УДК 517.952
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-402-416

ДВУМЕРНОЕ НЕАВТОНОМНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С КВАДРАТИЧНЫМ ПОЛИНОМОМ ОТ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

TWO-DIMENSIONAL NON-AUTONOMOUS HYPERBOLIC EQUATION WITH QUADRATIC POLYNOMIAL ON FIRST DERIVATIVES

И.В. Рахмелевич

I.V. Rakhmelevich

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д.23, г. Нижний Новгород, Россия, 603950

Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin av., Nizhny Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация

Исследовано двумерное неавтономное гиперболическое уравнение, правая часть которого содержит произвольную нелинейность от искомой функции и квадратичный полином от ее первых производных. Получены решения этого уравнения в явном виде для простейших нелинейностей с помощью методов мультипликативного и функционального разделения переменных. Показано, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения оно может быть сведено к квадратному уравнению относительно некоторой вспомогательной переменной. Найдено решение в виде квадратичной формы от функций одной переменной, а также решение в виде произведения степеней от независимых переменных для случая, когда коэффициенты уравнения представляют собой степенные функции. С помощью метода Кларксона – Крускала показано, что исходное уравнение может быть сведено к уравнению Риккати с постоянными коэффициентами в случае, когда коэффициенты исходного уравнения выражаются через отношение функций одной переменной; найдены соответствующие точные решения в явном виде. Получено точное решение в неявном виде для случая произвольной нелинейности от неизвестной функции и сформулировано условие его существования.

Abstract

There is investigated two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation, the right side of which contains arbitrary non-linearity on unknown function and the quadratic polynomial on its first derivatives. The solutions of this equation are received in explicit form for the simplest non-linearities with the help of the methods of multiplicative and functional separation of variables. It is showed that under certain conditions the initial equation can be reduced to the quadratic equation with respect to some auxiliary variable. There is received the solution as a quadratic form on some functions of one variable, and also the solution in the form of the production of powers on independent variables for the case when the coefficients of initial equation are the power functions. It is showed by means of Clarkson – Kruskal method, that the initial equation can be reduced to the Riccati equation with constant coefficients in the case when the coefficients of initial equation are expressed through the relation of functions of one variable. The corresponding exact solutions in explicit form are received. There is received the exact solution in implicit form for the case of arbitrary non-linearity on unknown function and the condition of its existence is formulated.

Ключевые слова: нелинейность, гиперболическое уравнение, мультипликативное разделение переменных, функциональное разделение переменных, решение типа бегущей волны, метод Кларксона-Крускала, уравнение Риккати.
Key words: nonlinearity, hyperbolic equation, multiplicative separation of variables, functional separation of variables, solution of travelling wave type, Clarkson-Kruskal's method, Riccati's equation.

Введение

В современной математической физике существенное место занимает анализ нелинейных гиперболических уравнений и методов их точного интегрирования [Жибер, Соколов, 2001], [Кудряшов, 2010], [Кузнецова, 2012], [Полянин, Зайцев, 2002], [Рахмелевич, 2015, 2017], [Grundland, Infeld, 1992], [Zhdanov, 1994]. С точки зрения общности результатов серьезный интерес представляют исследования классов нелинейных уравнений, содержащих произвольные функции [Полянин, Зайцев, 2002], [Зайцев, Полянин, 2003], в том числе уравнений с переменными коэффициентами. Одними из наиболее эффективных методов исследования нелинейных уравнений остаются методы, основанные на редукции исходного уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению или их системе (метод разделения переменных, метод Кларксона – Крускала и др.). В работах [Полянин, Журов, 2002], [Полянин и др., 2005] подробно изложены основы метода разделения переменных и его современные варианты (обобщенное и функциональное разделение переменных). В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвященных исследованию нелинейных уравнений указанным методом. Так, методом разделения переменных исследованы некоторые многомерные уравнения, содержащие однородные и мультиоднородные функции от частных производных [Рахмелевич, 2013, 2014], получены точные решения ряда нелинейных уравнений, встречающихся в прикладных задачах [Полянин, Зайцев, 2002], [Полянин и др., 2005], [Miller, Rubel,1993], [Zhdanov, 1994], [Polyanin, 2019]. Для нахождения точных решений более сложной структуры используется метод Кларксона – Крускала [Полянин и др., 2005], [Clarkson, Kruskal, 1989]. В настоящей работе метод разделения переменных и метод Кларксона – Крускала применяются для построения решений двумерного гиперболического уравнения, содержащего квадратичный полином от первых производных и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции.

1. Простейшие решения

Двумерное нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка с квадратичным полиномом от первых производных имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(u)\left(A(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right). \tag{1.1}$$

Здесь $A(x,y), B(x,y), C(x,y), g(u)$ – заданные функции.

Вначале рассмотрим случай $g(u) = 1/u$, для которого уравнение (1.1) можно переписать в виде:

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = A(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{1.2}$$

Найдем решения уравнения (1.2), которые могут быть получены методом разделения переменных.

