МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 519.63
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-347-365

СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

GRID METHODS FOR SOLVING NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE CONVECTION-DIFFUSION EQUATION OF FRACTIONAL ORDER WITH DEGENERATION

М.Х. Бештоков, В.А. Водахова

M.KH. Beshtokov, V.A. Vodakhova

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
Россия , 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89-A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia

Кабардино-Балкарский государственный университет
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevskogo St., Nalchik, 360000, Russia

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru, E-mail: vodahova@yandex.ru

Аннотация

В работе исследуются нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с вырождением. Основной результат работы заключается в получении методом энергетических неравенств априорных оценок в дифференциальной и разностной трактовках для решения рассматриваемых задач. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения относительно начальных данных и правой части, а также сходимость приближенного решения к точному решению рассматриваемой дифференциальной задачи.

Abstract

In this paper we study nonlocal boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order with degeneration. The main result of the work is to obtain by the method of energy inequalities a priori estimates in differential and difference interpretations for solving the problems under consideration. From the obtained estimates, the uniqueness and stability of the solution with respect to the initial data and the right part, as well as the convergence of the approximate solution to the exact solution of the differential problem under consideration, follow.

Ключевые слова: нелокальные краевые задачи, априорная оценка, разностная схема, уравнение конвекции-диффузии, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.

Key words: nonlocal boundary-value problem, a priori estimate, difference scheme, the equation of convection-diffusion differential equation of fractional order, Caputo fractional derivative.

Введение

Нелокальными задачами принято называть такие задачи, в которых вместо обычных точечных («локальных») граничных условий задаются условия, связывающие значения искомого решения и (или) его производных в различных точках границы, либо же в точках границы и в каких-либо внутренних точках. К первым работам с неклассическими граничными условиями относятся, по-видимому, работы [Canon J.R. 1963], [Камынин Л.А. 1964] и [Чудновский А.Ф. 1969], [Чудновский А.Ф. 1976]. Современное естествознание, в основном физические приложения, требовали дальнейшего развития неклассических краевых задач и, в первую очередь, задач с нелокальными условиями. Различные классы нелокальных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изучались в работах [Бицадзе А.В. 1984], [Водахова В.А. 1983], [Водахова В.А. 2008], [Гулин А.В. и др. 2001], [Ионкин Н.И. 1977], [Нахушев А.М. 1978].

Особый интерес в теории дифференциальных уравнений представляют краевые задачи с интегральными условиями, которым и посвящена данная статья. В работе [Кожанов А.И. 2004] рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения

$$L_\nu(u) \equiv u_t - u_{xx} - \nu u_{xxt} + c(x,t)u = q(x,t)$$

с краевыми условиями

$$u(0,t) = \alpha(t)u(1,t) + \int_0^t h(t,\tau)u(1,\tau)d\tau, \quad 0 < t < T, \tag{$*$}$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1.$$

Заметим, что в одной из рассматриваемых нами в данной работе нелокальной задаче содержится нелокальное граничное условие интегрального вида (*).

В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами которых могут служить полимерные материалы [Бэгли Р.Л., Товик П. Дж. 1984], сильно пористые среды [Динариев О.Ю. 1990]. К первым работам по теории дифференциальных уравнений дробного порядка следует отнести работы L. O'Shaughnessy, S. Mandelbrojt [O'Shaughnessy L. 1918], [Mandelbrojt S. 1925]. При решении таких задач возникла необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной [Малышаков А.В. 1992], [Шефер Д., Кефер К. 1988]. В монографиях [Самко С.Г. и др. 1987], [Нахушев А.М. 2000] дан достаточно полный обзор работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. Уравнениям переноса в средах с фрактальной геометрией посвящены ряд интересных работ [Чукбар К.В. 1995], [Кочубей А.Н. 1990], [Нигматуллин Р.Р. 1992].

Настоящая работа посвящена численным методам решения нелокальных краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами с вырождением. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решения рассматриваемых задач. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения относительно начальных данных и правой части. В силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать, что приближенное решение сходится к точному решению рассматриваемой дифференциальной задачи.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [Алиханов А.А. 2010], [Alikhanov A. A. 2015], [Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. 2006], [Бештоков М.Х. 2018 а], [Бештоков М.Х. 2019], [Бештоков М.Х. 2018 б]. В работе [Алиханов А.А. 2010] получены результаты, позволяющие применять метод энергетических неравенств для получения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках, как и в классическом случае ($\alpha = 1$). В работе [Alikhanov A. A. 2015] предложен новый разностный аналог дробной производной Капуто, аппроксимирующий дробную производную Капуто с порядком $O(\tau^{3-\alpha})$. Работы [Бештоков М.Х. 2018 а], [Бештоков М.Х. 2019], [Бештоков М.Х. 2018 б] посвящены численным методам решения различных краевых задач для уравнения влагопереноса дробного порядка. Получены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках.

1. Постановка нелокальной краевой задачи A

В цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t)\,,\ 0 < x < l\,,\ 0 < t \le T\,, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m k(x,t)u_x(x,t) = 0\,,\ 0 \le t \le T\,, \tag{2}$$

$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta(t)\int_0^l x^m u(x,t)dx - \mu(t)\,,\ 0 \le t \le T\,, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\ 0 \le x \le l\,, \tag{4}$$

где

$$0 < c_0 \le k(x,t) \le c_1\,,\ |r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), q(x,t)\,, \beta(t)| \le c_2,\ 0 \le m \le 2\,, \tag{5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau$, — дробная производная в смысле Капуто порядка α, где $0 < \alpha < 1$ [Самко С.Г. и др. 1987], $c_i, i = 0,1,2$ — положительные числа.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (2), равносильному в свою очередь тождеству $k(x,t)u_x(0,t) = 0$ [Самарский А.А. 1983, стр. 173], если функции $r(0,t), q(0,t), f(0,t)$ конечны.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1) – (4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа M_i, $i=1,2,...$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи. Справедливы следующие [Алиханов А.А. 2010] утверждения.

