1 + r_1)} y^{2(\sigma_2 + r_2)} = \\ &= f_0 \sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} U_0^{\beta_\Sigma + \gamma} x^{\alpha_1 - \beta_1 + \sigma_1(\beta_\Sigma + \gamma)} y^{\alpha_2 - \beta_2 + \sigma_2(\beta_\Sigma + \gamma)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta_\Sigma = \beta_1 + \beta_2, \quad A(\sigma_1) = \sum_{n=1}^{N_1} a_{n0} \prod_{i=0}^{n-1} (\sigma_1 - i), \quad B(\sigma_2) = \sum_{m=1}^{N_2} b_{m0} \prod_{j=0}^{m-1} (\sigma_2 - j).$$

Далее, уравнение (2.22) нетрудно преобразовать к виду:

$$Q(\sigma_1, \sigma_2) U_0^{2-\beta_\Sigma-\gamma} = f_0 \sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} x^{\theta_1} y^{\theta_2}, \tag{2.23}$$

где

$$\theta_{1,2} = \alpha_{1,2} - \beta_{1,2} - 2r_{1,2} + \sigma_{1,2}(\beta_\Sigma + \gamma - 2), \tag{2.23а}$$

$$Q(\sigma_1,\sigma_2) = A(\sigma_1)B(\sigma_2)\{A(\sigma_1 + r_1)B(\sigma_2 + r_2) - A(\sigma_1)B(\sigma_2)\}. \tag{2.23б}$$

Рассмотрим возможные случаи для уравнения (2.23).

1) $f_0 = 0$. Тогда нетривиальное решение (2.20) существует, только если σ_1, σ_2 удовлетворяют условию:

$$Q(\sigma_1,\sigma_2) = 0, \tag{2.24}$$

при этом коэффициент U_0 является произвольным.

2) $f_0 \neq 0$. Тогда уравнение (2.23) можно удовлетворить только при выполнении условий

$$\theta_1 = \theta_2 = 0. \tag{2.25}$$

При этом, в свою очередь, возможны две ситуации:

а) $\beta_\Sigma + \gamma - 2 \neq 0$. Тогда из (2.23а), (2.25) находим:

$$\sigma_{1,2} = \frac{2r_{1,2} + \beta_{1,2} - \alpha_{1,2}}{\beta_\Sigma + \gamma - 2}. \tag{2.26}$$

Из уравнения (2.23) получаем выражение для коэффициента U_0:

$$U_0 = \left(\frac{f_0 \sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2}}{Q(\sigma_1,\sigma_2)} \right)^{\frac{1}{2-\beta_\Sigma-\gamma}}, \tag{2.27}$$

причем σ_1, σ_2 определяются выражением (2.26). Если при этом удовлетворяется условие (2.24), то решение (2.20) не существует.

б) $\beta_\Sigma + \gamma - 2 = 0$. Тогда из (2.23а), (2.25) следует, что решение (2.20) существует только при выполнении условий:

$$2r_{1,2} + \beta_{1,2} - \alpha_{1,2} = 0. \tag{2.28}$$

Из (2.23) получаем, что σ_1, σ_2 должны удовлетворять условию:

$$Q(\sigma_1,\sigma_2) = f_0 \sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2}, \tag{2.29}$$

при этом коэффициент U_0 является произвольным.

Итак, в результате приведенных выше рассуждений доказана следующая теорема:

Теорема 2.5.

Пусть $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ – однородные операторы, а правая часть уравнения (1.4) имеет вид (2.19). Тогда уравнение (1.4) имеет решение в виде степенной функции (2.20), *причем возможны следующие случаи:*

1. Если уравнение (1.4) однородное $(f_0 = 0)$, *то нетривиальное решение вида* (2.20) *существует только при выполнении условия (2.24), при этом коэффициент U_0 является произвольным.*

2. Если уравнение (1.4) неоднородное, то:

а) если $\beta_\Sigma + \gamma \neq 2$, то решение (2.20) существует при $Q(\sigma_1,\sigma_2) \neq 0$, и U_0, σ_1, σ_2 определяются выражениями (2.26), (2.27);

б) если $\beta_\Sigma + \gamma = 2$, то решение (2.20) существует только при выполнении условий (2.28), (2.29), при этом коэффициент U_0 является произвольным.

Заключение

Таким образом, в данной работе изучен класс двумерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений специального вида, в которых элементы операторной матрицы представляют собой произведения линейных дифференциальных операторов, действующих по отдельным переменным. Для однородного детерминантного уравнения получены некоторые семейства решений, выраженных через собственные функции и функции, принадлежащие ядрам названных выше линейных дифференциальных операторов. Доказана теорема о взаимосвязи решений однородного детерминантного уравнения и некоторого вспомогательного линейного дифференциально-операторного уравнения. Также исследованы решения неоднородного детерминантного уравнения, правая часть которого зависит от искомой функции, её первых производных, а также от независимых переменных. В частности, исследован случай, когда правая часть уравнения содержит степенные нелинейности по искомой функции и её первым производным. В случае дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами исследованы решения типа бегущей волны; при этом более подробно проанализирован случай, когда каждый из операторов включает только одну производную. Получены решения в виде степенной функции для однородных и неоднородных детерминантных уравнений, исследована зависимость этих решений от параметров уравнения и найдены условия существования этих решений. Результаты работы могут быть обобщены на детерминантные уравнения более общего вида.