Теорема 1.1. 1. Если коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условиям:

$$\frac{B(x,y)-1}{2A(x,y)}=\frac{p(x)}{q(y)}, \quad \frac{4A(x,y)C(x,y)}{(B(x,y)-1)^2}=\alpha\leqslant 1, \tag{1.3}$$

где $p(x), q(y)$ – некоторые заданные функции, α – параметр, то уравнение (1.2) имеет решения следующего вида:

$$u(x,y)=D\exp\left(\lambda\int p(x)dx+\mu\int q(y)dy\right), \tag{1.4}$$

где D, λ – произвольные постоянные, а λ, μ связаны соотношением:

$$\frac{\lambda}{\mu}=-1\pm(1-\alpha)^{1/2}. \tag{1.4a}$$

2. Если коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условиям:

$$B(x,y)\equiv 1, \quad \frac{C(x,y)}{A(x,y)}=-\left(\frac{p(x)}{q(y)}\right)^2, \tag{1.5}$$

то уравнение (1.2) имеет решения следующего вида:

$$u(x,y)=D\exp\left(\lambda\left(\int p(x)dx\pm\int q(y)dy\right)\right). \tag{1.6}$$

□ Будем искать решение уравнения (1.2) в виде:

$$u(x,y)=\varphi(x)\psi(y), \tag{1.7}$$

где $\varphi(x), \psi(y)$ – неизвестные функции, подлежащие определению. Подставив (1.7) в уравнение (1.2), получаем:

$$A(x,y)\left[\varphi'(x)\psi(y)\right]^2+(B(x,y)-1)\varphi'(x)\psi'(y)\varphi(x)\psi(y)+C(x,y)\left[\varphi(x)\psi'(y)\right]^2=0. \tag{1.8}$$

Разделив уравнение (1.8) почленно на $\left[\varphi(x)\psi'(y)\right]^2$, получаем квадратное уравнение:

$$A\eta^2+\tilde{B}\eta+C=0, \tag{1.9}$$

где $\tilde{B}=B-1$, величина η определяется выражением:

$$\eta=\frac{\varphi'(x)\psi(y)}{\varphi(x)\psi'(y)}. \tag{1.10}$$

Корни квадратного уравнения (1.9):

$$\eta_{1,2}=-\frac{\tilde{B}}{2A}\pm\left(\left(\frac{\tilde{B}}{2A}\right)^2-\frac{C}{A}\right)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Пусть выполнены условия первой части теоремы, т. е. коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условиям (1.3). Тогда выражение (1.11) можно переписать в виде:

$$\eta_{1,2} = -\frac{\tilde{B}}{2A}\left(-1 \pm (1-\alpha)^{1/2}\right). \tag{1.12}$$

Разделим переменные в выражении (1.10), учитывая (1.3) и (1.12), откуда получаем уравнения для функций $\varphi(x), \psi(y)$:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \lambda p(x), \quad \frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = \mu q(y), \tag{1.13}$$

причем постоянные λ, μ должны удовлетворять соотношению (1.4a). Находя решения уравнений (1.13) и подставляя их в (1.7), получаем выражение (1.4).
Пусть теперь выполнены условия второй части теоремы, т.е. коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условиям (1.5). Тогда из (1.11) получаем следующее выражение:

$$\eta_{1,2} = \pm\left(-\frac{C}{A}\right)^{1/2}. \tag{1.14}$$

Разделим переменные в выражении (1.10), учитывая (1.5) и (1.14), откуда получаем уравнения для функций $\varphi(x), \psi(y)$ в виде (1.13), причем постоянные λ, μ должны удовлетворять соотношению:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm 1. \tag{1.14a}$$

Тогда, рассуждая аналогично первой части теоремы и учитывая (1.14a), получаем решение (1.6). ■

Теорема 1.2. Пусть $\varphi(x), \psi(y)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, удовлетворяющие условию:

$$A(x,y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x,y) + C(x,y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)} = \Phi\left\{\varphi(x)+\psi(y)\right\}, \tag{1.15}$$

где $\Phi(z)$ – некоторая произвольная функция. Тогда уравнение (1.2) имеет решение вида:

$$u(x,y) = U_0 \exp\left\{\int\limits_0^z \frac{dz}{D - \int\limits_0^z (\Phi(\zeta)-2)d\zeta}\right\}, \quad z = \varphi(x)+\psi(y). \tag{1.16}$$

□ В соответствии с известным методом функционального разделения переменных [Полянин и др., 2005], [Полянин, Журов, 2002] решение уравнения (1.2) ищем в виде:

$$u(x,y) = U(z), \quad z = \varphi(x)+\psi(y). \tag{1.17}$$

Подставляя (1.17) в уравнение (1.2), находим:

$$\frac{U(z)U''(z)}{[U'(z)]^2} = A(x,y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x,y) - 1 + C(x,y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}. \tag{1.18}$$