Лемма 1. Для любой абсолютно непрерывной на $[0,T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство

$$v(t)\partial_{0t}^{\alpha}v(t)\geq\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}v^2(t),\quad 0<\alpha<1\,.$$

Лемма 2. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из [0,T] неравенству

$$\partial_{0t}^{\alpha}y(t)\leq c_1y(t)+c_2(t),\ 0\leq\alpha\leq1\,,$$

где $c_1>0$, $c_2(t)-$суммируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t)\leq y(0)E_{\alpha}(c_1t^{\alpha})+\Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1t^{\alpha})D_{0t}^{-\alpha}c_2(t)\,,$$

где $E_{\alpha}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}-$ функции Миттаг-Леффлера.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1)-(4) в дифференциальной форме умножим уравнение (1) скалярно на $x^m u$:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u,x^mu\Big)=\Big(\big(x^mku_x\big)_x,u\Big)+\Big(ru_x,x^mu\Big)-\Big(qu,x^mu\Big)+\Big(f,x^mu\Big)\,,\tag{6}$$

где $\Big(u,v\Big)=\int_0^l uvdx$, $\Big(u,u\Big)=\|u\|_0^2$, где $u,v-$ заданные на $[0,l]$ функции.

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (6), пользуясь неравенством Коши с ε [Самарский А.А. 1983, стр. 100] и Леммой 1:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u,x^mu\Big)\geq\frac{1}{2}\Big(x^m,\partial_{0t}^{\alpha}u^2\Big)\geq\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\,,\tag{7}$$

$$\Big(\big(x^mku_x\big)_x,u\Big)=\int_0^l u\Big(x^mku_x\Big)_xdx=x^muku_x|_0^l-\int_0^l x^mku_x^2dx,\tag{8}$$

$$\Big(ru_x,x^mu\Big)\leq\frac{c_2^2}{4\varepsilon}\int_0^l(x^{\frac{m}{2}}u)^2dx+\varepsilon\int_0^l(x^{\frac{m}{2}}u_x)^2dx\leq\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\frac{c_2^2}{4\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\,.\tag{9}$$

$$-\Big(qu,x^mu\Big)=-\int_0^l x^mqu^2dx\leq c_2\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\,,\tag{10}$$

$$\Big(f,x^mu\Big)\leq\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2\leq\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2.\tag{11}$$

Принимая во внимание преобразования (7)-(11), из (6) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+c_0\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\leq x^muku_x|_0^l+\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+M_1^{\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2\,.\tag{12}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (12) с учетом (2),(3)

$$x^m uku_x|_0^l = l^m u(l,t)\Big(\mu(t) - \beta(t)\int_0^l x^m u(x,t)dx\Big) =$$

$$= l^m\mu(t)u(l,t) - l^m\beta(t)u(l,t)\int_0^l x^m u(x,t)dx \le M_2u^2(l,t) + \frac{1}{2}\mu^2(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\int_0^l x^m u(x,t)dx\Big)^2 \le \varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + M_3^\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \frac{1}{2}\mu^2(t)\,. \tag{13}$$

С учетом (13), из (12) получаем

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + c_0\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le \varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + M_4^\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + M_5\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big). \tag{14}$$

При $\varepsilon = \dfrac{c_0}{2}$ из (14) находим

$$\partial_{0t}^\alpha\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M_6\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + M_7\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big). \tag{15}$$

Тогда, применяя к обеим частям (15) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M_8D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+M_9\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu^2(t)\Big)+\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\Big). \tag{16}$$

С помощью Леммы 2 из (16) получим априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\right), \tag{17}$$

где $M-$ положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (1)-(4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}-$ дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0<\alpha<1$.

Теорема 1. Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}\big(Q_T\big)$ $\cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (5), тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1)-(4) справедлива априорная оценка (17), откуда следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|x^{\frac{m}{2}}u\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2$.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1)-(4) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащие односторонние производные, учитывающие знак $r(x,t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1) следующее уравнение с возмущенными коэффициентами

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\varkappa}{x^m}\Big(x^mk(x,t)u_x\Big)_x + r(x,t)u_x - qu + f(x,t), \tag{18}$$

где $\varkappa = \dfrac{1}{1+R}$, $R = \dfrac{0.5h|r|}{k}-$ разностное число Рейнольдса.

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)-(4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\Big((h^2+\tau^2)/x\Big)$:

$$\overline{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_i=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5}a^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5}a^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\Big)-d^j_iy^{(\sigma)}_i+\varphi^j_i, \quad (19)$$

$$\varkappa_0a_1y^{(\sigma)}_{(x,0)}=\frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0+d_0y^{(\sigma)}_0\Big)-\mu_1,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0, \quad (20)$$

$$-\varkappa_Na_Ny^{(\sigma)}_{\bar{x},N}=\tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N}x^m_iy^{(\sigma)}_i\hbar+0.5hd_Ny^{(\sigma)}_N+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N-\mu_2\,,\ x=N\,, \quad (21)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h\,,\ t=0\,, \quad (22)$$

