УДК 511.512
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-475-486

ЧИСЛО РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ С РАСТУЩИМ ДИСКРИМИНАНТОМ

A NUMBER OF SOLUTIONS OF THE EQUATION, WHICH CONTAINS QUADRATIC FORMS WITH A GROWING DISCRIMINANT

Л.Н. Куртова

L.N. Kurtova

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация

В работе рассматривается аналог классической проблемы делителей Ингама. Изучается бинарная аддитивная задача с квадратичными формами. Для числа решений уравнения $Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=1$ была получена асимптотическая формула. Данное уравнение содержит бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классу идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Дискриминант мнимого квадратичного поля является растущим параметром. Число решений уравнения ищется с весами $\exp(-(Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k}))/n)$ при росте параметра n. Доказательство асимптотической формулы проводится круговым методом с использованием оценок для двойных сумм Гаусса с учетом растущего дискриминанта и оценки А. Вейля для суммы Клостермана.

Abstract

In this article, an analogue of the Ingam binary additive divisor problem is considered. A binary additive problem with quadratic forms is studied. The asymptotical formula of the number of solution of diophantine equation $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1$ is received. This equation contains binary positive defined primitive quadratic forms $Q_1(\overline{m})$ and $Q_2(\overline{k})$ corresponded to the ideal class of imaginary quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. The discriminant of an imaginary quadratic field is a growing parameter. The number of solutions searched with weights $\exp(-(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k}))/n)$ with the growth of the parameter n. Proof of the asymptotical formula is carried out by the circular method. The estimation of Gauss double sums with growing discriminant and estimation of Kloosterman's sum by A. Weil are used.

Ключевые слова: аддитивная задача, асимптотическая формула, число решений, двойная сумма Гаусса, сумма Клоостермана.
Key words: additive problem, asymptotic formula, number of solutions, double Gauss sum, Kloosterman sum.

Введение

В 1927 году А.Е. Ингам [Ingham, 1927] рассмотрел уравнение

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \le n,$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$, и элементарными методами получил асимптотическую формулу для числа его решений $J(n)$:

$$J(n) = \frac{6}{\pi^2} n \ln^2 n + O(n \ln n).$$

Рассмотренная проблема получила название неопределенной бинарной аддитивной проблемы делителей.

Важным этапом в изучении данной проблемы является использование кругового метода. Т. Эстерман в своей работе [Estermann, 1931] получил асимптотическую формулу:

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n),$$

где $P_2(x)$ – многочлен 2-ой степени, а $R(n) = O(n^{11/12} \cdot \ln^{17/3} n)$. В этой формуле остаточный член имеет степенное понижение по сравнению с главным.

Дальнейшие исследования связаны с уточнением остатка в асимптотической формуле для $J(n)$.

Отметим работы Д.И. Исмоилова [Исмоилов, 1979] и Д.Р. Хиз-Брауна [Heath-Brown, 1979], в которых была получена оценка: $R(n) \ll n^{5/6+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная. В первой работе использовались улучшенные оценки для суммы Клостермана, а во второй – метод производящих функций.

Методами аналитической теории чисел Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [Архипов, Чубариков, 2006] получили новую оценку остатка: $R(n) \ll n^{3/4} \ln^4 n$.

В результате развития теории коэффициентов Фурье собственных функций оператора Лапласа, было получено новое представление суммы сумм Клоостермана. На основе этого представления Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [Deshouillers, Iwaniec, 1982] доказали, что $R(n) \ll n^{2/3+\varepsilon}$.

Кроме задачи, связанной с улучшением остаточного члена в проблеме делителей Ингама, рассматриваются различные обобщения и аналоги данной проблемы.

Ю.В. Линник [Линник, 1961], используя дисперсионный метод, получил полное решение неопределенной аддитивной проблемы делителей: $xy - x_1x_2\cdots x_k = 1$, $xy \le n$, где $x, y, x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{N}$.

Исследования автора посвящены бинарным аддитивным задачам с квадратичными формами, также относящимся к аналогам проблемы делителей Ингама.