Уравнение (1.18) удовлетворяется только в том случае, если выражение в правой части может быть представлено в виде некоторой функции от переменной z. Тогда, в силу условия (1.15), уравнение (1.18) можно записать в виде:

$$U(z)U''(z) - (\Phi(z) - 1)[U'(z)]^2 = 0. \tag{1.19}$$

Уравнение (1.19) допускает понижение порядка с помощью замены переменной $v(z) = U'(z)/U(z)$, в результате которой получаем уравнение первого порядка:

$$v'(z) - (\Phi(z) - 2)[v(z)]^2 = 0. \tag{1.20}$$

Решение уравнения (1.20) имеет вид:

$$v(z) = \frac{1}{D - \int\limits_0^z \Phi_1(\zeta)d\zeta}\ , \quad \Phi_1(\zeta) = \Phi(\zeta) - 2, \tag{1.21}$$

где D – произвольная постоянная. Используя выражение (1.21) и возвращаясь к функции $U(z)$, получаем решение в виде (1.16). ■

Следствие. Если для некоторой функции $\Phi(z)$ и действительных постоянных k_1, k_2 коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условию

$$k_1^2 A(x,y) + k_1 k_2 B(x,y) + k_2^2 C(x,y) = \Phi\left(k_1 x + k_2 y\right), \tag{1.22}$$

то уравнение (1.2) имеет решение типа бегущей волны, определяемое формулой (1.16), где $z = k_1 x + k_2 y$.

Данное утверждение является частным случаем теоремы 1.2 при $\varphi(x) = k_1 x$, $\psi(y) = k_2 y$.

Рассмотрим теперь решение уравнения (1.2) в виде квадратичной формы от неизвестных функций $\varphi(x), \psi(y)$:

$$u(x,y) = a_{11}[\varphi(x)]^2 + a_{12}\varphi(x)\psi(y) + a_{22}[\psi(y)]^2, \tag{1.23}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} – неизвестные коэффициенты.

Подставив функцию (1.23) в уравнение (1.2) и разделив уравнение почленно на $\varphi'(x)\psi'(y)$, после элементарных преобразований получаем:

$$a_{12}\left(a_{11}[\varphi(x)]^2 + a_{12}\varphi(x)\psi(y) + a_{22}[\psi(y)]^2\right) = P_{11}[\varphi(x)]^2 + P_{12}\varphi(x)\psi(y) + P_{22}[\psi(y)]^2, \tag{1.24}$$

где:

$$P_{11} = 4a_{11}^2 A(x,y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + 2a_{11}a_{12}B(x,y) + a_{12}^2 C(x,y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}\ , \tag{1.24а}$$

$$P_{12} = 4a_{11}a_{12}A(x,y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + (4a_{11}a_{22} + a_{12}^2)B(x,y) + 4a_{22}a_{12}C(x,y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}\ , \tag{1.24б}$$

$$P_{22} = a_{12}^2 A(x,y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + 2a_{22}a_{12}B(x,y) + 4a_{22}^2 C(x,y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}\ . \tag{1.24в}$$

Пусть функции $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$ имеют вид:

$$A(x,y) = A_0\frac{f_2(y)}{f_1(x)}, \quad B(x,y) = B_0, \quad C(x,y) = C_0\frac{f_1(x)}{f_2(y)}\ , \tag{1.25}$$

где $f_1(x), f_2(y)$ – заданные функции , A_0, B_0, C_0 – заданные константы. Пусть также функции $\varphi(x), \psi(y)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi'(x) = f_1(x), \quad \psi'(y) = f_2(y). \tag{1.26}$$

Тогда выражения (1.24а,б,в) преобразуются так:

$$P_{11} = 4A_0 a_{11}^2 + 2B_0 a_{11} a_{12} + C_0 a_{12}^2, \tag{1.27а}$$

$$P_{12} = 4A_0 a_{11} a_{12} + B_0(4a_{11}a_{22} + a_{12}^2) + 4C_0 a_{22} a_{12}, \tag{1.27б}$$

$$P_{22} = A_0 a_{12}^2 + 2B_0 a_{22} a_{12} + 4C_0 a_{22}^2. \tag{1.27в}$$

Далее, подставим выражения (1.27а,б,в) в (1.24). Приравнивая коэффициенты при $[\varphi(x)]^2, \varphi(x)\psi(y), [\psi(y)]^2$ в левой и правой частях полученного уравнения, получаем систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1 = a_{11}/a_{12}$, $\alpha_2 = a_{22}/a_{12}$:

$$4A_0\alpha_1^2 + (2B_0 - 1)\alpha_1 + C_0 = 0, \tag{1.28а}$$

$$4(A_0\alpha_1 + C_0\alpha_2 + B_0\alpha_1\alpha_2) + B_0 - 1 = 0, \tag{1.28б}$$

$$4C_0\alpha_2^2 + (2B_0 - 1)\alpha_2 + A_0 = 0. \tag{1.28в}$$

Решая квадратные уравнения (1.28а), (1.28в), находим:

$$\alpha_1 = \frac{1 - 2B_0 \pm \sqrt{D}}{8A_0}\,, \quad \alpha_2 = \frac{1 - 2B_0 \mp \sqrt{D}}{8C_0}\,, \quad D = (1 - 2B_0)^2 - 16A_0C_0\,. \tag{1.29}$$

