УДК 517.9
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-387-401

ТЕОРЕМА ВИНЕРА В ИССЛЕДОВАНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

WIENER THEOREM FOR STUDYING ALMOST PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS

В.Е. Струков, И.И. Струкова

V.E. Strukov, I.I. Strukova

Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia

E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com, irina.k.post@yandex.ru

Аннотация

Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа непрерывных медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций. На основе знаменитой теоремы Винера вводится понятие множества, удовлетворяющего условию Винера. Рассматриваются различные подпространства непрерывных исчезающих на бесконечности (в различных смыслах) функций, не обязательно стремящихся к нулю на бесконечности. Например, функции, интегрально исчезающие на бесконечности, и функции, которые в свертке с любой функцией из множества, удовлетворяющего условию Винера, дают стремящуюся к нулю функцию. Вводятся пространства медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Доказывается, что все такие пространства совпадают с пространствами обычных медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций соответственно (вне зависимости от выбора подпространства исчезающих на бесконечности функций). Для почти периодических на бесконечности функций (относительно подпространства) приводятся четыре различных определения и доказывается их эквивалентность. Полученные результаты применены к исследованию свойств решений дифференциальных уравнений. Результаты статьи получены с существенным использованием теорий изометрических представлений и банаховых модулей.

Abstract

The article under consideration is devoted to some problems of harmonic analysis of continuous slowly varying and almost periodic at infinity functions. We consider a number of various subspaces of continuous functions disappearing at infinity. On the basis of the well-known Wiener theorem we introduce a concept of a set satisfying Wiener condition. We consider various subspaces of continuous functions vanishing at infinity in different senses, not necessarily tending to zero at infinity. For example, integrally vanishing at infinity functions and functions whose convolution with any function from the set satisfying Wiener condition give a function tending to zero at infinity. Then we construct the spaces of slowly varying and periodic at infinity functions with respect to any of those subspaces. The constructed spaces are proved to coincide with the ordinary spaces of slowly varying and periodic at infinity functions respectively (regardless of the choice of a subspace). For functions, almost periodic at infinity (with respect to a subspace) four various definitions are given and their equivalence is proved. The results are applied to the research of the properties of differential equations solutions. The results of the article are received with essential use of methods of isometric representations and Banach modules theories.

Ключевые слова: почти периодическая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, исчезающая на бесконечности функция, теорема Винера, дифференциальное уравнение, банахов модуль.
Key words: almost periodic at infinity function, slowly varying at infinity function, vanishing at infinity function, Wiener theorem, differential equation, Banach module.

1. Медленно меняющиеся на бесконечности функции относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов эквивалентности) функций со сверткой функций в качестве умножения $(f_1 * f_2)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_1(t-s)f_2(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$. Символом $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

В данной статье существенно используется следующая теорема Винера (см. [Гельфанд и др., 1946]):

Теорема 1. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Он совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$, если функции $\widehat{\varphi}$, $\varphi \in \mathcal{J}$, разделяют точки из $\mathbb{R}$, т. е. для любых чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ найдется функция $\varphi \in \mathcal{J}$ такая, что $\widehat{\varphi}(\lambda_1) \neq \widehat{\varphi}(\lambda_2)$.

Будем говорить, что подмножество $\mathcal{M}$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условию Винера,* если их преобразования Фурье разделяют точки из $\mathbb{R}$.

Лемма 1. Наименьший замкнутый идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащий множество $\mathcal{M}$, удовлетворяющее условию Винера, совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$.

