ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 536.1; 514.8
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-522-532

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ИЗОНРОЦЕССАХ

SOLVING THE DIFFERENTIAL EQUATION OF IDEAL GAS CONDITION AT ISOPROCESSES

Г.В. Аверин, М.В. Шевцова
G.V. Averin, M.V. Shevtsova

Донецкий национальный технический университет,
ул. Артема, 58, Донецк, 283001, Донецкая Народная республика

Donetsk National Technical University,
58 Artema St., Donetsk, 283001, Donetsk People's Republic

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

Belgorod State Technological University named after V.G. Shoukhov,
46 Kostyukova St., Belgorod, 308012, Russia

E-mail: averin.gennadiy@gmail.com, masha_shev@mail.ru

Аннотация
В настоящей статье рассматривается онисание пространства состояния идеального газа на основе решения квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка методом характеристик. Выведена формула решеппя в общем виде, а также ее варианты для случаев изохорного, адиабатного и изотермического процессов. Нри этом данные процессы описываются функциями времени. Предложена геометрическая интерпретация решений. С применением средств современной компьютерной математики представлены решения соответствующих дифференциальных уравнений в виде поверхностей в трехмерном пространстве термодинамических неременных (Q, v, p).

Abstract
In this article we consider a special method of description the space of conditions of ideal gas. It is based on the solution of quasilinear partial differential equation of the fist order. Geometrically the solution of this equation represent a surface in the space of thermodynamic variables (Q, v, p). We solve this equation using method of characteristics which are defined by the system of the ordinary differential equations. We received the general solution's formula, and also its variants for the cases of isochoric, adiabatic and isothermic processes. Cauchy problem for the said differential equation is connected with finding of the integrated surface passing through the set curve of any process which can be presented in a parametrical form. We describe such process as time functions. It is given the geometrical representation of the space of ideal gas conditions at isoprocesses. We construct the following integrated surfaces using means of computer mathematics.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение, геометрическая интерпретация, метод характеристик.

Keywords: quasilinear partial differential equation, geometrical representation, method of characteristics.

1. Введение

Классическая термодинамика является основой многих физических наук. Между тем построение ее теории имеет глубокую историю и до сих нор еще не завершено. Известно несколько попыток ее аксиоматизацип: Афанасьевой-Эренфест [Афанасьева-Эренфест, 1928], Борна [Борн, 1964], Гухмана [1986], Каратеодори [Каратеодорп, 1964], Петрова и Бранкова [Петров, 1986], Франкфурта [Франкфурт, 1964], Дьярмати [Gyarmati, 1962], Ландсберга [Landsberg, 1970], Лайеб [Lieb, 1999], Фалька и Юнга [Falk, 1959]. Однако вопрос аксиоматического обоснования системы изложения данной наукп на настоящее время остается открытым: теория не является полной, многие ее аспекты противоречивы и запутаны, ряд положений не имеет логической ясности [Базаров, 1991], [Пригожин, 2002]. Решение этой проблемы позволило бы четко сформулировать и обосновать принципы существования энергии и энтроппи в термодинамическом нредставленпи, получить новые соотношения термодинамики и дать им область практического применепя.

В работах авторов [Аверин, 2014(A), Averin, Zvyagintseva, 2016(E), Averin, Shevtsova, 2017(F)] было предложено применепе методов и средств дифференциальной геометрии при ностроенпи моделей термодинамических состояний, процессов, соотношений и закономерностей. Перспективный подход в данном направленпи лежпт в анализе решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и дифференциальных форм Пфаффа [Аверин, Звягинцева, 2016(C)], которые положены в основу теории термодинамики.

Модель идеального газа является эталонной, наглядной и простой, а главное, допускает геометрическую интерпретацию основных понятий и соотношений в трехмерном пространстве. Данное направлепе уже было затронуто в работе Млодзеевского [Млодзеевскпй, 1956]. Однако ясного представления о природе термодинамических процессов п их связи с пространственными геометрическими структурами наука на настоящпй момент не имеет. Пути построения геометрической аксиоматики термодинамики представлены в работе [Аверин, Шевцова, 2016(D)]. Методы дифференциальной геометрии позволяют структурировать и четко описать пространство состояний термодинамических систем путем построения в трехмерном пространстве интегральных поверхностей, являющихся решениями квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Современные средства компьютерной математики позволяют численнымп методами получить результаты решения данных уравнений. Такие результаты для изобарного процесса были даны в работе [Аверин, Шевцова, 2019(B)]. В настоящей статье рассмотрено аналитическое решение задачи Коши для изохорного, адиабатного и изотермического процессов. В системе компьютерной математики построены соответствующие интегральные новерхностп.