Подставив найденные α_1, α_2 из (1.29) в (1.28б), нетрудно убедиться, что при данном выборе знаков в (1.29) уравнение (1.28б) удовлетворяется автоматически при произвольных A_0, B_0, C_0. Таким образом, в результате проведенных выше рассуждений доказана следующая теорема:

Теорема 1.3. Пусть коэффициенты уравнения (1.2) определяются выражениями (1.25), причем $D = (1 - 2B_0)^2 - 16A_0C_0 \geq 0$. Тогда это уравнение имеет решение вида:

$$u(x, y) = a\left(\alpha_1[\varphi(x)]^2 + \varphi(x)\psi(y) + \alpha_2[\psi(y)]^2\right), \tag{1.30}$$

где

$$\varphi(x) = \int f_1(x)dx + c_1, \quad \psi(y) = \int f_2(y)dy + c_2, \tag{1.31}$$

причем α_1, α_2 определяются выражениями (1.29); a, c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (1.1) содержит степенную нелинейность по искомой функции с произвольным показателем.

Теорема 1.4. 1. Пусть $g(u) = u^\gamma, \quad \gamma \neq -1$, а коэффициенты уравнения (1.1) определяются выражениями:

$$A(x, y) = A_0 x^{\alpha+1} y^{\beta-1}, \quad B(x, y) = B_0 x^\alpha y^\beta, \quad C(x, y) = C_0 x^{\alpha-1} y^{\beta+1}, \tag{1.32}$$

где $A_0, B_0, C_0, \alpha, \beta$ – заданные параметры. Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида:

$$u(x, y) = U_0 x^\lambda y^\mu, \tag{1.33}$$

где

$$\lambda = -\frac{\alpha}{1+\gamma}, \quad \mu = -\frac{\beta}{1+\gamma}, \quad U_0 = \left(A_0\frac{\alpha}{\beta} + B_0 + C_0\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{1+\gamma}}. \tag{1.33а}$$

2. Если $g(u) = 1/u$, а коэффициенты уравнения (1.1) определяются выражениями:

$$A(x,y) = A_0\frac{x}{y}, \quad B(x,y) = B_0, \quad C(x,y) = C_0\frac{y}{x}, \tag{1.34}$$

где параметры A_0, B_0, C_0 удовлетворяют условию:

$$(B_0 - 1)^2 - 4A_0C_0 \geq 0, \tag{1.34}$$

то уравнение (1.1) имеет решение вида (1.33), причем U_0 – произвольная постоянная, а показатели λ, μ связаны соотношением:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 - B_0 \pm \sqrt{D_0}}{2A_0}, \quad D_0 = (B_0 - 1)^2 - 4A_0C_0\,. \tag{1.35}$$

□ Пусть в уравнении (1.1) $g(u) = u^\gamma$, а коэффициенты уравнения имеют вид:

$$A(x,y) = A_0x^{\alpha_{11}}y^{\beta_{11}}, \quad B(x,y) = B_0x^{\alpha_{12}}y^{\beta_{12}}, \quad C(x,y) = C_0x^{\alpha_{22}}y^{\beta_{22}}. \tag{1.36}$$

Подставляя (1.36) и (1.33) в (1.1), после элементарных преобразований приводим это уравнение к виду:

$$U_0^{-1-\gamma} = \frac{\lambda}{\mu}A_0x^{\rho_{11}}y^{\sigma_{11}} + B_0x^{\rho_{12}}y^{\sigma_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}C_0x^{\rho_{12}}y^{\sigma_{12}}, \tag{1.37}$$

где показатели степеней определяются выражениями:

$$\rho_{11} = \alpha_{11} - 1 + \lambda(1+\gamma), \quad \rho_{12} = \alpha_{12} + \lambda(1+\gamma), \quad \rho_{22} = \alpha_{22} + 1 + \lambda(1+\gamma), \tag{1.37а}$$

$$\sigma_{11} = \beta_{11} + 1 + \mu(1+\gamma), \quad \sigma_{12} = \beta_{12} + \mu(1+\gamma), \quad \sigma_{22} = \beta_{22} - 1 + \mu(1+\gamma). \tag{1.37б}$$

Очевидно, уравнение (1.37) можно удовлетворить только в том случае, если показатели степеней при x, y во всех слагаемых в правой части этого уравнения равны 0. Тогда из (1.37а,б) получаем две системы уравнений:

$$\alpha_{11} - 1 + \lambda(1+\gamma) = 0, \quad \alpha_{12} + \lambda(1+\gamma) = 0, \quad \alpha_{22} + 1 + \lambda(1+\gamma) = 0, \tag{1.38а}$$

$$\beta_{11} + 1 + \mu(1+\gamma) = 0, \quad \beta_{12} + \mu(1+\gamma) = 0, \quad \beta_{22} - 1 + \mu(1+\gamma) = 0. \tag{1.38б}$$

Рассмотрим решение для каждого из случаев, перечисленных в условии теоремы.