□ Пусть $\mathcal{J}(\mathcal{M})$ — наименьший замкнутый идеал из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащий $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{J}(\mathcal{M}) = \overline{\{f * g, f \in L^1(\mathbb{R}), g \in \mathcal{M}\}}$. Покажем, что множество $\mathcal{J}(\mathcal{M})$ удовлетворяет условию Винера. Возьмем произвольные числа $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. В силу того, что множество $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию Винера, найдется функция $g \in \mathcal{M}$ такая, что $\widehat{g}(\lambda_1) \neq \widehat{g}(\lambda_2)$. Тогда для функции $\varphi \in \mathcal{J}(\mathcal{M})$ вида $\varphi = f * g$, где g — указанная функция из $\mathcal{M}$, а f — произвольная функция из $L^1(\mathbb{R})$, выполняется условие $\widehat{\varphi}(\lambda_1) \neq \widehat{\varphi}(\lambda_2)$. Тогда из теоремы следует, что $\mathcal{J}(\mathcal{M}) = L^1(\mathbb{R})$. ■

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X.

Рассматривается банахово пространство $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_0(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : \lim\limits_{|t| \to \infty} \|x(t)\| = 0\}$ — подпространство исчезающих на бесконечности функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$.

В банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим группу $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_b(\mathbb{R}, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), \quad x \in C_b(\mathbb{R}, X), \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Такие функции изучались в работах [Baskakov, Strukova, 2016; Баскаков, 2013; Баскаков, 2015; Баскаков, Калужина, 2012; Струкова, 2015; Струкова, 2016]. В частности, в [Баскаков, Калужина, 2012] установлено, что решения уравнения теплопроводности являются медленно меняющимися на бесконечности (по времени) функциями. В работах [Струков, Струкова, 2018а; Струков, Струкова, 2018б; Струкова, 2017] изучались медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции из однородных пространств (например, пространств Степанова, Гельдера, Лебега).

Примерами медленно меняющихся на бесконечности функций являются:

1) $x_1(t) = \sin\ln(1 + |t|)$, $t \in \mathbb{R}$; 2) $x_2(t) = \operatorname{arctg} t, t \in \mathbb{R}$;

3) любая непрерывно дифференцируемая функция $x \in C_b(\mathbb{R})$ со свойством $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dot{x}(t) = 0$.

Наряду с $C_0(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$ вида $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для всех $f \in \mathcal{M}\}$, где множество $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Винера. Такие функции также будем называть *исчезающими на бесконечности.*

Во всех рассматриваемых подпространствах из $C_b(\mathbb{R}, X)$ символ X опускается, если $X = \mathbb{C}$ (например, $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = C_0(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}; \mathcal{M}) = C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M})$).

Пример 1. Рассмотрим множество функций $\{f_\alpha,\ \alpha > 0\}$ из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Их преобразования Фурье имеют вид $\widehat{f_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\alpha + i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда для любого $\alpha > 0$ множество $\mathcal{M}_\alpha = \{f_\alpha\}$ удовлетворяет условию Винера.

Следующие функции принадлежат пространству $C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M}_\alpha)$:

1) $x_1(t) = e^{it^2}$;

2) $x_2(t) = \sin at^2$; 3) $x_3(t) = \cos at^2$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Выберем произвольное $\alpha > 0$ и покажем, что $x_1 \in C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M}_\alpha)$, т.е. что $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$. Действительно, $(f_\alpha * x_1)(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha(t-\tau)} e^{i\tau^2} d\tau = e^{\frac{i\alpha^2}{4}} e^{-\alpha t} \int\limits_{-\frac{i\alpha}{2}}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau.$

Вычислим последний интеграл отдельно: $\int\limits_{-\frac{i\alpha}{2}}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = \int\limits_{-\frac{i\alpha}{2}}^{0} e^{i\tau^2} d\tau + \int\limits_0^\infty e^{i\tau^2} d\tau =$ $\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\ erf\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}$, где символом erf обозначена функция ошибок, задаваемая формулой $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\tau^2} d\tau$, $z \in \mathbb{C}$. Отсюда получаем, что

$$(f_\alpha * x_1)(t) = e^{-\alpha t} e^{\frac{i\alpha^2}{4}} \left(\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}\right),\ t \in \mathbb{R},\ \text{т.е. } f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R}).$$

Пример 2. Если в качестве множества $\mathcal{M}$ взять всю алгебру $L^1(\mathbb{R})$, то множество $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ будет иметь вид $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : \lim\limits_{\alpha\to\infty} \|\frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\alpha x(s+t) ds\| = 0$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}\}$.