В работе [Куртова, 2007] решена задача получения асимптотической формулы для числа решений уравнения $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1$, содержащего бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классам идеалов мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d – отрицательное бесквадратное число. Полученная формула справедлива при $n \to \infty$. При этом дискриминант мнимого квадратичного поля является фиксированным параметром.

В данной работе рассматривается задача, когда дискриминант мнимого квадратичного поля является растущим параметром.

Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, $\delta_F = -D$ – дискриминант поля F; $Q_i(\overline{m}) = \frac{1}{2}\overline{m}^t A_i \overline{m}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i, $\det A_i = D$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$I(n, D) = \sum_{Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1} e^{-(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k}))/n}.$$

В работе проводится доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть* ε *– произвольное положительное число,* $\delta_F = -D$ *– дискриминант поля* F, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда при $n \to \infty$ *и* $D \ll n^{1/8-\varepsilon}$ *справедлива асимптотическая формула:*

$$I(n,D) = \frac{2\pi^2 n}{D} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i l/q} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) + O(D^{1+\varepsilon} n^{3/4+\varepsilon}),$$

где $G_i(q,l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{m}(\mod q)} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$ $(i=1,2)$ *– двойные суммы Гаусса. Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна. Константа в знаке* O *абсолютная.*

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. (Функциональное уравнение для двумерного тета-ряда) [Ogg, 1969, глава VI]. *Пусть* $Im\tau > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, $Q(\overline{n})$ *– положительно определенная квадратичная форма дискриминанта* δ_F *с матрицей* A,

$$\theta(\tau, \overline{x}) = \sum_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i \tau Q(\overline{n} + \overline{x})).$$

Тогда

$$\theta(\tau, \overline{x}) = \frac{i}{\tau\sqrt{\delta_F}} \sum_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{\pi i}{\tau} \overline{n}^t A^{-1} \overline{n} + 2\pi i \overline{n}^t \overline{x}\right).$$

Лемма 2. [Лаврентьев, Шабат, 1958, глава VI]. *Пусть* $q, q', q'' \le N$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i x}}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} dx = \frac{n}{2} + O(qN).$$

Лемма 3. (Оценка суммы Клоостермана) [Estermann, 1961], [Малышев, 1962]. *Пусть* $ll^* \equiv 1(\mod q)$, $K(q,u,v) = \sum\limits_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} \exp\left(2\pi i(ul + vl^*)/q\right)$ *– сумма Клоостермана. Справедлива оценка*

$$K(q,u,v) \ll \tau(q) q^{1/2} (u,v,q)^{1/2}.$$

Лемма 4. (Равенства и оценки для произведения двойных сумм Гаусса) *Пусть* $D = -\delta_F$; $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$ *– бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с дискриминантом* D; $(l,q) = 1$.

Пусть $(q,D) = D_1$, $ll^* \equiv 1(\mod q)$, $(D/D_1)(D/D_1)^* \equiv 1(\mod q)$, $q = 2^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. *Тогда*

$$G_1(q,l,\overline{m}) G_2(q,-l,\overline{k}) = C_1(q,D) q^2 \exp\left(-2\pi i \frac{l^*}{q} C_2(q,D)(Q_1'(\overline{m}) - Q_2'(\overline{k}))\right).$$

Если $D_1 = 1$, *то* $C_1(q,D) = 1$, $C_2(q,D) = D^*$.

Если $D_1 > 1$, *то* $|C_1(q,D)| \le D_1$, $C_2(q,D) = (D/D_1)^*/D_1$.

□ Случай, когда $(q,D)=1$, подробно изложен в [Куртова, 2019]. Для квадратичных форм разных дискриминантов было получено равенство:

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k})=C(q,\delta_{F_1},\delta_{F_2})q^2\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}(D_1^*Q_1'(\overline{m})-D_2^*Q_2'(\overline{k}))\right),$$

где $C(q,\delta_{F_1},\delta_{F_2})=(-1)^{\frac{(2-\delta_{F_1}-\delta_{F_2})\alpha_1}{4}}\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}}\right)$.

