УДК 517.984
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-417-423

ТЕОРЕМА М.Г. КРЕЙНА ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

KREIN THEOREM FOR DIFFERENCE EQUATIONS

А.В. Авилов

A.V. Avilov

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, 394018, Russia

E-mail: wiplash96gmail.com

Аннотация

В рамках данной статьи рассматривается теорема М.Г. Крейна об устойчивости семейства эволюционных операторов, построенного для однородного дифференциального уравнения с непрерывными ограниченными коэффициентами. Формулируются определения устойчивого семейства операторов, устойчивого, неустойчивого и асимптотически устойчивого линейного ограниченного оператора. Сформулирован и доказан дискретный аналог теоремы М.Г. Крейна для векторных разностных уравнений, коэффициентами которых являются линейные ограниченные операторы. Помимо этого, основным результатом является теорема об асимптотической устойчивости линейного ограниченного оператора, рассматриваемого в качестве коэффициента векторного разностного уравнения.

Abstract

The article under consideration reviews M.G. Krein theorem about stability of family of evolutionary operators, constructed for homogeneous differential equation with continuous bounded coefficients. Basic definitions of Cauchy's operator function, a stable family of operators, spectral radius of linear bounded operator, stable linear bounded operator, unstable linear bounded operator and asymptotically stable linear bounded operator are formulated. Main results of the work are presented as two proved theorems. The first theorem is the discrete analogue of M.G. Krein theorem for difference vector equations with coefficients presented as linear bounded operators. The second theorem is an enchanced variant of the first theorem. It contains the conditions for asymptotical stability of the linear bounded operators that are coefficients of difference vector equations. Such difference vector equations with linear bounded operators as coefficients occur during discretization of linear differential equations in banach's spaces. Special attention is paid to Gelfand's theorem about spectral radius of operator, which closely related to asymptotical stability of linear bounded operator.

Ключевые слова: векторное разностное уравнение, линейный ограниченный оператор, устойчивость, асимптотическая устойчивость, спектральный радиус.
Keywords: difference vector equation, linear bounded operator, stability, asymptotical stability, spectral radius.

1. Теорема М. Г. Крейна об устойчивости семейства эволюционных операторов

Пусть X – комплексное банахово пространство и $\operatorname{End} X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Символом $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций со значениями в X и нормой

$$||x||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} ||x(t)||_X.$$

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с переменным операторным коэффициентом вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $A \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$.

Определение 1. Сильно непрерывная дифференцируемая операторная функция $U : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \operatorname{End} X$ называется *операторной функцией Коши* для уравнения (1), если $U(0) = I$ и для любого $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$\dot{U}(t)x(t) = (A(t)U(t))x(t), \quad t \geq 0.$$

Операторная функция Коши $U(t)$ позволяет записать любое решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in X$ в виде

$$x(t) = U(t)x_0, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

Рассмотрим также семейство эволюционных операторов (пропагатор) $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t,s)\} : \Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2_+ : s \leq t\} \longrightarrow \operatorname{End} X$, для которого выполняются следующие свойства:

1) Семейство $\mathcal{U}$ сильно непрерывно на Δ;
2) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau), 0 \leq \tau \leq s \leq t < \infty$;
3) $\mathcal{U}(t,t) = I$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$;
4) $\sup\limits_{0\leq t-s\leq 1} ||\mathcal{U}(t,s)|| = K < \infty$.

В частности, если $A(t) = A \in \operatorname{End} X$, то $U(t) = e^{At}$ и $\mathcal{U}(t,s) = U(t)U^{-1}(s),\ t,s \in \Delta$, где $U : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \operatorname{End} X$ — операторная функция Коши для уравнения (1).

Определение 2. Семейство операторов $\mathcal{U}$ называется *устойчивым*, если существует константа $\tilde{M}_c \geq 0$ и такая, что

$$\sup_{s,t\in\Delta} ||\mathcal{U}(t,s)|| = \tilde{M}_c < \infty.$$

Теорема 1. Пусть неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), t \in \mathbb{R}_+$$

с начальным условием $x(0) = 0$ имеет решение из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ для любой функции $f \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$, тогда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}(t,s)$, построенное для однородного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

будет являться устойчивым.