Покажем это, т.е. для любой функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ докажем эквивалентность следующих двух условий:

1) $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \|\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha x(s+t)ds\| = 0$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$;

2) $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Рассмотрим множество $\mathcal{M} = \{f_\alpha, \alpha > 0\}$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & t \in [0, \alpha], \\ 0, & t \notin [0, \alpha], \end{cases}$$

каждая из которых имеет преобразование Фурье вида $\widehat{f_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda\alpha}(1 - e^{-i\lambda\alpha})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда условие 1) можно записать в виде $f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $\alpha > 0$.

Поскольку преобразования Фурье $\widehat{f_\alpha}$ функций f_α, $\alpha > 0$, разделяют точки из $\mathbb{R}$, то множество $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию Винера. Следовательно, из леммы вытекает, что $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Если выполнено свойство 2), то $g_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любой направленности $(g_\alpha, \alpha > 0)$ из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, в частности, для $(f_\alpha, \alpha > 0)$, т.е. выполнено свойство 1).

Определение 2. Далее символом $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое (с нормой из C_b) подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, обладающих свойствами:

1) $S(t)x \in \mathcal{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой функции $x \in \mathcal{C}_0$;

2) $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$, где множество $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Винера;

3) $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Каждое такое подпространство будем называть подпространством *исчезающих на бесконечности функций.*

Примерами таких подпространств являются определенные ниже подпространства $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ и $C_{0,p}(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$.

Функцию x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ назовем *интегрально исчезающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\, ds = 0.$$

Множество интегрально исчезающих на бесконечности функций будем обозначать символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. В работе [Баскаков и др., 2018] были введены почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего условию $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим также семейство замкнутых в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ подпространств

$$C_{0,p} = C_{0,p}(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X) : \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|^p\, ds = 0\},$$

где $p \in [1, \infty)$. Таким образом, $C_{0,1}(\mathbb{R}, X) = C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ — подпространство интегрально исчезающих на бесконечности функций.

Пусть $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2.

Определение 3. Функцию $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ будем называть *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Непосредственно из определения следует, что любое пространство $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ является замкнутым подпространством в $C_b(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим множество $C_{sl,\infty}(\mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}\}$, где множество $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Винера. Из определений 2 и 3 следует, что $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$ для любого подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего условиям определения 2.

Далее нам потребуется определение ограниченной аппроксимативной единицы [Баскаков, Криштал, 2005] алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Определение 4. Ограниченная последовательность $(e_n,\ n \geq 1)$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется *ограниченной аппроксимативной единицей (о.а.е.)* алгебры $L^1(\mathbb{R})$, если выполняются два свойства:

1) $\widehat{e}_n(0) = 1$ для всех $n \geq 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} e_n * f = f$ для всех f из $L^1(\mathbb{R})$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2. Тогда $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

□ Достаточно доказать равенство $C_{sl,\infty}(\mathcal{M}) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Включение $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $x \in C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$, тогда $\psi = S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$, т.е. $f * \psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для всех $f \in \mathcal{M}$. Пусть $(e_n,\ n \geq 1)$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Из леммы следует, что

$$e_n * \psi = e_n * (S(\alpha)x - x) = S(\alpha)(e_n * x) - (e_n * x) \in C_0(\mathbb{R}, X),$$

откуда получаем, что $y = e_n * x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, а, значит, и $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. ■

2. Банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули и спектр Берлинга. Почти периодические векторы

В данном разделе будут приведены некоторые определения и факты из теории банаховых модулей, существенно используемые в дальнейшем.

