УДК 517.987
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-280-286

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

HYPERBOLIC SPHERICALLY SYMMETRIC FIRST ORDER EQUATION OF DIVERGENT TYPE FOR A VECTOR FIELD

Ю.П. Вирченко, А.А. Плесканев
Yu.P. Virchenko, A.A. Pleskanev

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University,
85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov,
46 Kostykova St., Belgorod, 308012, Russia

Аннотация
В работе описан класс эволюционных уравнений первого порядка дивергентного типа для векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, которые инвариантны относительно трансляций времени $t \in \mathbb{R}$ и пространственных переменных, составляющих радиус-вектор $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$, и которые, кроме того, ковариантным образом преобразуются при вращениях $\mathbb{R}^3$. Каждое уравнение этого класса полностью характеризуется парой дифференцируемых функций f и g, определенных на $\mathbb{R}^+$. В найденном классе уравнений выделен класс уравнений гиперболических по Фридрихсу. Для принадлежности уравнению, которое характеризуется парой функций f и g, этому классу необходимо и достаточно, чтобы имело место $f'g > 0$.

Abstract
It is described the class of evolutionary equations of the first order of divergent type for a vector field $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in\mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, which are invariant relative to time $t \in \mathbb{R}$ and spatial translations and which are covariant relative to all group $\mathbb{O}_3$ transformations. Each equation of this class is fully characterized by a pair of differentiable functions f and g which are defined on $\mathbb{R}^+$. In the class of equations found, the class of hyperbolic Friedrichs equations is distinguished. Each equation that is characterized by a pair of functions f and g belongs to this class if and only if the $f'g > 0$ takes place.

Ключевые слова: квазилинейные системы, гиперболичность, векторное поле, ковариантность, плотность потока поля, симметричные тензоры.
Keywords: quasilinear systems, hyperbolicity, vector field, covariance, field flux density, symmetric tensors.

Введение

В работах [Вирченко, Субботин, 2018а, б, в] поставлена задача об описании классов систем уравнений дивергентного типа, описывающих эволюцию фиксированных совокупностей полей на евклидовом пространстве, которые инвариантны относительно группы трансляций времени и группы трансляций пространства $\mathbb{R}^3$ и которые, кроме того, преобразуются ковариантным образом по представлениям группы $\mathbb{O}_3$. Однако в этих работах не ставился вопрос как о существовании решений у тех систем уравнений, которые получаются в результате решения такой задачи, так и об обладании этими решениями физически «разумных» свойств, необходимых для их использования при моделировании эволюции собственно физических систем, например, конденсированных сред. Настоящая работа направлена на восполнение этого пробела. Мы изучим простейшую ситуацию – эволюционное уравнение дивергентного типа

$$\dot{a}_j(\mathbf{x},t) = (\nabla_k S_{jk})(\mathbf{x},t), \quad j = 1,2,3 \tag{1}$$

($\nabla_j \equiv \partial/\partial x_j,\ j = 1,2,3$) для векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}_+$, где функционал $S_{jk} = S_{jk}[\mathbf{a}]$ от поля $\mathbf{a}(\mathbf{x},\ t)$ – плотность потока этого поля представляется функцией от значений поля в фиксированной текущей пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$. Следовательно, уравнение (1) является, в этих условиях, векторным уравнением первого порядка, и поэтому представляет собой систему квазилинейных уравнений. В формуле (1) и далее используется правило тензорной алгебры суммирования по допустимым значениям повторяющихся векторных (в данном случае, нижних) индексов. Требование ковариантности векторного уравнения (1) относительно преобразований группы $\mathbb{O}_3$ означает, что значениями плотности $S_{jk}(\mathbf{x}, t)$ являются тензоры второго ранга в $\mathbb{R}^3$.