1. Если $\gamma \neq -1$, то из систем (1.38а,б) находим:

$$\alpha_{11} = \alpha + 1, \quad \alpha_{22} = \alpha - 1, \quad \lambda = -\frac{\alpha}{1+\gamma}\,, \tag{1.39а}$$

$$\beta_{11} = \beta - 1, \quad \beta_{22} = \beta + 1, \quad \mu = -\frac{\beta}{1+\gamma}\,. \tag{1.39б}$$

В (1.39а,б) введены обозначения $\alpha_{12} = \alpha, \quad \beta_{12} = \beta$. Подставив (1.39а,б) в (1.37), получаем выражение (1.33а) для постоянной U_0. Таким образом, из (1.39а,б) следует, что в случае $\gamma \neq -1$ решение вида (1.33) существует, если коэффициенты уравнения (1.1) определяются выражениями (1.32), при этом постоянные λ, μ, U_0, входящие в решение, определяются выражениями (1.33а).

2. Если $\gamma = -1$, т. е. $g(u) = 1/u$, то из систем (1.38а,б) получаем:

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22} = -1, \quad \beta_{11} = -1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \beta_{22} = 1. \tag{1.40}$$

Из уравнения (1.37) в этом случае следует:

$$A_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + (B_0 - 1)\frac{\lambda}{\mu} + C_0 = 0. \tag{1.41}$$

Решая (1.41) как квадратное уравнение относительно λ/μ, получаем соотношение (1.35). Таким образом, из (1.40) следует, что в случае $\gamma = -1$ решение вида (1.33) существует, если коэффициенты уравнения (1.1) определяются выражениями (1.34), показатели степеней λ, μ должны удовлетворять соотношению (1.35), а постоянная U_0 является произвольной, так как она не входит в уравнение (1.41). ■

2. Метод Кларксона-Крускала. Случай произвольной нелинейности по искомой функции

Данный параграф посвящен нахождению более сложных решений уравнения (1.1) с помощью метода Кларксона – Крускала [Полянин и др., 2005], [Clarkson, Kruskal, 1989], в соответствии с которым решение этого уравнения ищем в виде:

$$u(x, y) = F(x, y)U(z(x, y)) + G(x, y)\,. \tag{2.1}$$

При этом функции $F(x, y), z(x, y), G(x, y)$ должны быть подобраны так, чтобы исходное уравнение (1.2) сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) относительно функции $U(z)$. Будем предполагать, что функции $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$ определяются выражениями (1.25). Далее для упрощения анализа рассмотрим некоторые частные случаи, в которых наложены дополнительные ограничения на функции $F(x, y), z(x, y), G(x, y)$.

Случай 1. $g(u) \equiv 1$.

$$F(x, y) \equiv 1, \quad z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \quad G(x, y) = \varphi_1(x) + \psi_1(y). \tag{2.2}$$

Подставляя в уравнение (1.1) функцию (2.1) с учетом условий (2.2), после некоторых преобразований получим:

$$U''(z) = P_2(x, y)[U'(z)]^2 + P_1(x, y)U'(z) + P_0(x, y)\,. \tag{2.3}$$

Здесь введены обозначения:

$$P_2(x, y) = A(x, y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y) + C(x, y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}\,, \tag{2.4а}$$

$$P_1(x, y) = 2A(x, y)\frac{\varphi_1'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y)\left(\frac{\psi_1'(y)}{\psi'(y)} + \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) + 2C(x, y)\frac{\psi_1'(y)}{\varphi'(x)}\,, \tag{2.4б}$$

$$P_0(x,y) = A(x,y)[\varphi_1'(x)]^2 + B(x,y)\varphi_1'(x)\psi_1'(y) + 2C(x,y)[\psi_1'(y)]^2. \tag{2.4в}$$

Предположим, что функции $\varphi(x), \psi(y), \varphi_1(x), \psi_1(y)$ выбраны так, что:

$$\varphi_1(x) = \alpha_1\varphi(x), \quad \psi_1(y) = \beta_1\psi(y), \quad \varphi'(x) = f_1(x), \quad \psi'(y) = f_2(y). \tag{2.5}$$

Учитывая выражения (1.25) для коэффициентов $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$ и соотношения (2.5), получаем:

$$P_2(x,y) = p_2 \equiv A_0 + B_0 + C_0, \tag{2.6а}$$

$$P_1(x,y) = p_1 \equiv 2A_0\alpha_1 + B_0(\alpha_1+\beta_1) + 2C_0\beta_1, \tag{2.6б}$$

$$P_0(x,y) = p_0 \equiv A_0\alpha_1^2 + B_0\alpha_1\beta_1 + C_0\beta_1^2\,. \tag{2.6в}$$