С учетом условия $\delta_{F_1}=\delta_{F_2}=-D$, можем считать, что $D_1^*=D_2^*=D^*$ и $C(q,\delta_{F_1},\delta_{F_2})=C_1(q,D)=(-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha_1}{2}}$.

Так как или $\delta_F\equiv 1(\mod 4)$, или $\alpha_1=0$, то $(-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha_1}{2}}=1$. Таким образом, если $(q,D)=1$, то

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k})=q^2\exp\left(-2\pi i\frac{l^*D^*}{q}(Q_1'(\overline{m})-Q_2'(\overline{k}))\right).$$

Для случая, когда $(q,D)>1$, будем использовать точные формулы для сумм Гаусса от степени простого числа, которые доказаны в работах С.А. Гриценко [Гриценко, 2003], [Гриценко, 2012]. В работе [Куртова, 2014, с. 29] приводится равенство:

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k})=C_1(q,D)q^2\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}C_2(q,D)(Q_1'(\overline{m})-Q_2'(\overline{k}))\right),$$

где

$$C_1(q,D)=C_3(D_1,Q_1'(\overline{m}),Q_2'(\overline{k}))D_1,\quad C_2(q,D)=(D/D_1)^*/D_1.$$

Параметр $C_3(D_1,Q_1'(\overline{m}),Q_2'(\overline{k}))\ll 1$, тогда $|C_1(q,D)|\le D_1$. ■

Лемма 5. *Пусть* $V(q,D,\overline{m},\overline{k})=\sum\limits_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi il/q}G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k})$. *Справедливы следующие оценки:*

$$V(q,D,\overline{0},\overline{0})\ll(q,D)q^2,$$

$$V(q,D,\overline{m},\overline{k})\ll(q,D)q^{5/2+\varepsilon}.$$

□ Доказательство леммы будет проводится теми же методами, что и в работе [Куртова, 2014, с. 33]. При получении оценок будем учитывать, что параметр D растущий. Пусть $q=q_1q_2$, $(q_1,q_2)=1$, $(q_1,D)=1$; q_2 – либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят D. Так как сумма Гаусса является вполне мультипликативной функцией, т. е.

$$G_1(q_1q_2,l,\overline{m})=G_1(q_1,l_1q_2^2,\overline{m})G_1(q_2,l_2q_1^2,\overline{m}),$$

то и функция $V(q,D,\overline{m},\overline{k})$ мультипликативна. Тогда

$$V(q_1q_2,D,\overline{m},\overline{k})=V_1(q_1,D,q_2,\overline{m},\overline{k})V_2(q_2,D,q_1,\overline{m},\overline{k}).$$

Оценим каждую из функций $V_1(q_1,D,q_2,\overline{m},\overline{k})$ и $V_2(q_2,D,q_1,\overline{m},\overline{k})$. Воспользуемся результатами из леммы 4.

Так как $(q_1,D)=1$, то из равенства для произведений сумм Гаусса имеем

$$V_1(q_1,D,q_2,\overline{m},\overline{k})=q_1^2\sum_{\substack{l_1=1,\\(l_1,q_1)=1}}^{q_1}\exp\left(-2\pi i\frac{l_1}{q_1}-2\pi i\frac{l_1{}^*(q_2^2)^*}{q_1}D^*(Q_1'(\overline{m})-Q_2'(\overline{k}))\right).$$

К полученной сумме Клостермана $K\left(q_1, -1, -(q_2^2)^* D^*(Q_1'(\overline{m}) - Q_2'(\overline{k}))\right)$ применим оценку из леммы 3. Тогда $V_1(q_1, D, q_2, \overline{m}, \overline{k}) \ll q_1^{5/2+\varepsilon}$.