Настоящая работа посвящена нахождению таких условий на элементы класса $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^3)$ (см. [Вирченко, Субботин, 2019]) всех уравнений вида (1), которые выделяют в нем те уравнения, которые являются «разумными» с физической точки зрения. Известно, что эволюционные уравнения первого порядка, которые используются при описании сплошных сред, как правило, не описывают влияния на их динамику присущих им физических диссипативных механизмов. В этих условиях представляются разумными с физической точки зрения только так называемые системы уравнений гиперболического типа (см., например, [Годунов, 1979; Рождественский, Яненко, 1978]). Требование гиперболичности системы уравнений подразумевает, что все ветви $\omega_j(\mathbf{k}),\ j = 1,2,3$ решения соответствующего дисперсионного уравнения, если пользоваться терминологией теоретической физики, для зависимости частоты от волнового вектора $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ являются вещественными. Это требование связано с тем, что наличие мнимой части у какой-либо ветви из этих решений $\omega_j(\mathbf{k})$, в некоторой области значений волнового вектора $\mathbf{k}$, обязательно приводит, ввиду вещественности уравнения (1), к наличию комплексно сопряженного ему решения $\omega^*_j(\mathbf{k})$. Тогда наличие мнимой части у $\omega_j(\mathbf{k})$ приводит не только к наличию решений уравнения, стремящихся к равновесному нулевому значению, но также и к обязательному наличию решений $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, обладающих ничем не обусловленным физически неограниченным возрастанием в некоторых областях изменения пространственной переменной $\mathbf{x}$. Такое положение физически не разумно, так как типичное поведение любой большой физической системы связано с возрастанием энтропии, и поэтому всегда на эволюцию оказывают влияние физические диссипативные механизмы, учет которых необходим при математическом моделировании, если их влияние не пренебрежимо мало. В последнем случае эволюция системы должна носить обратимый характер по времени, и поэтому неограниченное возрастание решений недопустимо. Заметим, что возрастание решений $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, но уже степенным образом относительно t, возникает также при наличии совпадения значений каких-либо двух ветвей, $\omega_j(\mathbf{k}_0) = \omega_k(\mathbf{k}_0)$ при некотором значении $\mathbf{k}_0$ волнового вектора. В связи с этим, в теории систем квазилинейных уравнений гиперболическими называются такие системы, у которых дисперсионные зависимости $\omega_j(\mathbf{k}),\ j = 1,2,3$ являются вещественными и недопустимо совпадение их значений в какой-либо точке $\mathbf{k}_0$.

Ввиду значительной технической сложности установления критерия гиперболичности векторного уравнения (1), в настоящей работе мы ограничиваемся установлением критерия наличия у него более слабого свойства, чем гиперболичность, а именно, так называемой t-гиперболичности (гиперболичности по Фридрихсу) (см. [Годунов, 1979; Majda, 1983]).

Системы уравнений класса

$\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^3)$**.** Опишем класс $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^3)$ всех уравнений первого порядка дивергентного типа вида (1) для векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, у которых функция $S_{jp} = S_{jp}[\mathbf{a}]$ от значений этого поля в текущей пространственно-временной точке принимает тензорные значения. В этом случае функция $S_{jp}[\mathbf{a}]$ разлагается по базису тензорного представления, который, в условиях ковариантности, составляется из двух возможных в этом случае тензоров $\boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$,

$$S_{jp}[\mathbf{a}] = f(\zeta)\delta_{jp} + g(\zeta)a_j a_p, \quad \zeta = \mathbf{a}^2. \tag{2}$$

Тогда класс всех квазилинейных систем класса $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^3)$ описывается следующей формулой

$$\dot{a}_j(\mathbf{x},t) = \nabla_p\big[f(\zeta)\delta_{jp} + g(\zeta)a_j a_p\big](\mathbf{x},t). \tag{3}$$