Вводя новую неизвестную функцию $v(z) = U'(z)$, преобразуем уравнение (2.3) к уравнению Риккати с постоянными коэффициентами:

$$v'(z) = p_2[v(z)]^2 + p_1v(z) + p_0\,, \tag{2.7}$$

В случае $p_2 = 0$ (2.7) сводится к линейному уравнению:

$$v'(z) = p_1v(z) + p_0\,. \tag{2.8}$$

Решая уравнение (2.8) и возвращаясь к функции $U(z)$, находим:

$$U(z) = V_0\exp(p_1z) - \frac{p_0}{p_1}z + U_0\,. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.1), (2.2) и (2.5), получаем решение уравнения (1.1) при $p_2 = 0$:

$$u(x,y) = V_0\exp\{p_1(\varphi(x)+\psi(y))\} + \left(\alpha_1 - \frac{p_0}{p_1}\right)\varphi(x) + \left(\beta_1 - \frac{p_0}{p_1}\right)\psi(y) + U_0\,, \tag{2.10}$$

$$\varphi(x) = \int f_1(x)dx, \quad \psi(y) = \int f_2(y)dy. \tag{2.10а}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $p_2 \neq 0$ – произвольное. Решая (2.7) как уравнение с разделяющимися переменными, возвращаясь к функции $u(x,y)$, с учетом (2.1), (2.2) и (2.5), находим:

$$u(x,y) = U_0 - \frac{1}{p_2}\ln\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{D}}{2}(\varphi(x)+\psi(y)-z_0)\right) + R(x,y), \tag{2.11а}$$

$$u(x,y) = U_0 - \frac{1}{p_2}\ln\left|\cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}(\varphi(x)+\psi(y)-z_0)\right)\right| + R(x,y), \tag{2.11б}$$

$$u(x,y) = U_0 - \frac{1}{p_2}\ln|\varphi(x)+\psi(y)-z_0| + R(x,y), \tag{2.11в}$$

где

$$R(x,y) = \left(\alpha_1 - \frac{p_1}{2p_2}\right)\varphi(x) + \left(\beta_1 - \frac{p_1}{2p_2}\right)\psi(y).$$

Выражения (2.11а, б, в) справедливы для случаев $D>0, D<0, D=0$ соответственно, $D=p_1^2-4p_0p_2$.

Случай 2. $g(u)=1/u$.

$$F(x,y)=\exp\left(\varphi_2(x)+\psi_2(y)\right), \quad z(x,y)=\varphi(x)+\psi(y), \quad G(x,y)\equiv 0. \tag{2.12}$$

Тогда уравнение (1.1) после некоторых преобразований приводится к виду:

$$\frac{U''(z)}{U(z)}=P_2(x,y)\left(\frac{U'(z)}{U(z)}\right)^2+P_1(x,y)\frac{U'(z)}{U(z)}+P_0(x,y)\,. \tag{2.13}$$

Коэффициенты в правой части уравнения (2.13) определяются выражениями:

$$P_2(x,y)=A(x,y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)}+B(x,y)+C(x,y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}\,, \tag{2.14а}$$

$$P_1(x,y)=2A(x,y)\frac{\varphi_2'(x)}{\psi'(y)}+(B(x,y)-1)\left(\frac{\psi_2'(y)}{\psi'(y)}+\frac{\varphi_2'(x)}{\varphi'(x)}\right)+2C(x,y)\frac{\psi_2'(y)}{\varphi'(x)}\,, \tag{2.14б}$$

$$P_0(x,y)=\frac{A(x,y)[\varphi_2'(x)]^2+(B(x,y)-1)\varphi_2'(x)\psi_2'(y)+2C(x,y)[\psi_2'(y)]^2}{\varphi'(x)\psi'(y)}\,. \tag{2.14в}$$

Предположим, что функции $\varphi(x),\psi(y),\varphi_2(x),\psi_2(y)$ выбраны так, что:

$$\varphi_2(x)=\alpha_2\varphi(x), \quad \psi_2(y)=\beta_2\psi(y), \quad \varphi'(x)=f_1(x), \quad \psi'(y)=f_2(y). \tag{2.15}$$

Тогда, аналогично соотношениям (2.6а,б,в), находим:

$$P_2(x,y)=p_2\equiv A_0+B_0-1+C_0, \tag{2.16а}$$

$$P_1(x,y)=p_1\equiv 2A_0\alpha_2+(B_0-1)(\alpha_2+\beta_2)+2C_0\beta_2, \tag{2.16б}$$

$$P_0(x,y)=p_0\equiv A_0\alpha_2^2+(B_0-1)\alpha_2\beta_2+C_0\beta_2^2. \tag{2.16в}$$

Вводя новую неизвестную функцию $v(z)=U'(z)/U(z)$, аналогично случаю 1, получаем уравнение Риккати в виде (2.7) с постоянными коэффициентами, которые определяются выражениями (2.16 а,б,в). В случае $p_2=0$ (2.7) сводится к линейному уравнению (2.8). Решая уравнение (2.8) и возвращаясь к функции $U(z)$, находим:

$$U(z)=U_0\exp\left(\int v(z)dz\right)=U_0\exp\left(V_0\exp(p_1 z)-\frac{p_0}{p_1}z\right). \tag{2.17}$$