В случае, когда $\overline{m} = \overline{0}$, $\overline{k} = \overline{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_1(q_1, D, q_2, \overline{0}, \overline{0}) = q_1^2 \sum_{\substack{l_1=1,\\ (l_1,q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i l_1/q_1} = q_1^2 \mu(q_1) \ll q_1^2.$$

Так как $(q_2, D) > 1$, то из равенства для произведений сумм Гаусса имеем

$$V_2(q_2, D, q_1, \overline{m}, \overline{k}) = C_1(q_2, D) q_2^2 \sum_{\substack{l_2=1,\\ (l_2,q_2)=1}}^{q_2} \exp\left(-2\pi i \frac{l_2}{q_2} - 2\pi i \frac{{l_2}^*(q_1^2)^*}{q_2} C_2(q_2, D)(Q_1'(\overline{m}) - Q_2'(\overline{k}))\right).$$

К полученной сумме Клостермана $K\left(q_1, -1, -(q_1^2)^* C_2(q_2, D)(Q_1'(\overline{m}) - Q_2'(\overline{k}))\right)$ применим оценку из леммы 3. Тогда $V_2(q_2, D, q_1, \overline{m}, \overline{k}) \ll (q_2, D) q_2^{5/2+\varepsilon}$.

В случае, когда $\overline{m} = \overline{0}$, $\overline{k} = \overline{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_2(q_2, D, q_1, \overline{0}, \overline{0}) = (q_2, D) q_2^2 \sum_{\substack{l_2=1,\\ (l_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i l_2/q_2} = (q_2, D) q_2^2 \mu(q_2) \ll (q_2, D) q_2^2.$$

Объединяем полученные оценки для $V_1(q_1, D, q_2, \overline{m}, \overline{k})$ и $V_2(q_2, D, q_1, \overline{m}, \overline{k})$. Так как $q = q_1 q_2$, $(q_1, D) = 1$, то $(q_2, D) = (q, D)$. ■

3. Доказательство теоремы

1. Используя круговой метод, можем сумму $I(n, D)$ записать в виде интеграла:

$$I(n, D) = \int_0^1 S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha} d\alpha,$$

где

$$S_1(\alpha) = \sum_{\overline{m} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-1/n + 2\pi i \alpha) Q_1(\overline{m})}, \quad S_2(\alpha) = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-1/n - 2\pi i \alpha) Q_2(\overline{k})}.$$

Выберем $N = [\sqrt{n}]$, $\xi_{0,1} = [-\frac{1}{N}, \frac{1}{N})$. Разобьем промежуток $[\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N})$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N(см. [Виноградов, 2004]). Пусть $\frac{l''}{q''} < \frac{l}{q} < \frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, $1 \le l, q \le N$, $q' \le N$, $q'' \le N$.

Будем рассматривать промежутки $\xi_{l,q} = [l/q - 1/q(q+q''), l/q + 1/q(q+q'))$, для которых справедливы следующие свойства: $\left[-\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}\right) = \bigcup\limits_{q=1}^{N} \bigcup\limits_{\substack{l=0\\ (l,q)=1}}^{q-1} \xi_{l,q}$, причем $\xi_{l,q} \cap \xi_{l',q'} = \emptyset$ при $(l, q) \ne (l', q')$. Тогда

$$I(n, D) = \sum_{q \le N} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} \int_{\xi_{l,q}} S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha} d\alpha =$$

$$= \sum_{q \le N} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i l/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} S_1(l/q + x) S_2(l/q + x) e^{-2\pi i x} dx.$$

2. Для сумм $S_1(l/q+x)$ и $S_2(l/q+x)$ проведем преобразования, связанные с разбиением но арифметическим прогрессиям с разностью q, которые позволят использовать для нпх функциональное уравненпе из леммы 1.

$$S_1(l/q+x) = \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2} \exp\left((-n^{-1}+2\pi il/q+2\pi ix)Q_1(\overline{m})\right) =$$

$$= \sum_{\overline{s} \pmod q} e^{2\pi il/qQ_1(\overline{s})} \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\equiv\overline{s} \pmod q}} e^{(-n^{-1}+2\pi ix)Q_1(\overline{m})} =$$

$$= \sum_{\overline{s} \pmod q} e^{2\pi ial/qQ_1(\overline{s})}\theta\left((x+\frac{i}{2\pi n})q^2, \overline{s}/q\right),$$

где для $\theta\left((x+\frac{i}{2\pi n})q^2, \overline{s}/q\right)$ применим функциональное уравнение из леммы 1.