Каждой системе (3) сопоставим линеаризованную (касательную) эволюционную систему для вариации $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \delta\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ поля при его фиксированном значении $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$,

$$\dot{v}_j(\mathbf{x},t) = U_{jk}^{(p)}(\mathbf{a})\nabla_p v_k, \tag{4}$$

где набор матриц $U_{jk}^{(p)}, p = 1,2,3$ дается формулой

$$U_{jk}^{(p)}[\mathbf{a}] = \frac{\partial}{\partial a_k}[f(\zeta)\delta_{jp} + g(\zeta)a_j a_p] = 2[f'(\zeta)\delta_{jp} + g'(\zeta)a_j a_p] + g(\zeta)\big(\delta_{jk}a_p + \delta_{pk}a_j\big). \tag{5}$$

Дисперсионное уравнение, соответствующее уравнению (4), получается подстановкой $v_j = v_j^{(0)}\exp(i\omega(\mathbf{k})t + i(\mathbf{k},\mathbf{x}))$. В результате, условием существования вектора $\mathbf{v}^{(0)} = \langle v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}\rangle$ является равенство нулю детерминанта

$$\det\left(\omega(\mathbf{k})\delta_{jl} - \sum_{p=1}^{3} k_p U_{jl}^{(p)}\right) = 0, \tag{6}$$

что и представляет собой искомое дисперсионное уравнение.

Описание класса *t*-гиперболических систем

Согласно определению понятия *t*-гиперболичности (см., например, [Годунов, 1979; Majda, 1983]) квазилинейных систем, для каждой из таких систем существует положительно определенная симметричная матрица $U_{jk}^{(0)}$, для которой матрицы $\big(U^{(0)}U^{(p)}\big)_{jk}$ являются симметричными. Такое определение понятия *t*-гиперболичности связано со следующим утверждением.

Теорема. Если для набора матриц $\mathrm{A}_{\mathrm{jk}}^{(\mathrm{p})}$, $\mathrm{p} = 1 \div \mathrm{m}$, которые являются функциями от значений функций $\mathrm{u_j}$, $\mathrm{j} = 1 \div \mathrm{m}$ в текущей точке $\langle \mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}, \mathrm{t}\rangle$, определяющих систему уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{p=1}^{n} A_{jk}^{(p)}\frac{\partial u_i}{\partial x_p}, \quad j,k = 1 \div m$$

для набора функций $u_j(x_1, \dots, x_m, t)$, $j = 1 \div n$, существует положительно определенная симметричная матрица A_0, $(A_0)_{jk} = A^{(0)}_{jk}$ такая, что матрицы $\left(A_0 A^{(p)}\right)_{jk}$ являются симметричными, то спектральное уравнение

$$\det\left(\lambda - \sum_{p=1}^{m} \xi_p A^{(p)}_{jk}\right) = 0$$

матрицы $\sum_{p=1}^{m} \xi_p A^{(p)}_{jk}$ имеет только вещественные решения при любых вещественных наборах ξ_p, $p = 1 \div m$.

Пусть матрица $A_0 A$ – симметрична при любом наборе чисел ξ_j, $j = 1 \div m$, где $(A_0)_{jk} = A^{(0)}_{jk}$,

$$A = \sum_{p=1}^{m} \xi_p A^{(p)}, \quad \left(A^{(p)}\right)_{jk} = A^{(p)}_{jk}.$$

Тогда она взаимно-однозначным образом связана с вещественной квадратичной формой $(\mathbf{x}, A_0 A \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Рассмотрим матричный пучок $\lambda A_0 - A_0 A$ с положительно определенной матрицей A_0. Тогда при любом выборе набора чисел ξ_j, $j = 1 \div m$, все решения уравнения $\det(\lambda A_0 - A_0 A) = 0$ вещественны (см., например, [Гантмахер, 2004]). Следовательно, так как

$$\det A_0^{-1} \cdot \det(\lambda A_0 - A_0 A) = \det(\lambda A_0^{-1} A_0 - A_0^{-1} A_0 A) = \det(\lambda - A),$$

то последнее уравнение совпадает с уравнением $\det(\lambda - A), = 0$, все решения которого, таким образом, также вещественны.