Учитывая (2.1), (2.12) и (2.17), получаем для случая $p_2=0$ решение уравнения (1.1):

$$u(x,y)=U_0\exp\left\{V_0\exp\left\{p_1\left(\varphi(x)+\psi(y)\right)\right\}+\left(\alpha_2-\frac{p_0}{p_1}\right)\varphi(x)+\left(\beta_2-\frac{p_0}{p_1}\right)\psi(y)\right\}, \tag{2.18}$$

$$\varphi(x)=\int f_1(x)dx, \quad \psi(y)=\int f_2(y)dy. \tag{2.18а}$$

Для случая произвольного $p_2 \neq 0$, решая (2.7) как уравнение с разделяющимися переменными, возвращаясь к функции $u(x,y)$, с учетом (2.1), (2.12) и (2.15) находим:

$$u(x,y) = U_0 \left[\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{D}}{2}(\varphi(x)+\psi(y)-z_0)\right)\right]^{-1/p_2} S(x,y), \tag{2.19а}$$

$$u(x,y) = U_0 \left[\cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}(\varphi(x)+\psi(y)-z_0)\right)\right]^{-1/p_2} S(x,y), \tag{2.19б}$$

$$u(x,y) = U_0 \left((\varphi(x)+\psi(y)-z_0)\right)^{-1/p_2} S(x,y), \tag{2.19в}$$

где

$$S(x,y) = \exp\left\{\left(\alpha_1 - \frac{p_1}{2p_2}\right)\varphi(x) + \left(\beta_1 - \frac{p_1}{2p_2}\right)\psi(y)\right\}.$$

Выражения (2.19а, б, в) справедливы для случаев $D > 0, D < 0, D = 0$ соответственно, $D = p_1^2 - 4p_0p_2$; $\varphi(x), \psi(y)$ определяются выражениями (2.18а).

Таким образом, в результате проведенных выше рассуждений доказана следующая теорема:

Теорема 2.1. Пусть функции $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$ определяются выражениями (1.25).

1. Если $g(u) \equiv 1$, то уравнение (1.1) имеет решения, определяемые следующими выражениями:
при $A_0 + B_0 + C_0 = 0$ – выражением (2.10);
при $A_0 + B_0 + C_0 \neq 0$ – выражениями (2.11а, б, в) для случаев $D > 0, D < 0, D = 0$ соответственно.

2. Если $g(u) = 1/u$, то уравнение (1.1) имеет решения, определяемые следующими выражениями:
при $A_0 + B_0 + C_0 = 1$ – выражением (2.18);
при $A_0 + B_0 + C_0 \neq 1$ – выражениями (2.19а, б, в) для случаев $D > 0, D < 0, D = 0$ соответственно.

Далее рассмотрим точные решения уравнения (1.1) в случае произвольной нелинейности $g(u)$.

Теорема 2.2. Пусть существуют дифференцируемые функции $\varphi(x), \psi(y)$, удовлетворяющие условию:

$$A(x,y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x,y) + C(x,y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)} = K = \text{const}\,. \tag{2.20}$$

Тогда уравнение (1.1) имеет следующее решение:

$$\varphi(x) + \psi(y) - z_0 = V_0 \int \exp\left(-KG(u)\right) du\,, \tag{2.21}$$

где z_0, V_0 – произвольные постоянные, а $G(u)$ определяется выражением:

$$G(u) = \int g(u) du. \tag{2.21a}$$

□ Используя метод функционального разделения переменных аналогично теореме 1.2, решение уравнения (1.1) будем искать в виде (1.17). Подставляя выражение (1.17) в уравнение (1.1), преобразуем это уравнение к виду:

$$U''(z) = g(u)[U'(z)]^2 \left(A(x,y)\frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x,y) + C(x,y)\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)} \right). \tag{2.22}$$

Учитывая далее условие (2.20), уравнение (2.22) сводится к ОДУ относительно функции $U(z)$:

$$U''(z) = Kg(u)[U'(z)]^2. \tag{2.23}$$

Разделив почленно (2.23) на $U'(z)$, нетрудно привести это уравнение к виду:

$$\frac{d}{dz}\left(\ln U'(z) - KG(U)\right) = 0, \tag{2.24}$$

где $G(U)$ определяется выражением (2.21a).

Интегрируя уравнение (2.24), получаем:

$$\ln U'(z) - KG(U) = -\ln V_0\,. \tag{2.25}$$

Из (2.25) получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно $U(z)$:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{V_0}\exp\left(KG(U)\right). \tag{2.26}$$

Интегрируя уравнение (2.26), находим решение в неявном виде:

$$z - z_0 = V_0 \int \exp\left(-KG(U)\right) dU, \tag{2.27}$$

где z_0 – произвольная постоянная. Учитывая выражение для z из (1.17) и возвращаясь к переменной u, из (2.27) получаем решение уравнения (1.1) в виде (2.21). ■

Следствие. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) имеют вид (1.25). Тогда уравнение (1.1) имеет решение следующего вида:

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = V_0 \int \exp\left(-KG(u)\right) du, \tag{2.28}$$