где $\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\dfrac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum\limits_{s=0}^{j}c^{(\alpha,\sigma)}_{j-s}y^s_t$–дискретный аналог дробной производной Капуто порядка $\alpha, 0<\alpha<1$ [Alikhanov A. A. 2015]

$$a^{(\alpha.\sigma)}_0=\sigma^{1-\alpha},\ a^{(\alpha,\sigma)}_l=\Big(l+\sigma\Big)^{1-\alpha}-\Big(l-1+\sigma\Big)^{1-\alpha},\ l\geq1,\quad \sigma=1-\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$b^{(\alpha,\sigma)}_l=\frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha}-(l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big]-\frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha}+(l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big],\ l\geq1\,,$$

$$\text{при } j=0,\quad c^{(\alpha,\sigma)}_0=a^{(\alpha,\sigma)}_0\,;$$

$$\text{при } j>0,\quad c^{(\alpha,\sigma)}_s=\begin{cases}a^{(\alpha,\sigma)}_0+b^{(\alpha,\sigma)}_1,\ s=0\,,\\ a^{(\alpha,\sigma)}_s+b^{(\alpha,\sigma)}_{s+1}-b^{(\alpha,\sigma)}_s,\ 1\leq s\leq j-1\,,\\ a^{(\alpha,\sigma)}_j-b^{(\alpha,\sigma)}_j,\ s=j\,,\end{cases}$$

$$c^{(\alpha,\sigma)}_s>\frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha}>0,\ a^j_i=k(x_{i-0.5},t^{j+\sigma}),\ b^{\pm j}_i=\frac{\overline{\varkappa}_ir^{\pm j+\sigma}_i}{k^{j+\sigma}_i},$$

$$\tilde{\beta}=\tilde{\varkappa}\beta^{j+\sigma},\ \mu_1=\frac{0.5h}{m+1}\varphi^j_0,\quad \mu_2=\tilde{\varkappa}\mu^{j+\sigma}+0.5h\varphi^j_N,$$

$$y^{(\sigma)}=\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j, r_N=r(l,t)=r^{j+\sigma}_N\geq0,\ r=r^++r^-,\ r_0=r(0,t)=r^{j+\sigma}_0\leq0,$$

$$\overline{\varkappa}_i=1+\frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\ i=\overline{1,N-1},\ r^+=0.5(r+|r|)\geq0,\ r^-=0.5(r-|r|)\leq0,$$

$$d^j_i=\begin{cases}\overline{\varkappa}_iq^{j+\sigma}_i,\ i\neq0,N,\\ q^{j+\sigma}_i, i=0,N.\end{cases}\qquad \varphi^j_i=\begin{cases}\overline{\varkappa}_if^{j+\sigma}_i,\ i\neq0,N,\\ f^{j+\sigma}_i,\ i=0,N.\end{cases}\qquad \hbar=\begin{cases}0.5h, i=0,\\ h, i\neq0,N,\end{cases}$$

$$\varkappa_i=\frac{1}{1+R_i},\ R_i=\frac{0.5h|r_i|\overline{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}},\ \varkappa_0=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)a_1}},\ r_0\leq0,\ |r|=r^+-r^-,$$

$$Y=\hat{y}+y,\ \hat{y}=y^{j+1},\ y_t=\frac{\hat{y}-y}{\tau},\ y=y^j_i=y(x_i,t_j),\ t^*=t^{j+\sigma}.$$

$$\tilde{\varkappa}=1+\frac{0.5hm}{l}=\frac{1}{1-\frac{0.5hm}{l}},\ \varkappa_N=\frac{1}{1+0.5h\frac{|r^{j+\sigma}_N|}{k_{N-0.5}}},\ \text{если } r^{j+\sigma}_N\geq0.$$

Перепишем задачу (19)-(22) в операторной форме

$$\begin{cases} \overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{23}$$

где

$$\overline{\overline{\varkappa}} = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i, \ x \in \omega_h, \\ 1, \ x = 0, l; \end{cases} \qquad \overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad \overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, \ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \varphi^- = \frac{(m+1)}{0.5h}\mu_1, \ x = 0, \\ \varphi^+ = \frac{1}{0.5h}\mu_2, \ x = l\,; \end{cases}$$

$t^* = t^{j+1/2}$,

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_i}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x_{i^m}}\left(x^m_{i-0.5}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right) + \\ \qquad + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\right) - d_i^j y_i^{(\sigma)}, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{(m+1)\left(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} - \frac{0.5h}{m+1}d_0 y_N^{(\sigma)}\right)}{0.5h}, \ x = 0\,, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = -\frac{\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x}.N} + \tilde{\beta}\sum\limits_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)}\hbar + 0.5h d_N y_N^{(\sigma)}}{0.5h}, \ x = l\,. \end{cases}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 3 [Alikhanov A. A. 2015]. Для любой функции $y(t)$, определенной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство

$$y^{(\sigma)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y \geq \frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\,.$$

Лемма 4 [Бештоков М.Х. 2019]. Предположим, что неотрицательные последовательности $y^j, \varphi^j, j = 0, 1, 2, ...$ удовлетворяют неравенству

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y^j \leq \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad j \geq 1,$$

где $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0-$ константы, тогда существует такое τ_0, что если $\tau \leq \tau_0$, то

$$y^{j+1} \leq 2\left(y^0 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leq j'\leq j}\varphi^{j'}\right)E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), \quad 1 \leq j \leq j_0,$$

где $E_\alpha(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}-$ функция Миттаг-Леффлера, $\lambda = \lambda_1 + \dfrac{\lambda_2}{2+2^{1-\alpha}}$.

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$\Big(u, v\Big) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \ \Big(u, u\Big) = \Big(1, u^2\Big) = \|u\|_0^2, \ \Big(u, v\Big] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar, \ \|u]|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar\,.$$

Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (23) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\left(\overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y, x^m y^{(\sigma)}\right] = \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\right] + \left(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)}\right]. \tag{24}$$