2. Описание пространства состояний идеального газа

Одной из важнейших физических величин в термодинамике является количество теплоты Q, показывающее интенсивность теплового взаимодействия в результате теплообмена. Также на эмпирическом уровне вводится понятие теплоемкости c_l как теплофизической характеристики вещества. Для газов она обычно равна

$$c_l = \left(\frac{dQ}{dT}\right) \tag{1}$$

и представляет собой количество теплоты, необходимое для измепепия эмпирической температуры T термодинамической системы на один градус в некотором процессе l.

Известно, что между величинами Q и T в любом процессе существует связь (1), при этом для идеального газа справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial Q}{\partial v} = c_p \frac{\partial T}{\partial v} , \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = c_v \frac{\partial T}{\partial p} , \tag{2}$$

где c_p и c_v – теплоемкости идеального газа при постоянных давлении и объеме.

Поскольку, исходя из уравнения Клапейрона, температура имеет вид однородной функции второй степени и имеет частные производные, то:

$$T = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial T}{\partial v} + p\frac{\partial T}{\partial p}\right). \tag{3}$$

Уравнение (3) с учетом (2) может быть представлено в виде квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка относительно величины Q:

$$\frac{v}{2c_p}\frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{p}{2c_v}\frac{\partial Q}{\partial p} = T. \tag{4}$$

Решение $Q = Q(v,p)$ уравнения (4) геометрически представляет собой поверхность в пространстве (v,p,Q), которая называется интегральной поверхностью.

Будем решать данное уравнение методом характеристик, которые определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений [Кошляков, 1970]:

$$2c_p\frac{dv}{v} = 2c_v\frac{dp}{p} = \frac{dQ}{T} = ds, \tag{5}$$

где s – некоторый вещественный параметр.

Задача Коши для уравнения (4) связана с нахождением интегральной поверхности $Q = Q(v,p)$, проходящей через некоторую кривую процесса l, которая может быть представлена в параметрической форме относительно времени t: $v_l = v_l(t)$, $p_l = p_l(t)$, $Q_l = Q_l(t)$.

Общее решение системы уравнений (5) имеет вид:

$$v = v_l \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right), \quad p = p_l \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right), \quad Q = Q_l + c_p\beta_1\frac{p_l v_l}{R}\left(\exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right) - 1\right), \tag{6}$$

где $\beta_1 = \dfrac{2c_v}{c_v + c_p}$, R – универсальная газовая постоянная. Чтобы получить интегральную поверхность в пространстве (v,p,Q), задают кривую процесса в параметрическом виде и исключают величины s и t.

3. Изохорный процесс

Если процесс является изохорным, то линия процесса l, через которую должна проходить интегральная поверхность, может быть задана параметрическими уравнениями относительно времени t [Кириллин, Сычев, 1983]:

$$v_l = v_1 = const, \quad p_l = p_1 + \alpha_p t, \quad Q = c_vT = \frac{c_v(p_1 + \alpha_p t)v_1}{R}, \tag{7}$$

где v_1, p_1 – термодинамические параметры газа в начальной точке $t = 0$.

Из первого соотношения для удельного объема v:

$$e^s = \left(\frac{v}{v_1}\right)^{2c_p}.$$

Подставим (7) в (6), учитывая последнее выражение, имеем:

$$v = v_1 \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right), \quad p = (p_1 + \alpha_p t)\exp\left(\frac{s}{2c_v}\right), \tag{8}$$

$$Q = c_v \frac{(p_1+\alpha_p t)v_1}{R} + \frac{c_p\beta_1(p_1+\alpha_p t)v_1}{R}\left(\left(\frac{v}{v_1}\right)^{2/\beta_1} - 1\right).$$

Поскольку

$$1 - \frac{c_p}{c_v}\beta_1 = \frac{c_v - c_p}{c_p + c_v} = -\beta_2, \quad \beta_2 = \frac{c_p - c_v}{c_p + c_v},$$

получим:

$$Q = c_v \frac{(p_1+\alpha_p t)v_1}{R}\left(-\beta_2 + \frac{c_p}{c_v}\beta_1\left(\frac{v}{v_1}\right)^{2/\beta_1}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{2}{\beta_1} = \frac{c_p + c_v}{c_v} = k+1, \quad p_1 + \alpha_p t = \frac{p}{\left(\frac{v}{v_1}\right)^{(c_p/c_v)}}.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$Q = \frac{c_v p v}{R}\left(-\left(\frac{v}{v_1}\right)^{-k+1}\beta_2 + k\beta_1\right). \tag{9}$$