Тогда для $S_1(l/q+x)$ получим равенство

$$S_1(\frac{l}{q}+x) = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi ix)} \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{Dq^2(n^{-1}-2\pi ix)}\right) G_1(q,l,\overline{m}).$$

Из полученного равенства выделим главное слагаемое, когда $\overline{m}=\overline{0}$. Тогда $S_1(l/q+x)$ можно представить в виде суммы: $S_1(l/q+x) = \varphi_1 + \Phi_1$, где

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi ix)} G_1(q,l,\overline{0}),$$

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi ix)} \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{Dq^2(n^{-1}-2\pi ix)}\right) G_1(q,l,\overline{m}).$$

Аналогичные преобразованпя для второй суммы дают следующее представление для $S_2(l/q+x) = \varphi_2 + \Phi_2$, где

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}+2\pi ix)} G_2(q,-l,\overline{0}),$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}+2\pi ix)} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{Dq^2(n^{-1}+2\pi ibx)}\right) G_2(q,-l,\overline{k}).$$

3. В формулу для $I(n,D)$, нолученную в пункте 1, подставим представления для функций $S_1(l/q+x)$ и $S_2(l/q+x)$. Тогда

$$I(n,D) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \frac{4\pi^2}{D} \sum_{q\leq N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi il/q} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi ix}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2},$$

$$I_2 = \sum_{q\leq N} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi il/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_1\Phi_2 e^{-2\pi ix}dx,$$

$$I_3 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i l/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_2\Phi_1 e^{-2\pi i x}dx,$$

$$I_4 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i l/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1\Phi_2 e^{-2\pi i x}dx.$$

Интеграл I_1 является главным членом асимптотической формулы. Для оставшихся интегралов проведем оценку сверху.

4. Вычислим интеграл I_1, используя равенство из леммы 2. Тогда

$$I_1 = \frac{2\pi^2 n}{D}\sum_{q\le N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i l/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) + O(I_{1,1}),$$

где

$$I_{1,1} = \frac{N}{D}\sum_{q\le N} q^{-3} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i l/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) = \frac{N}{D}\sum_{q\le N} q^{-3} V(q,D,\overline{0},\overline{0}).$$

Функцию $V(q,D,\overline{0},\overline{0})$ оценим, используя неравенство из леммы 5. Получаем следующую оценку:

$$I_{1,1} \ll \frac{N}{D}\sum_{q\le N} q^{-3}|V(q,D,\overline{0},\overline{0})| \ll \frac{N}{D}\sum_{q\le N}(q,D)q^{-1} \ll$$

$$\ll \frac{N}{D}\sum_{t|D}\sum_{q\le \frac{N}{t}} q^{-1} \ll N^{1+\varepsilon}/D^{1-\varepsilon} \ll n^{1/2+\varepsilon}/D^{1-\varepsilon}.$$

Оценим сумму

$$R = \frac{n}{D}\sum_{q> N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i l/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) = \frac{n}{D}\sum_{q> N} q^{-4} V(q,D,\overline{0},\overline{0}).$$

Снова используем лемму 5. Получаем, что

$$R \ll \frac{n}{D}\sum_{q> N} q^{-4}|V(q,D,\overline{0},\overline{0})| \ll \frac{n}{D}\sum_{q\le N}(q,D)q^{-2} \ll$$

$$\ll \frac{n}{D}\sum_{t|D} t^{-1}\sum_{q> \frac{N}{t}} q^{-2} \ll n^{1/2+\varepsilon}/D^{1-\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{4\pi^2 n}{D}\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i l/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{1/2+\varepsilon}/D^{1-\varepsilon}).$$