Оценим суммы, входящие в (24), с учетом Леммы 3:

$$\left(\overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y, x^m y^{(\sigma)}\right] \geq \left(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t}\left(x^{\frac{m}{2}}y\right)^2\right], \tag{25}$$

$$\left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\right] = \left(\tilde{\Lambda}y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\right) + 0.5h\Lambda^+ y^{(\sigma)}_N x^m_N y^{(\sigma)}_N = \left(\varkappa\left(x^m_{i-0.5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_x, y^{(\sigma)}\right) +$$
$$+\left(b^{-j}\left(x^m_{i-0.5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right), y^{(\sigma)}\right) + \left(b^{+j}\left(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\right), y^{(\sigma)}\right) - \left(d^j_i, x^m_i (y^{(\sigma)})^2\right) -$$
$$-x^m_n y^{(\sigma)}_N\left(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N} y^{(\sigma)}_i \hbar + 0.5hd_N y^{(\sigma)}_N\right) = -\left(\overline{x}^m a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\right] +$$
$$+\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}\left(\overline{x}^m_N - x^m_N\right) - \varkappa_0 x^m_{0.5}a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}y^{(\sigma)}_0 - x^m_n\tilde{\beta}y^{(\sigma)}_N\sum_{i=0}^{N} x^m_i y^{(\sigma)}_i\hbar - 0.5hx^m_N d_N\left(y^{(\sigma)}_N\right)^2 +$$
$$+\left(b^{-j}\bar{x}^m a_i, y^{(\sigma)}_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right) + \left(b^{+j}x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}, y^{(\sigma)}_x y^{(\sigma)}\right) - \left(d, x^m_i (y^{(\sigma)})^2\right). \tag{26}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (26)

$$\left(\overline{x}^m a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\right] = \left(\overline{x}^m a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right] + \left(\overline{x}^m a_i \varkappa^{(-1)}, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\right] \geq$$
$$\geq \left(\overline{x}^m a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right] + \frac{1}{1+hM_1}\left(\overline{x}^m a_i\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\right]. \tag{27}$$

$$-\left(\overline{x}^m a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right] + \left(b^{-j}\overline{x}^m a_i, y^{(\sigma)}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right) + \left(b^{+j}x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}, y^{(\sigma)}_x y^{(\sigma)}\right) \leq$$
$$\leq \varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 + M^{\varepsilon}_2\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|^2_0. \tag{28}$$

Учитывая (27),(28), из(26) находим

$$\left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\right] \leq -\frac{1}{1+hM_1}\left(\overline{x}^m a_i\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\right] - \left(d, (x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)})^2\right) +$$
$$+\varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 + M^{\varepsilon}_2\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|^2_0 + (\bar{x}^m_N - x^m_N)\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \varkappa_0 x^m_{0.5}a_1 y^{(\sigma)}_0 y^{(\sigma)}_{x,0} -$$
$$-x^m_n\tilde{\beta}y^{(\sigma)}_N\sum_{i=0}^{N} x^m_i y^{(\sigma)}_i\hbar - 0.5hx^m_N d_N\left(y^{(\sigma)}_N\right)^2. \tag{29}$$

$$\left(\Phi, x^m y^{(\sigma)}\right] = \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\right) + 0.5h\varphi^+ x^m_N y^{(\sigma)}_N = \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\right) + x^m_N\mu_2 y^{(\sigma)}_N. \tag{30}$$

Учитывая преобразования (25)-(30), из(24) получим

$$\left(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right] + \frac{1}{1+hM_1}\left(\bar{x}^m a_i\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\right] \leq$$

$$\le \varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_2^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 - \left(d, x^m (y^{(\sigma)})^2\right) + \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) y_N^{(\sigma)} \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} -$$

$$-x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\right) + y_N^{(\sigma)} x_N^m \left(\mu_2 - \tilde\beta \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)}\right). \tag{31}$$

Преобразуем четвертое, пятое и седьмое слагаемые в правой части (31) с учетом (20),(21):

$$\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) y_N^{(\sigma)} \varkappa_N a_N y_{\bar{x}N}^{(\sigma)} - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} +$$

$$+x_N^m y_N^{(\sigma)} \left(\mu_2 - \tilde\beta \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)}\right) = \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) y_N^{(\sigma)} \Big[\mu_2 - \tilde\beta \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)} -$$

$$-0.5h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big] + x_N^m y_N^{(\sigma)} \Big[\mu_2 - \tilde\beta \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)}\Big] - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Big[\frac{0.5h}{m+1} d_0 y_0^{(\sigma)} +$$

$$+\frac{0.5h}{m+1} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \mu_1\Big] = y_N^{(\sigma)} \bar{x}_N^m \Big[\mu_2 - \tilde\beta \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)}\Big] - 0.5 h y_N^{(\sigma)} (\bar{x}_N^m - x_N^m) \Delta_{0t_{j+\sigma}} y_N -$$

$$-x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Big[\frac{0.5h}{m+1} d_0 y_0^{(\sigma)} - \mu_1\Big] - \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 \le \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} - \bar{x}_N^m \tilde\beta y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar -$$

$$-0.5 h d_N \bar{x}_N^m \left(y_N^{(\sigma)}\right)^2 - x_{0.5}^m \frac{0.5h}{m+1} d_0 (y_0^{(\sigma)})^2 + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} -$$

$$-\frac{h}{4}\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 - \frac{h}{4(m+1)} x_{0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0^2 . \tag{32}$$

Учитывая (32), перепишем (31):

$$\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2\right] + \frac{1}{1+hM_1}\left(\bar{x}^m a_i \varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\right] +$$

$$+\frac{h}{4(m+1)} x_{0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0^2 + \frac{h}{4}\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \le \varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_2^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 -$$

$$-\left(d, (x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)})^2\right) - \bar{x}_N^m \tilde\beta y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N \bar{x}_N^m \left(y_N^{(\sigma)}\right)^2 - x_{0.5}^m \frac{0.5h}{m+1} d_0 (y_0^{(\sigma)})^2 +$$

$$+\left(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\right) + \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} . \tag{33}$$

Учитывая,что $x_{N-0.5}^m \ge \frac{1}{6} x_N^m$, преобразуем некоторые слагаемые в (33):

$$\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2\right] + \frac{h}{4}\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \ge \left(\frac{\varkappa}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2\right) + \frac{h}{4} x_{N-0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \ge$$

$$\ge \frac{M_3}{2}\left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2\right) + \frac{0.5h}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x_N^{\frac{m}{2}} y_N\right)^2 \ge \frac{1}{12}\left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2\right) +$$

$$+\frac{0.5h}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y_N\right)^2 \ge \frac{1}{12}\left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2\right] \ge \frac{1}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 , \tag{34}$$