Базовым случаем этой теоремы является теорема об устойчивости решений однородного дифференциального уравнения с непрерывными ограниченными коэффициентами (см. [Крейн, 1948; Далецкий, Крейн, 1970]). Баскаковым [1996] позднее был получен соответствующий результат для уравнений, операторные коэффициенты которых являются замкнутыми операторами.

2. Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости операторов в разностных уравнениях

Пусть X – комплексное банахово пространство и $\mathrm{End}\, X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Символом $l_\infty = l_\infty(X, \mathbb{Z}_+)$ обозначим банахово пространство ограниченных последовательностей векторов $x : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow X$ с нормой

$$||x||_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} ||x(k)||_X.$$

В рамках данной работы рассматривается разностное уравнение вида

$$x(k+1) = Bx(k) + f(k), \;\; k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

где $x \in l_\infty, B \in \mathrm{End}\, X, f \in l_\infty$.

Отметим, что разностные уравнения (2) возникают при дискретизации линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Такой подход был использован в работах многих авторов (см. [Баскаков, 1990; Баскаков, 1992; Баскаков, 1994; Баскаков, 1997; Баскаков, 2000; Баскаков, 2001; Баскаков, Пастухов, 2001; Баскаков, Чернышов, 2001а; Баскаков, Чернышов, 2001б; Баскаков, 2009; Баскаков, Синтяев, 2010; Баскаков и др. 2011; Баскаков, 2013; Баскаков, Дуплищева, 2015; Бичегкуев, 2008; Бичегкуев, 2009]).

Определение 3. Оператор $B \in \mathrm{End}\, X$ назовем *устойчивым*, если существует константа $\tilde{M}_d \geq 0$ такая, что

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} ||B^n|| = \tilde{M}_d < \infty, \tag{3}$$

т. е. все его степени равномерно ограничены.

Определение 4. Оператор $B \in \mathrm{End}\, X$ назовем *асимптотически устойчивым*, если для него выполняет условие

$$\lim_{n\to\infty} ||B^n|| = 0. \tag{4}$$

Определение 5. *Спектральным радиусом* оператора B называется число $r(B) = \max\limits_{\lambda\in\sigma(B)} |\lambda|$, где $\sigma(B)$ — спектр оператора B.

По теореме Гельфанда о спектральном радиусе оператора (см. [Гельфанд, Шилов, 1958]) из условия (3) следует условие

$$r(B) \leq 1,$$

а условие (4) эквивалентно условию

$$r(B) < 1 \tag{5}$$

для спектрального радиуса оператора B.

В данной работе доказывается следующий результат.

Теорема 2. Пусть уравнение (2) с начальным условием $x(0) = 0$ разрешимо для любой последовательности $f \in l_\infty$, тогда оператор B является устойчивым.

□ Рассмотрим уравнение (2) для $f(k) = 0$ при $k \neq 0$ и $f(0) = y$, где y — произвольный вектор из X. Последовательно распишем цепочку разностных уравнений

$x(1) = Bx(0) + y \Rightarrow x(1) = y,$
$x(2) = Bx(1) + f(1) \Rightarrow x(2) = By,$
$x(3) = Bx(2) + f(2) \Rightarrow x(3) = B(By) = B^2y,$
$\ldots$
$x(k) = Bx(k-1) + f(k-1) \Rightarrow x(k) = B^{k-1}y,$
$x(k+1) = Bx(k) + f(k) \Rightarrow x(k+1) = B^k y.$

Так как последовательность $x : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow X$ является ограниченной, то имеем

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} ||x(k+1)|| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} ||B^k f(0)|| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} ||B^k y|| < \infty,$$

откуда согласно принципу равномерной ограниченности получаем, что $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} ||B^k|| < \infty$. По определению 3 получаем, что оператор B является устойчивым. ■

При доказательстве теоремы был использован принцип равномерной ограниченности, который фигурирует во многих работах по функциональному анализу [Данфорд, Шварц, 1958; Рудин, 1973].