Список литературы
References

1. Гантмахер Ф.Р. 2004. Теория матриц. М.: Физматлит, 560 с.

Gantmakher F.R. 2004. Teoriya matrits [Theory of matrices]. M: Fizmatlit, 560 p.

2. Кушнер А.Г. 2007. Симплектическая классификация гиперболических операторов Монжа – Ампера. Вестник Астраханского государственного технического университета, Т. 1, № 36: 15–18.

Kushner A.G. 2007. Simplekticheskaya klassifikatsiya giperbolicheskih operatorov Monga – Ampera [Symplectic classification of hyperbolic Monge – Ampère operators] Vestnik Astrahanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, V. 1, № 36: 15–18.

3. Кушнер А.Г. 2008. Контактная линеаризация невырожденных уравнений Монжа – Ампера. Известия ВУЗов, Математика, № 4: 43–58.

Kushner A.G. 2008. Kontaktnaya linearizatsiya nevyrozhdennykh uravneniy Monga – Ampera [Contact Linearization of Non-degenerate Monge – Ampère equations] Izvestiya VUZov, Matematika, № 4: 43–58.

4. Лычагин В.В., Рубцов В.Н. 1983. О теоремах Софуса Ли для уравнения Монжа – Ампера. Доклады АН БССР, Т. 27, № 5: 396–398.

Lychagin V.V., Rubtsov V.N. 1983. O teoremakh Sofusa Li dlya uravneniya Monga – Ampera [On Sophus Lie theorems for Monge – Ampère equation] Doklady AN BSSR, V. 27, № 5: 396–398.

5. Овсянников Л.В. 1978. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М: Наука, 400 с.

Ovsyannikov L.V. 1978. Gruppovoy analiz differentsialnykh uravneniy [Group analysis of differential equations] M.: Nauka, 400 p.

6. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 432 с.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. 2002. Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya [Handbook of nonlinear partial differential equations: exact solutions] M: Fizmatlit, 432 p.

7. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 256 с.

Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., Zhurov A.I. 2005. Metody resheniya nelineinykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Methods of solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics] M.: Fizmatlit, 256 p.

8. Рахмелевич И.В. 2016. О решениях двумерного уравнения Монжа – Ампера со степенной нелинейностью по первым производным. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 4: 33–43.

Rakhmelevich I.V. 2016. O resheniyakh dvumernogo uravneniya Monga – Ampera so stepennoy nelineynostiyu po pervym proizvodnym [On solutions of the Monge – Ampere equation with power-law non-linearity with respect to first derivatives] Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, № 4: 33–43.

9. Рахмелевич И.В. 2017. Модифицированное двумерное уравнение Монжа – Ампера. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, № 3: 159–168.

Rakhmelevich I.V. 2017. Modifitsirovannoe dvumernoe uravnenie Monga – Ampera [Modified two-dimensional Monge – Ampere equation] Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. № 3: 159–168.

10. Хабиров С.В. 1990. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа – Ампера. Математический сборник, Т. 181, № 12: 1607–1622.

Khabirov S.V. 1992. Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennye s pomoshiyu kontaktnoy gruppy uravneniya Monga – Ampera [Nonisentropic one-dimensional gas motions constructed by means of the contact group of the nonhomogeneous Monge – Ampere equation] Matematicheskiy sbornik, V.181, № 12: 1607–1622.

11. Шабловский О.Н. 2015. Параметрические решения уравнения Монжа – Ампера и течения газа с переменной энтропией. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 1: 105–118.

Shablovsky O.N. 2015. Parametricheskie resheniya uravneniya Monga – Ampera i techeniya gaza s peremennoy entropiey [Parametric solutions for the Monge – Ampere equation and gas flows with variable entropy] Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, № 1: 105–118.

12. Banos B. 2002. Nondegenerate Monge-Ampere structures in dimension 3. Letters of Mathematical Physics, V. 62, № 1: 1–15.

13. Ibragimov N.H. (editor). 1994. CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations. Vol.1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. –Boca Raton: CRC Press, 429 p.

14. Kruglikov B.S. 1998. Symplectic and contact Lie algebras with application to the Monge-Ampere equations . Tr. Mat. Inst. Steklova, V. 221: 232–246.

15. Kushner A. G. 2006. Almost product structures and Monge-Ampere equations. Lobachevskii Journal of Mathematics, V. 23: 151–181.

16. Martin M.H. 1953. The propagation of a plain shock into a quiet atmosphere. Canadian Journal of Mathematics, V. 3: 165–187.

17. Tchij O. P. 1999. Contact geometry of hyperbolic Monge–Ampere equations. Lobachevskii Journal of Mathematics, V. 4: 109–162.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Рахмелевич И.В. 2019. Двумерное детерминантное дифференциально-операторное уравнение. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2): 163–173. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-163-173.

Rakhmelevich I.V. 2019. Two-dimensional determinant differential-operator equation. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 163–173 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-163-173.