Выясним, какие ограничения на выбор функций f и g необходимо наложить для того, чтобы соответствующее паре этих функций уравнение (3) было t-гиперболическим. Для решения поставленной задачи об описании класса t-гиперболических уравнений вида (3) нужно найти такую симметричную положительно определенную матрицу $U^{(0)}_{jl}$, для которой матрица

$$U_{jk} = \sum_{p=1}^{3} k_p U^{(0)}_{jl} U^{(p)}_{lk}$$

симметрична.

Положим, матрица $(U_0)_{jl} = U^{(0)}_{jl}$ имеет вид $U^{(0)}_{jl} = f^{(0)}(\zeta)\delta_{jl} + g^{(0)}(\zeta) a_j a_l$ с некоторыми дифференцируемыми функциями $f^{(0)}$ и $g^{(0)}$ от $\zeta = \mathbf{a}^2$. Вычислим

$$U^{(0)}_{jl} U^{(p)}_{lk} = \left(f^{(0)}\delta_{jl} + g^{(0)} a_j a_l\right)\left(2[f'\delta_{lp} + g' a_l a_p] + g\left(\delta_{lk} a_p + \delta_{pk} a_l\right)\right) =$$
$$= 2 f^{(0)} f' \delta_{jp} a_k + f^{(0)} g\left(\delta_{jk} a_p + \delta_{pk} a_j\right) + \zeta g^{(0)} g a_j \delta_{pk} +$$
$$+\left[2\left(f^{(0)} g' + g^{(0)} f'\right) + g^{(0)}(g + 2g'\zeta)\right] a_p a_j a_k.$$

Из полученного выражения следует, что для того чтобы тензор $U^{(0)}_{jl} U^{(p)}_{lk}$ был симметричен относительно индексов j, k, необходимо и достаточно чтобы симметричным по j и k был тензор

$$2 f^{(0)} f' \delta_{jp} a_k + \left(f^{(0)} g + \zeta g^{(0)} g\right) a_j \delta_{pk},$$

то есть коэффициенты при линейно независимых тензорах $\delta_{jp} a_k$ и $\delta_{pk} a_j$ должны совпадать. Отсюда имеем равенство

$$2f^{(0)}f' = g\big(f^{(0)} + g^{(0)}\zeta\big). \tag{7}$$

Найдем теперь условия, при которых симметричная 3×3-матрица

$$U_{jl}^{(0)} = f^{(0)}(\zeta)\delta_{jl} + g^{(0)}(\zeta)a_j a_l$$

является положительно определенной. Для этого вычислим полином $\det\big(\lambda - U^{(0)}\big)$. Коэффициентами этого полинома являются $\mathrm{Sp}\mathrm{U}_0 > 0$, $(\mathrm{Sp}^2\mathrm{U}_0 - \mathrm{Sp}\mathrm{U}_0^2)/2$ и $\det\mathrm{U}_0 > 0$, где первый и третий из них должны быть, с необходимостью, положительны,

$$\mathrm{Sp}\,\mathrm{U}_0 = 3f^{(0)} + \zeta g^{(0)} > 0, \tag{8}$$

$$\det\mathrm{U}_0 = f^{(0)2}\big(f^{(0)} + \zeta g^{(0)}\big) > 0, \tag{9}$$

Так как

$$\mathrm{Sp}\mathrm{U}_0^2 = 2f^{(0)2} + \big(f^{(0)} + \zeta g^{(0)}\big)^2,$$

то, на основании (8) и (9), второй коэффициент определяется выражением

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathrm{Sp}\mathrm{U}_0^2 - \mathrm{Sp}^2\,\mathrm{U}_0) &= f^{(0)2} + \frac{1}{2}\Big[\big(f^{(0)} + \zeta g^{(0)}\big)^2 - \big(3f^{(0)} + \zeta g^{(0)}\big)^2\Big] \\ &= -f^{(0)}\big(3f^{(0)} + 2\zeta g^{(0)}\big).\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение для собственных чисел матрицы $U^{(0)}$ принимает вид

$$\lambda^3 - \big(3f^{(0)} + \zeta g^{(0)}\big)\lambda^2 + f^{(0)}\big(3f^{(0)} + 2\zeta g^{(0)}\big)\lambda - f^{(0)2}\big(f^{(0)} + \zeta g^{(0)}\big) = 0.$$