где

$$M_3 = \begin{cases} 1, \text{если } m = 0, m \geq 1\,, \\ 1/2, \text{если } m \in (0,1),\ h \leq h_0 = \sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}, \end{cases}$$

$$-\Big(d, (x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)})^2\Big) - \bar{x}_N^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5hd_N \bar{x}_N^m \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 - x_{0.5}^m \frac{0.5h}{m+1} d_0 (y_0^{(\sigma)})^2 +$$

$$+\Big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\Big) + \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} \leq$$

$$\leq \varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_4^\varepsilon \Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_0^2 + (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)})^2\Big) + M_5 \Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\,. \tag{35}$$

Перепишем (33) с учетом (34),(35):

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y]|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leq \varepsilon M_6 \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_7^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_1^2 + M_8 \Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\,, \tag{36}$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} y]|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 + \big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\big)^2$.

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{2M_6}$, из (36) получаем:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y]|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leq M_9 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_1^2 + M_{10} \Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\,. \tag{37}$$

Перепишем (37) в другой форме:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y]|_1^2 \leq M_{11}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}]|_1^2 + M_{12}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^j]|_1^2 + M_{13} \Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big). \tag{38}$$

На основании Леммы 4 из (38), получаем:

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}]|_1^2 \leq M \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0]|_1^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big) \right), \tag{39}$$

где M - положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5). Тогда существуют такие h_0, τ_0, что если $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (19)-(22) справедлива априорная оценка (39), из чего следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (19)-(22) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)-(4), $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (19)-(22). Для оценки точности разностной схемы (19)-(22) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (19)-(22), получаем задачу для функции z:

$$\overline{\varkappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_i = \frac{\varkappa}{x_i^m} \Big(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x}_i}^{(\sigma)} \Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \Big(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \Big) + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} \Big) - d_i^j z_i^{(\sigma)} + \Psi_i^j\,, \tag{40}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{(x,0)}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 + d_0 z_0^{(\sigma)} \Big) - \nu_1,\ t \in \overline{\omega}_\tau,\ x = 0\,, \tag{41}$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N} x_i^m z_i^{(\sigma)}\hbar + 0.5hd_N z_N^{(\sigma)} + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} z_N - \nu_2\,,\ x = N, \tag{42}$$

$$z(x,0) = 0,\ x\in\overline{\omega}_h,\ t = 0\,, \tag{43}$$

где $\Psi = O\Big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\Big)$, $\nu_1 = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\nu_2 = O\big(h^2+\tau^2\big)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)-(4) разностной схемой (19)-(22) в классе решений $u = u(x,t)$ задачи (1)-(4).

Применяя априорную оценку (39) к решению задачи (40)-(43), получаем неравенство

$$\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}]|_1^2 \le M\max_{0\le j'\le j}\left(\|x^{\frac{m}{2}}\Psi^{j'}\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\right), \tag{44}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Отсюда вытекает априорная оценка

$$\|xz^{j+1}]|_1^2 \le \overline{M}\max_{0\le j'\le j}\left(\|x\Psi^{j'}\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\right), \tag{45}$$

где $\overline{M}$ — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (45) следует сходимость решения разностной задачи (19)-(22) к решению дифференциальной задачи (1)-(4) в смысле нормы $\|xz^{j+1}]|_1^2$ на каждом слое так, что если существуют такие h_0, τ_0, то при $h\le h_0, \tau\le\tau_0$ справедлива априорная оценка

$$\|x\big(y^{j+1} - u^{j+1}\big)]|_1 \le \overline{M}\big(h^2+\tau^2\big)\,.$$

4. Постановка нелокальной краевой задачи Б и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу для уравнения (1). Заменим условие (3) условием вида

$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta(t)u(0,t) + \int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau - \mu(t),\ \ |\beta|\le c_2. \tag{46}$$

Для получения априорной оценки решения умножим (1) скалярно на $x^m u$. Тогда, учитывая преобразования (7)-(12), из (6) получим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + c_0\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le x^m uku_x\big|_0^l + \varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2. \tag{47}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (47)

$$x^m uku_x|_0^l = l^m u(l,t)\Big(\mu(t) - \beta(t)u(0,t) - \int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau\Big) =$$

$$= l^m\mu(t)u(l,t) - l^m\beta(t)u(l,t)u(0,t) -$$

$$-l^m u(l,t)\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau \le \frac{1}{2}\mu^2(t) + M_2\Big(u^2(l,t)+u^2(0,t)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau\Big)^2 \le$$

$$\le \varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + M_3^{\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \int\limits_0^t \Big(\varepsilon_1\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + M_4^{\varepsilon_1}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\Big)d\tau + \frac{1}{2}\mu^2(t)\,. \qquad (48)$$

Учитывая (48), из (47) при $\varepsilon = \dfrac{c_0}{4}$ получим:

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M_5\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 +$$

$$+M_6^{\varepsilon_1}\int\limits_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau + \varepsilon_1 M_7\int\limits_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 d\tau + M_8\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big)\,. \qquad (49)$$

Применяя к обеим частям (49) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, из (49) находим:

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M_5 D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + M_6^{\varepsilon_1}D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau +$$

$$+\varepsilon_1 M_7 D_{0t}^{-\alpha}\int\limits_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 d\tau + M_9\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\right). \qquad (50)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (50) следующим образом:

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^{\tau}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\int_s^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\Big(-\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha}\Big|_s^t\Big)ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-\tau)\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \le \frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\,.$$

Итак, получаем:

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau \le \frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\,. \qquad (51)$$

С помощью (51) из (50) при $\varepsilon_1 = \dfrac{\alpha}{2TM_7}$ находим:

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le$$

$$\le M_{10}D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\right). \qquad (52)$$

На основании Леммы 2 из (52) находим априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\Big), \qquad (53)$$

где — положительное число, зависящее только от входных данных задачи (1), (2), (46), (4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Справедлива следующая

Теорема 3. Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}(Q_T)$ $\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (5), (46), то для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2),(46),(4) справедлива априорная оценка (53), из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|x^{\frac{m}{2}}u\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2$.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1),(2),(46),(4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\Big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\Big)$:

$$\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_i = \frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big) + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\Big) - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (54)$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 + \frac{0.5h}{m+1} d_0^j y_0^{(\sigma)} - \mu_1, \ t \in \overline{\omega}_\tau, \ x = 0, \qquad (55)$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\beta} y_0^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j} \rho_s^j y_0^s \tau + 0.5h d_N y_N^{(\sigma)} + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N - \mu_2, \ x = N, \qquad (56)$$

$$y(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{\omega}_h, \ t = 0. \qquad (57)$$

Перепишем задачу (54)-(57) в операторной форме:

$$\begin{cases} \overline{\overline{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{cases} \qquad (58)$$

где

$$\overline{\overline{\varkappa}} = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i, \ x \in \omega_h, \\ 1, \ x = 0, l, \end{cases} \qquad \overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \qquad \overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, \ (x,t) \in \omega_{h\tau}; \\ \varphi^- = (0.5h)^{-1}(m+1)\mu_1, \ x = 0; \\ \varphi^+ = (0.5h)^{-1}\mu_2, \ x = l, \end{cases}$$

$t^* = t^{j+1/2}$,

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_i}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big)_x + \\ + \frac{b^{-j}}{x_{i^m}}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big) + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\Big) - d_i^j y_i^{(\sigma)}; \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{(m+1)\Big(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \frac{0.5h}{m+1} d_0 y_0^{(\sigma)}\Big)}{0.5h}, \ x = 0; \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = -\frac{\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \tilde{\beta} y_0^{(\sigma)} + \sum\limits_{s=0}^{j} \rho_s^j y_0^s \tau + 0.5h d_N y_N^{(\sigma)}}{0.5h}, \ x = l. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$\left(u,v\right] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar, \ \|u]|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, \ i = N, \\ h, i \neq N. \end{cases}$$

Умножим (58) теперь скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\left(\overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, x^m y^{(\sigma)}\right] = \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\right] + \left(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)}\right]. \tag{59}$$

Повторяя рассуждения (24)-(38), из (59) после несложных преобразований получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \|x^{\frac{m}{2}} y]|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le M_1 \sum_{s=0}^{j} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}]|_0^2 \bar{\tau} + M_2 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_1^2 +$$

$$+ M_3 \sum_{s=0}^{j} \|x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 \bar{\tau} + M_4 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right), \tag{60}$$

где

$$\|x^{\frac{m}{2}} y]|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\right)^2.$$

Оценим первое слагаемое в правой части (60), для этого перепишем (60) в другой форме:

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le M_1 \sum_{s=0}^{j} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}]|_0^2 \bar{\tau} + F, \tag{61}$$

где $F = M_2 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_1^2 + M_3 \sum_{s=0}^{j} \|x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 \bar{\tau} + M_4 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right)$. С помощью Леммы 4 [Самарский А.А., Гулин А.В. 1973, стр.171] из (61), находим:

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le M_5 F. \tag{62}$$

Учитывая (62), из (60) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \|x^{\frac{m}{2}} y]|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le$$

$$\le M_6 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_1^2 + M_7 \sum_{s=0}^{j} \|x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 \bar{\tau} + M_8 \sum_{s=0}^{j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^s\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{\tau}. \tag{63}$$

На основании Леммы 4 из (60), получим:

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}]|_1^2 \le M_9 \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0]|_1^2 + \frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \le j' \le j} \left(\sum_{s=0}^{j'} \|x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 \bar{\tau} + \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^s\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{\tau} \right) \right). \tag{64}$$

Введя обозначение $g^j = \max\limits_{0 \le j' \le j} \|y]|_0^2$ из (64) получим

$$g^{j+1} \le M_9 \frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{s=0}^{j} g^s \bar{\tau} + M_{10} F_1^j, \tag{65}$$

где

$$F_1^j = \|x^{\frac{m}{2}} y^0]|_1^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0\le j'\le j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^s\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{\tau}.$$

На основании Леммы 4 [Самарский А.А., Гулин А.В. 1973, стр.171] из (65) получаем априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}]|_0^2 \le M \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0]|_1^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0\le j'\le j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^s\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{\tau} \right), \tag{66}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть выполнены условия (5), (46) тогда существуют такие h_0, τ_0, что если $h \le h_0, \tau \le \tau_0$, то для решения разностной задачи (54)-(57) справедлива априорная оценка (66), из чего следуют единственность и решения разностной схемы (54)-(57) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи $(1), (2), (46), (4)$ $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (54)-(57). Для оценки точности разностной схемы (54)-(57) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (54)-(57), получаем задачу для функции z:

$$\varkappa \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_i = \frac{\varkappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j z_i^{(\sigma)} + \Psi_i^j, \tag{67}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 + \frac{0.5h}{m+1} d_0^j z_0^{(\sigma)} - \nu_1, \ t \in \overline{\omega}_\tau, \ x = 0, \tag{68}$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\beta} z_0^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j} \rho_s^j z_0^s \bar{\tau} + 0.5h d_N z_N^{(\sigma)} + 0.5h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_N - \nu_2, \ x = N, \tag{69}$$

$$(x, 0) = 0, \ x \in \overline{\omega}_h, \ t = 0\,, \tag{70}$$

где $\Psi = O\left(\frac{h^2+\tau^2}{x}\right)$, $\nu_1 = O(h^2+\tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2+\tau^2)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1), (2), (46), (4) разностной схемой (54)-(57) в классе решении $u = u(x,t)$ задачи (1), (2), (46), (4).