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство и $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

Будем считать, что $\mathcal{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем [Баскаков, Криштал, 2005; Хьюитт, Росс, 1975], структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предложения:

Предположение 1. Для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ выполняются следующие условия:

1) из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathcal{X}$ — нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathcal{X}$);

2) для всех $x \in \mathcal{X}$ имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathcal{X}$ с представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$):

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x),\ t \in \mathbb{R},\ f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Если $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in \mathcal{X} \tag{2}$$

определяет на $\mathcal{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением T.

Замечание 1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем $\mathcal{X}$ ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ [Баскаков, Криштал, 2005]. Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение $(\mathcal{X}, T)$.

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей изложена в [Baskakov, Krishtal, 2016; Баскаков, 1978; Баскаков, 2004; Баскаков, 2016; Баскаков, Криштал, 2005; Хьюитт, Росс, 1975].

Определение 5. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ назовем *непрерывным* (относительно представления T) или *T-непрерывным*, если функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}_c$ или $(\mathcal{X}, T)_c$. Оно образует замкнутый *подмодуль* из $\mathcal{X}$, т. е. $\mathcal{X}_c$ — замкнутое линейное подпространство из $\mathcal{X}$, инвариантное относительно всех операторов $T(f), T(t)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

Пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (2), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_b(\mathbb{R}, X)$.

Далее символом $\mathcal{Y}$ обозначим фактор-пространство $C_b(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, являющееся банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y \in x + \mathcal{C}_0} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + \mathcal{C}_0$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. В пространстве $\mathcal{Y}$ действует сильно непрерывная группа изометрий $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{Y}$ вида $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x}$, $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{x} \in \mathcal{Y}$.

Тогда структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля на $\mathcal{Y}$ [Баскаков, 2013; Баскаков, Криштал, 2005; Баскаков и др., 2018] определяется с помощью представления $\widetilde{S}$ и задается формулой $f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\widetilde{x}\, d\tau$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widetilde{x} \in \mathcal{Y}$.

Определение 6. *Спектром Берлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида

$$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ с } \widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}.$$

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R}\backslash\{\mu_0 \in \mathbb{R} :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства X [Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005]:

Лемма 2. Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы свойства:

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т. е. $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathcal{X}$ невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (\operatorname{supp}\widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;

4) $fx = 0$, если $(\operatorname{supp}\widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x = e^{i\lambda_0 t}x$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. x — собственный вектор банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$;

6) если вектор $x \in \mathcal{X}$ имеет компактный спектр Берлинга $\Lambda(x)$ со спектральным радиусом $r(x) = \max\limits_{\lambda \in \Lambda(x)} |\lambda|$, то функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ вида $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа, равного $r(x)$ (т.е. $\overline{\lim\limits_{|z|\to\infty}} \frac{\ln\|\varphi_x(z)\|}{|z|} = r(x)$).

Определение 7. Вектор x_0 из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$ называется *почти периодическим* (относительно представления T), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega(x_0, \varepsilon) = \{\omega \in \mathbb{R} : \|T(\omega)x_0 - x_0\| < \varepsilon\}$, называемое множеством *ε-периодов* вектора x_0, относительно плотно на $\mathbb{R}$ (множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется *относительно плотным на* $\mathbb{R}$, если существует число $l > 0$ такое, что любой промежуток $[t, t+l]$, $t \in \mathbb{R}$, содержит хотя бы одну точку множества Ω);

2) орбита $\{T(t)x_0, t \in \mathbb{R}\}$ вектора x_0 предкомпактна в $\mathcal{X}$;

3) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0$, $t \in \mathbb{R}$, — непрерывная почти периодическая функция, т. е. $\varphi \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ [Баскаков, 2004; Левитан, Жиков, 1978];

4) для любого $\varepsilon > 0$ существуют вещественные числа $\lambda_1, ..., \lambda_N$ и собственные векторы $x_1, ..., x_N$ представления T, соответствующие этим числам (т. е. $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq N$) такие, что $\|x_0 - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k\| < \varepsilon$.