Записав его в виде

$$\big(\lambda - f^{(0)}\big)^3 - \zeta g^{(0)}\big(\lambda - f^{(0)}\big)^2 = 0, \tag{10}$$

находим собственные числа $\lambda = f^{(0)}, f^{(0)} + \zeta g^{(0)}$ матрицы U_0. Таким образом, матрица U_0 положительно определена при выполнении неравенств $f^{(0)} > 0,\ f^{(0)} + \zeta g^{(0)} > 0$.

Запишем теперь условие (7) в виде $g = 2f'f^{(0)}/\big(f^{(0)} + \zeta g^{(0)}\big) = 2f'\big(1 + \zeta g^{(0)}/f^{(0)}\big)^{-1}$. Так как функции $f^{(0)}$ и $g^{(0)}$ могут быть выбраны произвольно с соблюдением указанных для них ограничений, то, вводя произвольную неотрицательную функцию $h(\zeta) = 2\big(1 + \zeta g^{(0)}/f^{(0)}\big)^{-1}$, получаем необходимое и достаточное условие t-гиперболичности уравнения векторного (3). Таким образом, мы доказали следующее основное утверждение настоящего сообщения.

Основная теорема. Для того чтобы квазилинейные уравнения класса $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^3)$, вся совокупность которых описывается уравнением (3) с произвольными функциями $\mathrm{f}(\zeta)$ и $\mathrm{g}(\zeta)$, $\zeta = \mathbf{a}^2$, обладали свойством t-гиперболичности, необходимо и достаточно чтобы $\mathrm{g} = \mathrm{h}\mathrm{f}'$, где h – произвольная дифференцируемая, строго положительная функция при $\zeta > 0$.

Заключение

Мы установили критерий t-гиперболичности для общего эволюционного уравнения для векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$. Исследования по установлению t-гиперболичности квазилинейных систем уравнений (см., например, [Куликовский и др. 2001; Куликовский, Слободкина, 1984, 1968]) направлены на то, чтобы выделить среди систем такого типа такие, которые могли бы описывать действительные эволюционные физические процессы в отсутствии механизмов диссипации. Свойство t-гиперболичности является более слабым по сравнению со свойством гиперболичности, так как оно не гарантирует отсутствие совпадения значений спектральных зависимостей $\omega_j(\mathbf{k})$, $j = 1,2,3$. Поэтому дальнейшее развитие теории, изложенной в настоящем сообщении, в смысле описания классов допустимых с физической точки зрения систем квазилинейных уравнений, удовлетворяющих фундаментальным условиям инвариантности относительно трансляций пространства и времени, а также условию трансформации при вращениях пространства $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^3)$, должно заключаться, прежде всего, в установлении критерия гиперболичности системы (1), описывающей эволюцию векторного поля.

Список литературы
References

1. Андреев А.Ф. 1978. Магнитные свойства неупорядоченных сред. ЖЭТФ. 74, № 2: 786–797.

Andreev A.Ph. 1978. Magnetic properties non-ordered media. ZETP. 74, № 2: 786–797 (in Russian).

2. Андреев А.Ф., Марченко В.И. 1976. Макроскопическая теория спиновых волн. ЖЭТФ. 70, № 4: 1522–1532.

Andreev A.Ph., Marchenko V.I. 1976. Macroscopic theory of spin waves. ZETP. 70, № 4: 1522–1532 (in Russian).

3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2018. Математические задачи конструирования эволюционных уравнений динамики конденсированных сред. Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Материалы Международной научной конференции, Стерлитамак, 25–29 июня 2018, т. 2. Уфа, Риц БашГУ, с. 262–264.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2018. Mathematical problems of evolution equations construction for condensed media dynamics. Differential equations and adjacent problems. Materials of International Scientific Conference, Sterlitamak, June 25–29, 2018, v. 2. Ufa, Ric BashSU, p. 262–264 (in Russian).

4. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2018. Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения. Материалы V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», 4–7 декабря 2018. Нальчик, КБР. Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, с. 59.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2018. Equations of condensed dynamics with a local conservaton law. Materials of V International Scientific conference "Nonlocal boundary problems and adjacent problems of mathematical biology, informstics and physics", December 4–7, 2018. Nalchik, KBR. Nalchik: IPMA KBNC RAN, p. 59 (in Russian).

5. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2018. Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля. Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием 22–25 ноября 2018 г., г. Орёл. Часть 1. Орёл, ОГУ имени И.С. Тургенева, с. 83–86.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2018. Description of a class of evolution equations of divergent type for a vector field. Modern physical and mathematical problems. Materials of IV Russian scientific conference with internatial participants, November 22–25, 2018, Orel . Part I. Orel, OSU, p. 83–86 (in Russian).

6. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2019. Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики. Итоги науки и техники. Современная математика. Тематические обзоры. С. 45–58.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2019. Opisanie klassa evolyutsionnykh uravneniy ferrodinamiki [Description of a class of evolution equations of ferrodynamics]. Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika. P. 45–58.

7. Волков Д.В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П. 1971. Феноменологический лагранжиан спиновых волн. ФТТ. 13, № 6: 1668–1678.

Volkov D.V., Zheltukhin A.A., Bliokh Yu.P. 1971. Phenomenological lagrangian of spin waves. PTT. 13, № 6: 1668–1678 (in Russian).

8. Волков Д.В. 1973. Феноменологические лагранжианы. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 4, № 1: 3–41.

Volkov D.V. 1973. Phenomenological lagrangian. Physics of elementary particles and atomic nucleus, 4, № 1: 3–41 (in Russian).

9. Гантмахер Ф.Р. 2004. Теория матриц. М., Физматлит, 560 с.

Gantmakher F.R. 2004. Teoriya matrits [Matrix theory]. Moscow, Fizmatlit, 560 p.

10. Годунов С.К. 1979. Уравнения математической физики. М., Наука, 392 с.

Godunov S.K. 1979. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ, 392 p.

11. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. 2001. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., Физматлит, 608 с.

Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. 2001. Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy [Mathematical problems connected with numerical solution of giperbolic equations systems]. Moscow, Fizmatlit, 608 p.

12. Куликовский А.Г., Слободкина Ф.А. 1984. Об устойчивости одномерных стационарных решений гиперболических систем дифференциальных уравнений при наличии точек обращения в нуль одной из характеристических скоростей. ПММ. 48 (3): 414–419.

Kulikovskii A.G., Slobodkina F.A. 1984. On the stability of one-dimensional stationary solutions of hyperbolic systems of differential equations containing points at which one characteristic velocity becomes zero. J. Appl. Math. Mech. 48 (3): 414–419 (in Russian).

13. Куликовский А.Г., Слободкина Ф.А. 1968. Equilibrium of arbitrary steady flows at the transonic points. ПММ. 31: 593–602;

Kulikovskii A.G., Slobodkina F.A. 1968. Equilibrium of arbitrary steady flows at the transonic points. J. Appl. Math. Mech. 31: 623–630.

14. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. 1978. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., Наука, 688 с.

Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. 1979. Quasilinear equations systems and their application to gas dynamics. Moscow, Nauka Publ, 392 p.

15. Majda A. 1983. The existence of multi-dimensional shock fronts. Memoirs of the American Mathematical Society. 43 (281): 1–94.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Вирченко Ю.П., Плесканев А.А. 2019. Гиперболические сферически симметричные уравнения первого порядка дивергентного типа для векторного поля. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2): 280–286. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-280-286.

Virchenko Yu.P., Pleskanev A.A. 2019. Hyperbolic spherically symmetric first order equation of divergent type for a vector field. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 280–286 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-280-286.