5. Оценка остаточных слагаемых I_2, I_3, I_4 существенно не отличается, поэтому рассмотрим доказательство только для I_4:

$$I_4=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi il/q}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\Phi_1\Phi_2e^{-2\pi ix}dx.$$

Используем равенства для Φ_1, Φ_2, полученные в пункте 2.

$$I_4=\frac{4\pi^2}{D}\sum_{q\le N}q^{-4}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\frac{e^{2\pi ix}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\times$$

$$\times\sum_{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\overline{m}\ne\overline{0}}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_1'(\overline{m})}{q^2D(n^{-1}-2\pi ix)}\right)\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\\overline{k}\ne\overline{0}}}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_2'(\overline{k})}{q^2D(n^{-1}+2\pi ix)}\right)V(q,D,\overline{m},\overline{k}).$$

Пусть θ – сколь угодно малое положительное число. Выделим интеграл малой длины:

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}=\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}+\int\limits_{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}+\int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}.$$

После проведенного разбиения I_4 представляется в виде суммы: $I_4=I_{4,1}+I_{4,2}+I_{4,3}$.

6. Проведем оценку $I_{4,2}$. Прежде всего учтем, что $V(q,D,\overline{m},\overline{k})\ll(q,D)q^{5/2+\varepsilon}$. Тогда

$$I_{4,2}\ll\frac{1}{D}\sum_{q\le N}(q,D)q^{-3/2+\varepsilon}\int\limits_{0}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}\frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\\overline{m}\ne\overline{0}}}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_1'(\overline{m})}{q^2D(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right)\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\\overline{k}\ne\overline{0}}}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_2'(\overline{k})}{q^2D(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right).$$

В полученной сумме по q выделим следующие слагаемые:

$$I_{4,2}\ll\sum_{q\le n^{1/2-\theta}}\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}+\sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N}\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}=\sum\nolimits_{41}+\sum\nolimits_{42}.$$

Для $\sum_{41}$ учитываем, что $q\le n^{1/2-\theta}$ и $0\le x\le[qn^{1/2+\theta}]^{-1}$. Получаем

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_i'(\overline{m})}{q^2D(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right)\ll\exp(-cn^{2\theta}/D),$$

где c – постоянная, $i=1,2$. Тогда

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\\overline{m}\ne\overline{0}}}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_1'(\overline{m})}{q^2D(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right)=O(D\exp(-cn^{2\theta})),$$

$$\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2 D(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) = O(D\exp(-cn^{2\theta})).$$

Проведем оценивание интеграла при условии, что $q \le n^{1/2-\theta}$:

$$\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \ll \int\limits_0^{2\pi[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dt}{n^{-2}+t^2} \ll n^{3/2-\theta}q^{-1}.$$

После проведенных рассуждений получаем:

$$\sum\nolimits_{41} \ll n^{3/2-\theta} D\exp(-cn^{2\theta}) \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} (q,D)q^{-5/2+\varepsilon} \ll n^{3/4+\varepsilon}D^{1+\varepsilon}.$$

Рассмотрим $\sum_{42}$. В данной сумме $q \le N$ и $0 \le x \le [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, поэтому

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_i'(\overline{m})}{q^2 D(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) \ll \exp(-cQ_i'(\overline{m})/D),$$

где c – постоянная, $i = 1, 2$. Тогда

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2 D(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) = O(D), \quad \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2 D(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) = O(D).$$

Для интеграла справедлива тривиальная оценка: $\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \ll n\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \ll n.$

В итоге получаем следующую оценку для суммы $\sum_{42}$:

$$\sum\nolimits_{42} \ll nD \sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N} (q,D)q^{-3/2+\varepsilon} \ll$$

$$\ll nD\sum_{t|D} t^{-1/2+\varepsilon} \sum_{q<\frac{N}{t}} q^{-3/2+\varepsilon} \ll n^{3/4+\varepsilon}D^{1+\varepsilon}.$$

Таким образом, $I_{4,2} = O(n^{3/4+\varepsilon}D^{1+\varepsilon})$.