Множество $AP(\mathcal{X}) = AP(\mathcal{X}, T)$ почти периодических векторов из $\mathcal{X}$ образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$ и является замкнутым подмодулем из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$. Кроме того, имеет место включение $AP(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_c$. Приводимые понятия и результаты содержатся в работах [Баскаков, 2004; Баскаков, 2013; Баскаков, 2015].

3. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$

Сформулируем определения почти периодической на бесконечности функции и определения почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющего всем условиям определения 2.

Первое определение, используемое в данной работе, основано на понятии ε-периода на бесконечности. Оно соответствует классическому определению Бора почти периодической функции (см. [Левитан, Жиков, 1978]).

Определение 8. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}_+$ называется *ε-периодом функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности*, если существует число $\alpha(\varepsilon) \geq 0$ такое, что $\sup\limits_{|t|\geq\alpha(\varepsilon)} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon$.

Множество ε-периодов функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности обозначим символом $\Omega_\infty(x; \varepsilon)$.

Определение 9. Множество Ω из $\mathbb{R}$ называется *относительно плотным* на $\mathbb{R}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \varnothing$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 10. Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \varepsilon)$ ее ε-периодов относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Из определений 8, 10 следует, что каждая непрерывная функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ почти периодическая по Бору (в обычном смысле; см. [Левитан, Жиков, 1978]) является почти периодической на бесконечности. Множество классических почти периодических функций обозначим символом $AP(\mathbb{R}, X)$, а множество почти периодических на бесконечности — символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Приведем второе (эквивалентное; см. [Баскаков и др., 2018]) определение почти периодической на бесконечности функции:

Определение 11. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и функции $x_1, \ldots, x_N$ из $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

В работе [Баскаков и др., 2018] изучались почти периодические на бесконечности функции относительно подпространств $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. В этой работе были введены четыре определения таких функций и доказана их эквивалентность. Для $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) = C_0(\mathbb{R}, X)$ определения 10 и 11 совпадают с определениями 7 и 10 из [Баскаков и др., 2018] соответственно.

В данной работе мы приведем аналогичные им определения почти периодической на бесконечности функции относительно более широкого набора подпространств $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющих определению 2, докажем их эквивалентность и покажем, что все эти пространства совпадают с пространством $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Определение 12. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}_+$ называется *ε-периодом функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $x_0 \in \mathcal{C}_0$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$.

Множество ε-периодов функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$. Если $\mathcal{C}_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$, то определение 12 эквивалентно определению 8.

Определение 13. Функция x из $C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$ ее ε-периодов относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Непосредственно из определения 3 следует, что если $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) = \mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$, то $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Таким образом, имеет место включение $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$.

Определение 14. Множество функций $\mathcal{M} \subset C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *предкомпактным на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $b_1, \dots, b_N$ (ε-сеть на бесконечности) из $\mathcal{M}$ таких, что для любой функции $x \in \mathcal{M}$ существует функция $b_k, k \in \{1, \dots, N\}$, и функция $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, для которых имеет место оценка $\|x - b_k - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Определение 15. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если множество ее сдвигов $S(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, является предкомпактным на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Заметим, что функции вида $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t}$, $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, (обобщенные тригонометрические полиномы) почти периодичны на бесконечности в смысле определения 15.

Определение 16. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функции $x_1, \dots, x_N$ из пространства $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ такие, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Определение 17. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \in \mathcal{X}$ является почти периодическим вектором в $\mathcal{X} = C_b(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ относительно изометрического представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$.

Почти периодические на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$) впервые были введены в рассмотрение в статьях [Баскаков, 2013; Баскаков, 2015]. При этом использовалось определение, аналогичное определению 17. Основные результаты этих статей были связаны с асимптотическим поведением ограниченных полугрупп операторов. В работах [Baskakov, Strukova, 2016; Струкова, 2015; Струкова, 2016] изучались периодические на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$). В [Струков, Струкова, 2018б] изучались почти периодические на бесконечности функции из однородных пространств.