где V_0 – произвольная постоянная,

$$K = A_0 + B_0 + C_0. \tag{2.28a}$$

□ Сформулированное утверждение является частным случаем теоремы 2.2, если функции $\varphi(x), \psi(y)$ выбрать в виде:

$$\varphi(x) = \int f_1(x)dx, \quad \psi(y) = \int f_2(y)dy. \qquad ■$$

Заключение

Таким образом, в данной работе найдены точные решения двумерного неавтономного гиперболического уравнения, содержащего произвольную нелинейность от искомой функции и квадратичную форму от ее первых производных с переменными коэффициентами. В качестве методов исследования использованы метод разделения переменных и метод Кларксона-Крускала. Для простейших нелинейностей типа $g(u) \equiv 1$, $g(u) = 1/u$, при определенных условиях на коэффициенты, исходное уравнение сведено к уравнению Риккати с постоянными коэффициентами, в результате чего получены решения в явном виде. Найдены решения в виде квадратичной формы от функций одной переменной, а также решение в виде произведения степеней независимых переменных. Для случая произвольной нелинейности от искомой функции получено решение в неявном виде. Результаты работы могут быть обобщены на нелинейные неавтономные гиперболические уравнения с правыми частями более общего вида.

Список литературы
References

1. Жибер А.В., Соколов В.В. 2001. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. Успехи математических наук. 56(1): 63-106.
Zhiber A.V., Sokolov V.V. 2001. Tochno integriruemye giperbolicheskie uravneniya liuvillevskogo tipa [Exactly integrated hyperbolic equations of Liouville's type] Uspekhi matematicheskih nauk. 56(1): 63–106.

2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. 2003. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 416 с.
Zaytsev V. F., Polyanin A. D. 2003. Spravochnik po differentsialnym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka [Handbook on the partial differential equations of the first order] M: Fizmatlit, 416 p.

3. Кудряшов Н.А. 2010. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд-во «Интеллект», 368 с.
Kudryashov N.A. 2010. Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny: Publishing house "Intellect", 368 p.

4. Кузнецова М.Н. 2012. О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными подстановками с уравнением Клейна-Гордона. Уфимский математический журнал. 4(3): 86-103.
Kuznetsova M.N. 2012. O nelineynykh giperbolicheskikh uravneniyakh, svyazannykh differentsialnymi podstanovkami s uravneniem Kleina-Gordona [On nonlinear hyperbolic equations connected with Klein – Gordon equation by differential substitutes]. Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. 4(3): 86-103.

5. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 432 с.
Polyanin A.D., Zaytsev V. F. 2002. Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya [Handbook on the nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions]. M: Fizmatlit, 432 p.

6. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 256 с.
Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. 2005. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Methods of solving of nonlinear equations of mathematical physics and mechanics] M: Fizmatlit, 256 p.

7. Полянин А.Д., Журов А.И. 2002. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике. Доклады РАН, 382(5): 606–611.
Polyanin A.D., Zhurov A.I. 2002. Obobshennoe i funktsionalnoe razdelenie peremennykh v matematicheskoy fizike i mekhanike [Generalized and functional separation of variables in mathematical physics and mechanics]. Doklady RAN, 382(5): 606–611.

8. Рахмелевич И.В. 2013. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 3(23): 37–44.
Rakhmelevich I.V. 2013. O primenenii metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, soderzhashim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh [On application of variable separation method to mathematical physics equations containing homogeneous functions of derivatives] Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 3(23): 37–44.

9. Рахмелевич И.В. 2014. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 1(27): 42–50.
Rakhmelevich I.V. 2014. Ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki, soderzhashikh multiodnorodnye funktsii ot proizvodnykh [On equations of mathematical physics containing multi-homogeneous functions of derivatives]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 1(27): 42–50.

10. Рахмелевич И.В. 2015. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 1(33): 12–19.
Rakhmelevich I.V. 2015. O dvumernykh giperbolicheskikh uravneniyakh so stepennoy nelineynostiyu po proizvodnym [On two-dimensional hyperbolic equation with power non-linearity on the derivatives]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 1(33): 12–19.

11. Рахмелевич И.В. 2017. Двумерное неавтономное гиперболическое уравнение второго порядка со степенными нелинейностями. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 49: 52–60.
Rakhmelevich I.V. 2017. Dvumernoe neavtonomnoe giperbolicheskoe uravnenie vtorogo poryadka so stepennymi nelineynostyami [Two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation of the second order with power non-linearities]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 49: 52-60.

12. Clarkson P. A., Kruskal M. D. 1989. New similarity reductions of the Boussinesq equation. Journal of Mathematical Physics, V. 30, No 10: 2201–2213.

13. Grundland A.M., Infeld E. 1992. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions. Journal of Mathematical Physics, V. 33, No 7: 2498–2503.

14. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. 1993. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. Journal of Physics A, V. 26: 1901–1913.

15. Polyanin A.D. 2019. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. International Journal of Non-Linear Mechanics, V. 111: 95–105.

16. Zhdanov R.Z. 1994. Separation of variables in the non-linear wave equation. Journal of Physics A, V. 27: L291-L297.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Рахмелевич И.В. 2019. Двумерное неавтономное гиперболическое уравнение с квадратичным полиномом от первых производных. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 402–416. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-402-416.

Rakhmelevich I.V. 2019. Two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation with quadratic polynomial on first derivatives. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 402–416 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-402-416.