7. Проведем оценку для $I_{4,3}$. Так как $V(q,D,\overline{m},\overline{k}) \ll (q,D)q^{5/2+\varepsilon}$, $q \le N$ и $[qn^{1/2+\theta}]^{-1} \le x \le [q(q+q')]^{-1}$, то

$$\left|\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2 D_1(n^{-1}-2\pi ix)}\right)\right| = O(D), \quad \left|\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2 D_2(n^{-1}+2\pi ix)}\right)\right| = O(D).$$

Кроме того, при $q \le N$ справедлива следующая оценка интеграла:

$$\int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi ihx}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \ll \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qn^{1/2+\theta}.$$

После произведенных оценок получаем, что

$$I_{4,3} \ll n^{1/2+\theta} D \sum_{q \le N} (q, D) q^{-1/2+\varepsilon} \ll n^{1/2+\theta} D \sum_{t|D} t^{1/2+\varepsilon} \sum_{q \le N/t} q^{-1/2+\varepsilon} \ll n^{3/4+\theta+\varepsilon} D^{1+\varepsilon}.$$

Интеграл $I_{4,1}$ оценивается также, как $I_{4,3}$. Объединяя оценки, полученные в пунктах 6 и 7, можем утверждать, что $I_4 = O(n^{3/4+\varepsilon} D^{1+\varepsilon})$. Следовательно, остаточный член асимптотической формулы для $I(n, D)$ имеет оценку $O(n^{3/4+\varepsilon} D^{1+\varepsilon})$.

4. Заключение

Доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1$ с весами $\exp(-(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k}))/n)$ при двух растущих параметрах $n \to \infty$ и $D \ll n^{1/8-\varepsilon}$. $D = -\delta_F$ является дискриминантом мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, и связан с квадратичными формами, входящими в уравнение. Для доказательства применяются новые оценки для сумм Гаусса, содержащих квадратичные формы, с учетом растущего дискриминанта.

Список литературы

1. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. 2006. Об аддитивной проблеме делителей Ингама. Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. № 5: 32–35.
2. Виноградов И.М. 2004. Основы теории чисел. СПб-М., Лань, 167 с.
3. Гриценко С.А. 2003. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле. Чебышевский сборник. Т. 4. Вып. 2: 53–67.
4. Гриценко С.А. 2012. Об одной аддитивной задаче и ее приложении к проблеме распределения нулей линейных комбинаций L-функций Гекке на критической прямой. Тр. МИАН. 276: 96–108.
5. Исмоилов Д.И. 1979. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений. Докл. АН Тадж. ССР. Т. 22, № 2: 75–79.
6. Кузнецов Н.В. 1980. Гипотеза Нетерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана. Матем. сб. Т. 111(153). № 3: 334–383.
7. Куртова Л.Н. 2007. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами. Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика. № 7(57): 107–121.
8. Куртова Л.Н. 2014. Бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами. Дис. канд. физ.-мат. наук, Ульяновск. гос. университет, Ульяновск, 115 с.
9. Куртова Л.Н. 2019. Число решений уравнения с квадратичными формами разных дискриминантов. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика Физика: Научный рецензируемый журнал. Белгород: Изд-во "БелГУ". № 3 (51): 374–386.
10. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. 1958. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматлит, 678 с.
11. Линник Ю.В. 1961. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л., Изд-во ЛГУ, 208 с.

12. Малышев А.В. 1962. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 65: 3–212.

13. Начев У.М., Дохов Р.А. 2013. О двойных суммах Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. № 19(162). Вып. 32: 108–119.

14. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. 1982. An additive divisor problem. J. London Math. Soc. V. 26(2): 1–14.

15. Estermann T. 1931. Uber die Darstellung einer Zahl als Di erenz von zwei Produkten. J. Reine Angew. Math. V. 164: 173–182.

16. Estermann T. 1961. On Klostermann's sum. Mathematika. 8: 83–86.

17. Heath-Brown D.R. 1979.The fourths power moment of the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc. V. 38. № 3: 385–422.