Теорема 3. Все определения почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ (определения 13, 15, 16, 17) эквивалентны.

□ Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и определенную выше группу изометрий $T = \widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$. Для этого представления определение 16 соответствует свойству 4) из определения 7. Поскольку все свойства из определения 7 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 13, 15 и 16 соответственно.

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $\widetilde{x}$ — класс эквивалентности в $\mathcal{X}$, построенный по функции x. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\widetilde{x}, \varepsilon)$ ε-периодов класса $\widetilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 15 и свойства 2) определения 7 непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 16 и свойства 3) из определения 7. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\widetilde{y})$ класса эквивалентности $\widetilde{y} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{y} = y + \mathcal{C}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ представима в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$.

Если $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (см. свойство 5) из леммы). Следовательно, $\Lambda(\widetilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathbb{R}$, и поэтому $\widetilde{S}(t)\widetilde{y}_0 = \widetilde{y}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. $y_0 \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$.

И обратно: если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$, $t \in \mathbb{R}$, и поэтому в силу свойства 5) из леммы получим, что $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$. ■

Теорема 4. Пусть $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2. Тогда $AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) = AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

□ В силу эквивалентности всех четырех определений почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для доказательства можно взять любое из них. Пусть функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ удовлетворяет определению 16, т. е. $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Тогда в силу теоремы она удовлетворяет и определению 11, т. е. $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. ■

4. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений

Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный ограниченный оператор с областью определения $D(A)$, являющийся генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax + \psi, \tag{3}$$

где $\psi \in C_b(\mathbb{R}, X)$. *Классическим решением* дифференциального уравнения (3) называется дифференцируемая функция $x : \mathbb{R} \to X$ такая, что $x(t) \in D(A)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, и удовлетворяющая уравнению (3) для всех $t \in \mathbb{R}$.

Сформулируем два определения слабого решения (mild solution) дифференциального уравнения (3), где $\psi \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Определение 18. Непрерывная функция $x : \mathbb{R} \to X$ называется *слабым решением* дифференциального уравнения (3), если функция $z : \mathbb{R} \to X$, $z(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$, $t \in \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами:

1) $z(t) \in D(A)$ для любого $t \in \mathbb{R}$;

2) $x(t) - x(0) = Az(t) + \int\limits_0^t \psi(s)\,ds,\ t \in \mathbb{R}$.

Определение 19. Непрерывная функция $x : \mathbb{R} \to X$ называется *слабым решением* дифференциального уравнения (3), если для всех $s, t \in \mathbb{R}$, $s \le t$,, имеют место равенства

$$x(t) = U(t-s)x(s) + \int\limits_s^t U(t-\tau)\psi(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Оба определения слабого решения уравнения (3) эквивалентны [Arendt и др. 2011].

В банаховом пространстве $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A : D(\mathcal{L}) \subset C_{b,u} \to C_{b,u}. \tag{5}$$

Определение 20. Функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ отнесем к *области определения* $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$, если существует функция $\psi \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такая, что для всех $s \le t$ из $\mathbb{R}$ имеют место равенства (5).

Для $x \in D(\mathcal{L})$ мы положим $\mathcal{L}x = \psi$, если x и ψ удовлетворяют равенствам (5). Такое определение оператора $\mathcal{L}$ использовалось в работах [Baskakov, Krishtal, 2016; Баскаков, 1978; Баскаков, 2013].

Далее символом $S(f) : C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \to C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ обозначим оператор свертки

$$S(f)x = f * x$$

функции $x \in C_{b,u}$ с функцией f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

В [Baskakov, Krishtal, 2016] установлена следующая теорема о перестановочности операторов $S(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, с оператором $\mathcal{L}$.

Теорема 5. Для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любой функции x из $D(\mathcal{L})$ функция $S(f)x$ принадлежит $D(\mathcal{L})$ и имеет место равенство $\mathcal{L}S(f)x = S(f)\mathcal{L}x$.