Применяя априорную оценку (66) к решению задачи (67)-(70), получаем неравенство

$$\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}]|_0^2 \le M \max_{0\le j'\le j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \Psi^s\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) \bar{\tau}\,, \tag{71}$$

где M— положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Отсюда вытекает априорная оценка

$$\|x z^{j+1}]|_0^2 \le \overline{M} \max_{0\le j'\le j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x \Psi^s\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) \bar{\tau}. \tag{72}$$

где $\overline{M}$ — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (72) следует сходимость решения разностной задачи (54)-(57) к решению дифференциальной задачи (1), (2), (46), (4) в смысле нормы $\|xz^{j+1}]|_0^2$ на каждом слое так, что если существуют такие τ_0, h_0, то при $\tau \leq \tau_0, h \leq h_0$, справедлива априорная оценка

$$\|x\big(y^{j+1} - u^{j+1}\big)]|_0^2 \leq \overline{M}\big(h^2 + \tau^2\big).$$

Замечание. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда условие (3) заменяется условием вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha} \int_0^l x^m u(x,t)dx = \mu(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

6. Заключение

В работе исследованы нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами с вырождением. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решения рассматриваемых задач. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения относительно начальных данных и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи.

Список литературы
References

1. Алиханов А.А. 2010. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка. Дифференц. уравнения. 46(5):660–666.
   Alihanov A.A. 2010. Apriornye ocenki reshenij kraevyh zadach dlya uravnenij drobnogo poryadka [Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations]. Differenc. uravneniya. 46(7):949-–961.

2. Бештоков М.Х. 2018. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля. Дифференц. уравнения, 54(6):763–778.
   Beshtokov M.H. 2018. Lokal'nye i nelokal'nye kraevye zadachi dlya vyrozhdayushchihsya i nevyrozhdayu- shchihsya psevdoparabolicheskih uravnenij s drobnoj proizvodnoj Rimana-Liuvillya [Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Degenerating and Nondegenerating Pseudoparabolic Equations with a Riemann-Liouville Fractional Derivative]. Differenc. uravneniya, 54(6):758–774.

3. Бештоков М.Х. 2019. Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка и разностные методы их решения. Известия высших учебных заведений. Математика, Известия вузов. Математика 63(2):3–12.
   Beshtokov M.H. 2019. Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh psevdoparabolicheskih uravnenij drobnogo poryadka i raznostnye metody ih resheniya [Boundary-Value Problems for Loaded Pseudoparabolic Equations of Fractional Order and Difference Methods of Their Solving]. Russian Mathematics. 63(2):1–10.

4. Бештоков М.Х. 2018. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова – Капуто. Известия вузов. Математика, 62(10):3–16.
Beshtokov M.H. 2018. K kraevym zadacham dlya vyrozhdayushchihsya psevdoparabolicheskih uravnenij s drobnoj proizvodnoj Gerasimova – Kaputo [To Boundary-Value Problems for Degenerating Pseudo-parabolic Equations With Gerasimov-Caputo Fractional Derivative]. Russian Mathematics, 62(10):1–14.

5. Бицадзе А.В. 1984. К теории нелокальных краевых задач. ДАН СССР. 277(1):17–19.
Bicadze A.V. 1984. K teorii nelokal'nyh kraevyh zadach [On the theory of nonlocal boundary value problems]. DAN SSSR. 277(1):17–19.

6. Бэгли Р.Л., Товик П. Дж. 1984. Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка – новый подход к расчету конструкций с вязко-упругим демпфированием. Аэрокосмическая техника. 2(2):84–93.
Behgli R.L., Tovik P. Dzh. 1984. Differencial'noe ischislenie, osnovannoe na proizvodnyh drobnogo poryadka-novyj podhod k raschetu konstrukcij s vyazko-uprugim dempfirovaniem. Aehrokosmicheskaya tekhnika [Differential calculus based on fractional order derivatives a new approach to the calculation of structures with viscoelastic damping]. 2(2):84–93.

7. Водахова В.А. 1983. Задача Гурса для обобщенного уравнения влагопереноса. Сборник научных трудов (межведомственный) «САПР и АСПР в Мелиорации». Нальчик. КБГУ. 74–80.
Vodahova V.A. 1983. Zadacha Gursa dlya obobshchennogo uravneniya vlagoperenosa [The Goursat problem for a generalized equation of moisture transfer]. Sbornik nauchnyh trudov (mezhve- domstvennyj) "SAPR i ASPR v Melioracii". Nal'chik. KBGU. 74–80.

8. Водахова В.А. 2008. Об одной нелокальной задаче типа задачи Бицадзе – Самарского для нагруженного уравнения с кратными характеристиками. Вестник КБГУ. Серия Математические науки. Нальчик: Кабардино-Балкарский Госуниверситет. 5:26–31.
Vodahova V.A. 2008. Ob odnoj nelokal'noj zadache tipa zadachi Bicadze – Samarskogo dlya nagruzhennogo uravneniya s kratnymi harakteristikami [On a non-local problem of the Bitsadze-Samaraskii type for a loaded equation with multiple characteristics]. Vestnik KBGU. Seriya Matematicheskie nauki. Nal'chik: Kabardino-Balkarskij Gosuniversitet. 5:26–31.

9. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. 2001. Об устойчивости нелокальной двумерной разностной задачи. ДУ. 37(7): 926–932.
Gulin A.V., Ionkin N.I., Morozova V.A. 2001. Ob ustojchivosti nelokal'noj dvumernoj raznostnoj zadachi [On the stability of a non-local two-dimensional difference problem]. DU. 37(7): 926–932.