18. Ingham A.E. 1927. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. V. 2(7): 202–208.

19. Ogg A.P. 1969. Modular Forms and Dirichlet Series. N.-Y., W.A. Benjamin Inc., 211 p.

20. Weil A. 1948. On some exponential sums. Proc. Nat. Acad. Of Sci. 34: 204–207.

References

1. Arhipov G.I., Chubarikov V.N. 2006. Ob additivnoj probleme delitelej Ingama [On the Ingam additive problem]. Vestnik Moskovskogo universiteta. Cer. 1. Matematika. Mehanika. № 5: 32–35.

2. Vinogradov I.M. 2004. Osnovy teorii chisel [The basics of numbers theory]. SPb-M., Lan', 167 p.

3. Gritsenko S.A. 2003. O funkcional'nom uravnenii odnogo arifmeticheskogo rjada Dirihle [On the functional equation of an arithmetic Dirichlet series]. Chebyshevskij sbornik. T. 4. Vyp. 2: 53–67.

4. Gritsenko S.A. 2012. On an additive problem and its application to the problem of distribution of zeros of linear combinations of Hecke L-functions on the critical line. Proc. Steklov Inst. Math.. 276: 90–102. (in Russian).

5. Ismoilov D.I. 1979. Ob asimptotike predstavlenija chisel kak raznosti dvuh proizvedenij [On the asymptotic behavior of the representation of numbers as the difference of two products]. Dokl. AN Tadzh. SSR. T. 22, № 2: 75–79.

6. Kuznetsov N.V. 1981. Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums. Math. USSR-Sb. 39:3: 299–342. (in Russian).

7. Kurtova L.N. 2007. On a binary additive problem with quadratic forms. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaja serija. Matematika. № 7(57): 107–121. (in Russian).

8. Kurtova L.N. 2014. Binarnye additivnye zadachi s kvadratichnymi formami [Binary additive problems with quadratic forms]. Dis. kand. fiz.-mat. nauk, Ul'janovsk. gos. universitet, Ul'janovsk, 115 p.

9. Kurtova L.N. 2019. A number of solutions the equation with quadratic forms of different discriminants. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika Fizika: Nauchnyj recenziruemyj zhurnal. Belgorod: Izd-vo "BelGU". № 3 (51): 374–386. (in Russian).

10. Lavrent'ev M.A. Shabat B.V. 1958. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo. M., Fizmatlit, 678 p.

11. Linnik Ju.V. 1961. Dispersionnyj metod v binarnyh additivnyh zadachah [Dispersion method in binary additive tasks]. L., Izd-vo LGU, 208 p.

12. Malyshev A.V. 1962. O predstavlenii celyh chisel polozhitel'nymi kvadratichnymi formami [On the representation of integers by positive quadratic forms]. Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR. T. 65: 3–212.

13. Pachev U.M., Dohov R.A. 2013. About Gauss' double sums correspoding to classes of igeals of maginary quadratic field. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika. Fizika. № 19(162). Vyp. 32: 108–119. (in Russian).

14. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. 1982. An additive divisor problem. J. London Math. Soc. V. 26(2): 1–14.

15. Estermann T. 1931. Uber die Darstellung einer Zahl als Di erenz von zwei Produkten. J. Reine Angew. Math. V. 164: 173–182.

16. Estermann T. 1961. On Klostermann's sum. Mathematika. 8: 83–86.

17. Heath-Brown D.R. 1979.The fourths power moment of the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc. V. 38. № 3: 385–422.

18. Ingham A.E. 1927. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. V. 2(7): 202–208.

19. Ogg A.P. 1969. Modular Forms and Dirichlet Series. N.-Y., W.A. Benjamin Inc., 211 p.

20. Weil A. 1948. On some exponential sums. Proc. Nat. Acad. Of Sci. 34: 204–207.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Куртова Л.Н. 2019. Число решений одного уравнения, содержащего квадратичные формы с растущим дискриминантом. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 475–486. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-475-486.

Kurtova L.N. 2019. A number of solutions of the equation, which contains quadratic forms with a growing discriminant. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 475–486 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-475-486.