В дальнейшем будет использоваться следующая

Теорема 6. (Баскаков и др., 2018) Пусть функция ψ из уравнения (3) принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X)$ и множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ не имеет предельных точек на $i\mathbb{R}$. Тогда каждое ограниченное слабое решение $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ дифференциального уравнения (3) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $i\lambda_1, \dots, i\lambda_m \in \sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ и функции $x_1, \dots, x_m$ из $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^m x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon,$$

причем $x(t) = \sum\limits_{k=1}^m x_k(t) e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$ — конечное множество.

Следствие 1 (Баскаков и др., 2018)**.** Пусть X — конечномерное банахово пространство, A — оператор из $\operatorname{End} X$ и $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$.Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (3) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} x_k(t)e^{i\lambda_k t},\ x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X),\ t \in \mathbb{R},$$

если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$.

На основе указанных выше результатов была получена следующая

Лемма 3. Пусть X — конечномерное банахово пространство, A — оператор из $\operatorname{End} X$ и $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$.Тогда для любого ограниченного решения $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (3) и любой функции $f \in \mathcal{M}$ функция $y = f * x$ принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m} y_k(t)e^{i\lambda_k t},\ y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X),\ t \in \mathbb{R},$$

если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$.

□ Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — ограниченное решение дифференциального уравнения (3) с функцией $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$. Тогда в силу теоремы для любой функции $f \in \mathcal{M}$ справедливо равенство

$$f * \dot{x} = A(f * x) + f * \psi.$$

Из условия $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ следует, что функция $\varphi = f * \psi$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$. Тогда из следствия 1 вытекает, что при условии $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$ функция $y = f * x$ принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. ■

Из теоремы и леммы следует

Теорема 7. Пусть X — конечномерное банахово пространство, A — оператор из $\operatorname{End} X$ и $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$.Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (3) принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} x_k(t)e^{i\lambda_k t},\ x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X),\ t \in \mathbb{R},$$

если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$.

□ Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — ограниченное решение дифференциального уравнения (3) с функцией $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$. Тогда в силу леммы для любой функции $f \in \mathcal{M}$ функция $y = f * x$ принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. Пусть $(e_n,\ n \in \mathbb{N})$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Из леммы следует, что $e_n * x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$, а, значит, и $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. ■

Аналогичным образом [Баскаков и др., 2018] доказывается следующая

Теорема 8. Пусть функция ψ из уравнения (3) принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ и множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ не имеет предельных точек на $i\mathbb{R}$. Тогда каждое ограниченное слабое решение $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ дифференциального уравнения (3) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $i\lambda_1, \dots, i\lambda_m \in \sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ и функции $x_1, \dots, x_m$ из $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{m} x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon,$$

причем $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k(t)e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$ — конечное множество.

Непосредственно из определения 2 следует, что теоремы и остаются справедливыми, если функция ψ принадлежит любому из подпространств $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющих условиям определения 2.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097, работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00732 А.

The first author was supported by RFBR according to the research project no. 18-31-00097 and the second author was supported by RFBR according to the research project no. 19-01-00732 A.

Список литературы
References

1. Баскаков А.Г. 1978. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений. Матем. заметки. 24(2) : 195–206.
   Baskakov A. G. 1978. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. Math. Notes. 24(1–2) : 606–612. (in Russian).

2. Баскаков А.Г. 2004. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. СМФН. 9 : 3–151.
   Baskakov A.G. 2006. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. J. Math. Sci. (N. Y.) 137(4) : 4885–5036.

3. Баскаков А.Г. 2013. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. УМН. 68(1) : 77–128.
   Baskakov A.G. 2013. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. Russian Mathematical Surveys. 68(1) : 69–116.

4. Баскаков А.Г. 2015. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве. Матем. заметки. 97(2) : 174–190.
   Baskakov A.G. 2015. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. Math. Notes. 97(2) : 164–178.