10. Динариев О.Ю. 1990. Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин. Изв. АН СССР. сер. МЖГ. 5:66–70.
Dinariev O.YU. 1990. Fil'traciya v treshchinovatoj srede s fraktal'noj geometriej treshchin [Filtration in a fissured medium with fractal geometry of cracks]. Izv. AN SSSR. ser. MZHG. 5:66–70.

11. Ионкин Н.И. 1977. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. ДУ. 13(2): 294–304.
Ionkin N.I. 1977. Reshenie odnoj kraevoj zadachi v teorii teploprovodnosti s nelokal'nymi kraevymi usloviyami [Solution of a boundary value problem in the theory of thermal conductivity with nonlocal boundary conditions]. DU. 13(2):294–304.

12. Камынин Л.А. 1964. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. ЖВМ и МФ. 4(6):1006–1024.
Kamynin L.A. 1964. Ob odnoj kraevoj zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviyami [On a boundary value problem in the theory of thermal conductivity with non-classical boundary conditions]. ZHVM i MF. 4(6):1006-1024.

13. Кожанов А.И. 2004. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера. ДУ. 40(6):763–774.
Kozhanov A.I. 2004. Ob odnoj nelokal'noj kraevoj zadache s peremennymi koehfficientami dlya uravnenij teploprovodnosti i Allera [On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation]. DU. 40(6):763–774.

14. Кочубей А.Н. 1990. Диффузия дробного порядка. Дифференц.уравнения. 26(4):660–670.
Kochubej A.N. 1990. Diffuziya drobnogo poryadka [Fractional order diffusion]. Differenc. uravneniya. 26(4):660–670.

15. Мальшаков А.В. 1992. Уравнения гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающей фрактальной геометрией. ИФЖ. 62(3):405–410.
Mal'shakov A.B. 1992. Uravneniya gidrodinamiki dlya poristyh sred so strukturoj porovogo prostranstva, obladayushchej fraktal'noj geometriej [Hydrodynamic equations for porous media with pore space structure having fractal geometry]. IFZH. 62(3):405–410.

16. Нахушев А.М. 1978. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги. ДАН СССР. 242(5):1008–1011.
Nahushev A.M. 1978. Nelokal'naya zadacha i zadacha Gursa dlya nagruzhennogo uravneniya giperboli- cheskogo tipa i ih prilozheniya k prognozu pochvennoj vlagi [Non-local problem and the Goursat problem for the loaded equation of hyperbolic type and their applications to prediction of soil moisture] DAN SSSR. 242(5):1008–1011.

17. Нахушев А.М. 2000. Элементы дробного исчисления и их применения. НИИИ ПМА КБНЦРАН, Нальчик, 272 с.
Nahushev A.M. 2000. Elementy drobnogo ischisleniya i ih primeneniya [Elements of fractional calculus and their applications]. NIII PMA KBNCRAN, Nal'chik, 272 s.

18. Нигматуллин Р.Р. 1992. Дробный интеграл и его физическая интерпретация. ТМФ, 90(3):354–368.
Nigmatullin R.R. 1992. Drobnyj integral i ego fizicheskaya interpretaciya [Fractional integral and its physical interpretation]. TMF, 90(3):354–368.

19. Самарский А.А. 1983. Теория разностных схем. Наука, М., 416 с.
Samarskij A.A. 1983. Teoriya raznostnyh skhem [Theory of difference schemes]. Nauka, M., 416 s.

20. Самарский А.А., Гулин А.В. 1973. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.
Samarskij A.A., Gulin A.V. 1973. Ustojchivost' raznostnyh skhem [Stability of difference schemes]. M.: Nauka, 415 s.

21. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. 121 с.
Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1987. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications]. Minsk. 121 s.

22. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. 2006. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 46(10):1871–1881.
Taukenova F.I., Shkhanukov-Lafishev M.H. 2006. Raznostnye metody resheniya kraevyh zadach dlya differencial'nyh uravnenij drobnogo poryadka [Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations]. Comput. Math. Math. Phys.46(10): 1785—1795.

23. Чудновский А.Ф. 1969. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве. Сб. трудов АФИ. 23: 41–54.
Chudnovskij A.F. 1969 Nekotorye korrektivy v postanovke i reshenii zadach teplo- i vlagoperenosa v pochve [Some adjustments in the formulation and solution of problems of heat and moisture transfer in the soil]. Sb. trudov AFI. 23:41–54.

24. Чудновский А.Ф. 1976. Теплофизика почв. М.: Наука. 352 с.
Chudnovskij A.F. 1976. Teplofizika pochv [Thermophysics of soils]. M.: Nauka. 352 s. (in Russian).

25. Чукбар К.В. 1995. Стохастический перенос и дробные производные. ЖЭТФ. 108. 5(11): 1875–1884.
Chukbar K.V. 1995. Stohasticheskij perenos i drobnye proizvodnye [Stochastic transfer and fractional derivatives]. ZHEHTF. 108. 5(11):1875–1884.

26. Шефер Д., Кефер К. 1988. Фракталы в физике. Труды 6-го Междунар. симпоз. по фракталам в физике, 62–71.
Shefer D., Kefer K. 1988. Fraktaly v fizike [Fractals in physics]. Trudy 6-go Mezhdunar. simpoz. po fraktalam v fizike, 62–71.

27. Alikhanov A.A. 2015. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation. Journal of Computational Physics. 280:424–438.

28. Canon J.R. 1963. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. Quart. Appl. Math. 21(2):155–160.

29. Mandelbrojt S. 1925. Sulla generalizzazione del calcolo clelle variazione Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend Cl. sei., fis. mat. e natur. Ser. 6(1):151–156.

30. O'Shaughnessy L. 1918. Problem 433. Amer. Math. Month. 25:172–173.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Бештоков М.Х., Водахова В.А. 2019. Сеточные методы решения нелокальных краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с вырождением. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 347–365. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-347-365.

Beshtokov M.KH., Vodakhova V.A. 2019. Grid methods for solving nonlocal boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order with degeneration. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 347–365 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-347-365.