Определение 6. Оператор $B \in \mathrm{End}\, X$ называется *неустойчивым*, если он обратим, а оператор B^{-1} является устойчивым.

Теорема 2 может быть существенно усилена без добавления каких-либо дополнительных условий.

Теорема 3. Если уравнение (2) с начальным условием $x(0) = 0$ разрешимо для любой последовательности $f \in l_\infty$, тогда оператор B является асимптотически устойчивым.

□ Рассмотрим уравнение (2) вида

$$x(k+1) = (1+\alpha)Bx(k) + f(k),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Очевидно, что оператор $(1+\alpha)B \in \mathrm{End}X$ и для него будут выполняться условия теоремы 2, то есть он будет являться устойчивым. Тогда для произвольного $\tilde{M}_d > 0$ имеем равенство

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} ||(1+\alpha)^n B^n|| = \tilde{M}_d < \infty,$$

откуда получаем неравенство

$$||(1+\alpha)^n B^n|| \leq \tilde{M}_d,$$

а из него
$$|1+\alpha|^n||B^n|| \le \tilde{M}_d.$$
Данное неравенство преобразуется в
$$||B^n|| \le \frac{\tilde{M}_d}{(1+\alpha)^n},$$
правая часть которого обладает свойством
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{M}_d}{(1+\alpha)^n} = 0.$$
Отсюда имеем $\lim\limits_{n\to\infty} ||B^n|| = 0$, что и означает асимптотическую устойчивость оператора B по определению 4. ■

Следствие. Если выполняются условия теоремы 3, то спектральный радиус оператора B удовлетворяет неравенству
$$r(B) < 1.$$

Данное утверждение непосредственно вытекает из эквивалентности условий (4) и (5).

Список литературы
References

1. Баскаков А.Г. 1990. Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц. М., Функц. анализ и его прил., 24 (3): 64–65.
   Baskakov A.G. 1990. Wiener's theorem and the asymptotic estimates of the elements of inverse matrices. Moskow, Funct. Anal. Appl., 24 (3): 222–224.

2. Баскаков А.Г. 1992. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц. М., Матем. заметки, 52 (2): 17–26.
   Baskakov A.G. 1992. Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates of elements of inverse matrices. Moskow, Math. Notes, 52 (2): 764–771.

3. Баскаков А.Г. 1994. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов. М., Изв. РАН. Сер. матем., 58 (4): 3–32.
   Baskakov A.G. 1995. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. Moskow, Russian Acad. Sci. Izv. Math., 45(1): 1–31.

4. Баскаков А.Г. 1996. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов. М., Функц. анализ и его прил., 30 (3): 1–11.
   Baskakov A.G. 1996. Semigroups of Difference Operators in Spectral Analysis of Linear Differential Operators. Moskow, Func. analysis and its app., 30 (3): 149–157.

5. Баскаков А.Г. 1997. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. М., Изв. РАН. Сер. матем., 61(6): 3–26.
   Baskakov A.G. 1997. Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. Moskow, Izv. Math., 61(6): 1113–1135.

6. Баскаков А.Г. 2000. Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов. М., Матем. заметки, 67 (6): 816–827.
Baskakov A.G. 2000. Invertibility and the Fredholm property of difference operators. Moskow, Math. Notes, 67 (6): 690–698.

7. Баскаков А.Г. 2001. Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами. Казань, Изв. вузов. Матем., 45 (5):3–11.
Baskakov A.G. 2001. On the invertibility of linear difference operators with constant coefficients. Kazan, Russian Math. (Iz. VUZ), 45 (5): 1–9.

8. Баскаков А.Г., Пастухов А.И. 2001. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами. Новосибирск, Сиб. матем. журн., 42 (6): 1231–1243.
Baskakov A.G., Pastukhov A.I. 2001. Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients. Novosibirsk, Siberian Math. J., 42 (6): 1026–1035.

9. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. 2002. Линейные отношения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы. М., Функц. анализ и его прил., 36(4): 65–70.
Baskakov A.G., Chernyshov K.I. 2002. Linear Relations, Differential Inclusions, and Degenerate Semigroups. Moskow, Funct. Anal. Appl., 36(4): 306–310.

10. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. 2002. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. М., Матем. сб., 193(11): 3–42.
Baskakov A.G, Chernyshov K.I. 2002. Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups. Moskow, Sb. Math., 193 (11): 1573–1610.

11. Баскаков А.Г. 2009. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений. М., Изв. РАН. Сер. матем., 73 (2): 3–68.
Baskakov A.G. 2009. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. Moskow, Izv. Math., 73 (2): 215-=278.

12. Баскаков А.Г., Синтяев Ю.Н. 2010. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов: оценки решений. М., Дифференц. уравнения, 46 (2): 210–219.
Baskakov A.G., Sintyaev Yu.N. 2010. Finite-difference operators in the study of differential operators: Solution estimates. Moskow, Differ. Equ., 46 (2): 214–223.

13. Баскаков А.Г., Воробьев А.А., Романова М.Ю. 2011. Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова. М., Матем. заметки, 89 (2): 190–203.
Baskakov A.G., Vorobjev A.A., Romanova M.Yu. 2011. Hyperbolic Operator Semigroups and Lyapunov's Equation. Moskow, Math. Notes, 89 (2): 194–205.

14. Баскаков А.Г. 2013. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. М., УМН, 68 (1(409)): 77–128.
Baskakov A.G. 2013. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. Moskow, Russian Math. Surveys, 68 (1): 69–116.

15. Баскаков А.Г., Дуплищева А.Ю. 2015. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка. М., Изв. РАН. Сер. матем., 79 (2) (2015): 3–20.
Baskakov A.G., Duplishcheva A.Yu. 2015. Difference operators and operator-valued matrices of the second order. Moskow, Izv. Math., 79 (2): 217–232.

16. Бичегкуев М.С. 2008. Об ограниченных решениях разностных включений. Казань, Изв. вузов. Матем, 52 (8): 16–24.
Bichegkuev M.S. 2008. On bounded solutions of difference inclusions. Kazan, Russian Math. (Izv. VUZ), 52 (8): 12–19.

17. Бичегкуев М.С. 2009. Линейные разностные и дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах. М., Матем. заметки, 86 (5): 673–680.
Bichegkuev M.S. 2009. Linear difference and differential operators with unbounded operator coefficients in weight spaces. Moskow, Math. Notes, 86 (5-6): 637–644.

18. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. 1958. Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Вып. 3. М., Физматлит, 274.
Gelfand I.M., Shilov G.E. 1958. Obobshennie funkcii. Nekotorie voprosi teorii differentsialnyh uravnenii. Vyp. 3 [Generalized Functions, Vol. 3: Theory of Differential Equations]. Moscow, Fizmailit, 274.

19. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. 1970. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Наука, 534.
Daletskii Y.L., Krein M.G. 1970. Ustoichivost reshenii differentsialnyh uravnenii v banahovom prostranstve [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow, Nauka, 534.

20. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. 1962. Линейные операторы. Т. I. Общая теория, ИЛ, М. 896 с.
Danford N., Shwartz J. T. 1958. Linear operators Part I: General theory, Interscience Publishers. 896 pp.

21. Крейн М.Г. 1948. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости. М., УМН, 3 (3(25)): 166–169.
Krein M.G. 1948. O nekotoryx voprosax, svazannyx s krugom idei Lyapynova v teorii ustoichivosti [On some issues related to Lyapynov's ideas in stability theory]. Moskow, UMN, 3 (3(25)): 166–169.

22. Рудин У. 1975. Функциональный анализ. М., Мир, 443.
Rudin W. 1973. Functional analysis. New York-Dusseldorf-Johannesburg, McGraw-Hill Ser. Higher Math., xiii+397.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Авилов А.В. 2019. Теорема М.Г. Крейна для разностных уравнений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 417–423. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-417-423.

Avilov A.V. 2019. Krein theorem for difference equations. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 417–423 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-417-423.