5. Баскаков А.Г. 2016. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. Воронеж: Изд. дом ВГУ, 152.
   Baskakov A.G. 2016. Harmonic analysis in Banach modules and linear operators spectral theory. Voronezh: VSU, 152.

6. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. 2012. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений. Матем. заметки. 92(5) : 643–661.
   Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. 2012. Beurling's Theorem for Functions with Essential Spectrum from Homogeneous Spaces and Stabilization of Solutions of Parabolic Equations. Math. Notes. 92(5) : 587–605.

7. Баскаков А.Г., Криштал И.А. 2005. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства. Изв. РАН. Серия матем. 69(3) : 3–54.
Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2005. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. Izv. Math. 69(3) : 439–486.

8. Баскаков А.Г., Струкова И.И., Тришина И.А. 2018. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Сиб. матем. журн. 59(2) : 293–308.
Baskakov A.G., Strukova I.I., Trishina I.A. 2018. Solutions almost periodic at infinity to differential equations with unbounded operator coefficients. Siberian Math. J. 59(2) : 231–242.

9. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. 1946. Коммутативные нормированные кольца. УМН. 1(2) : 48–146.
Gelfand I.M., Raikov D.A., Shilov G.E. 1946. Commutative Normed Rings. UMN. 1(2) : 48–146. (in Russian).

10. Левитан Б.М, Жиков В.В. 1978. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: МГУ, 206.
Levitan B.M., Zhikov V.V. 1978. Almost periodic functions and differential equations. Cambridge University Press, 224.

11. Струков В.Е., Струкова И.И. 2018 а. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях. Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. № 4 : 195–205.
Strukov V. E., Strukova I. I. 2018 a. About slowly varying and periodic at infinity functions from homogeneous spaces and harmonic distributions. Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika. № 4 : 195–205. (in Russian).

12. Струков В.Е., Струкова И.И. 2018 б. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. 50(3) : 254–264.
Strukov V.E., Strukova I.I. 2018 b. About four definitions of almost periodic at infinity functions from homogeneous space. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. 50(3) : 254–264. (in Russian).

13. Струкова И.И. 2015. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы. Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. № 3 : 161–165.
Strukova I.I. 2015. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika. № 3 : 161–165. (in Russian).

14. Струкова И.И. 2016. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций. Сиб. матем. журн. 57(1) : 186–198.
Strukova I.I. 2016. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. Siberian Math. J. 57(1) : 186–198. (in Russian).

15. Струкова И.И. 2017. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в однородных пространствах. Вестник ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика. № 2(39) : 29–38.
Strukova I.I. 2017. Harmonic analysis of periodic at infinity functions in homogeneous spaces. Vestnik VolGU. Ser. 1. Matematika. Fizika. № 2(39) : 29–38. (in Russian).

16. Хьюитт Э., Росс К.А. 1975. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. М.: Мир, 899.
Hewitt E., Ross K.A. 1963. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Springer, 771.

17. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. 2011. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Birkhäuser, Monographs in Mathematics. Vol. 96. 553 p.
Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. 2011. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Birkhäuser, Monographs in Mathematics. Vol. 96. 553 p.

18. Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2016. Spectral Analysis of Abstract Parabolic Operators in Homogeneous Function Spaces. Mediterranean Journal of Mathematics. 13(5) : 2443–2462.
Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2016. Spectral Analysis of Abstract Parabolic Operators in Homogeneous Function Spaces. Mediterranean Journal of Mathematics. 13(5) : 2443–2462.

19. Baskakov A., Strukova I. 2016. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J. 7(4) : 9–29.
Baskakov A., Strukova I. 2016. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J. 7(4) : 9–29.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Струков В.Е., Струкова И.И. 2019. Теорема Винера в исследовании почти периодических на бесконечности функций. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 387–401. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-387-401.

Strukov V. E., Strukova I.I. 2019. Wiener theorem for studying almost periodic at infinity functions. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 387–401 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-387-401.