Рассмотрим геометрическое решение данной задачи, применяя средства компьютерной математики. Пусть состояние идеального газа в начальный момент времени имеет параметры – давление $p_1 = 101325$ Па и объем $v_1 = 11,1272$ м^3/кг. Положим, что при изохорном термодинамическом процессе в течение 100 секунд давление увеличилось до 299607,7043 Па, а температура изменилась от $T_1 = 273,15$ К до $T_2 = 373,15$ К. Зададим линию, через которую проходит интегральная поверхность:

$$p = p_1 + \alpha_p t, \quad v_1 = 11,1272, \quad Q = c_v \frac{(p_1+\alpha_p t)v_1}{R}.$$

Учитывая, что процесс длится 100 секунд, можно рассчитать значение α_p, подставляя которое в формулу для Q, получим окончательное задание интегральной кривой. Геометрическое представление решения (9) показано на рисунке 1.

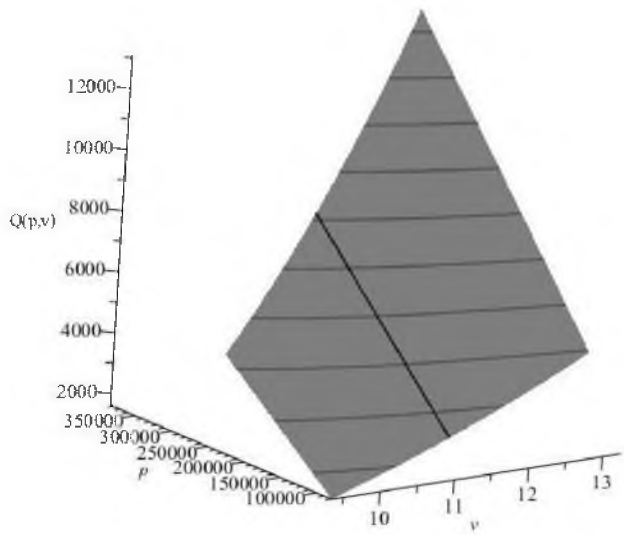

Рис. 1. Изохорный процесс
Fig. 1. Isochoric process

4. Адиабатный процесс

В случае адиабатного процесса мы имеем постоянное значение величины Q. Линия процесса l, через которую должна проходить интегральная поверхность, может быть представлена следующим образом:

$$v_l = v_1 + \alpha_v t, \quad p_l = p_1 + \alpha_p t, \quad Q = Q_1 = const. \tag{10}$$

Тогда общее решение системы (5):

$$v = (v_1 + \alpha_v t) \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right), \quad p = p_1 \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right), \tag{11}$$

$$Q = Q_1 + c_p\beta_1 \frac{(p_1 + \alpha_p t)(v_l + \alpha_v t)}{R} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right) - 1\right).$$

Подставляя p и v в выражение для Q, получим:

$$Q = Q_1 + \frac{c_p\beta_1 pv}{R \exp\left(\frac{s}{2}\frac{c_p+c_v}{c_pc_v}\right)} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right) - 1\right) = \tag{12}$$

$$= Q_1 + \frac{c_p\beta_1 pv}{R} - \frac{c_p\beta_1 pv}{R \exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right)}.$$

Поскольку из (11)

$$e^s = \left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t}\right)^{2c_p},$$

в выражении для p получим:

$$p = (p_1 + \alpha_p t)\left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t}\right)^k = \frac{(p_1 + \alpha_p t)v^k}{(v_1 + \alpha_v t)^k}.$$

Таким образом:

$$p_1 + \alpha_p t = \frac{p(v_1 + \alpha_v t)}{v^k}. \tag{13}$$

Рассмотрим третье слагаемое в (12).

$$\frac{c_p \beta_1 p v}{R \exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right)} = \frac{c_p \beta_1 p v}{R\left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t}\right)^{1+k}} = \frac{c_p \beta_1 p v^{-k} (v_1 + \alpha_v t)^{1+k}}{R}. \tag{14}$$

Будем использовать соотношение для адиабатного процесса [Кириллин, Сычев, 1983]:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k. \tag{15}$$

Подставляя выражения p и v в (15), получим:

$$(v_1 + \alpha_v t)^k = \frac{p_1 v_1^k}{p_1 + \alpha_p t}\ . \tag{16}$$

Используя (13), имеем:

$$v_1 + \alpha_v t = \frac{p_1^{1/(2k)} v_1^{1/2} v^{1/2}}{p^{1/(2k)}}\ . \tag{17}$$

Подставляя (17) в (14), а затем в (12), окончательно получаем:

$$Q = Q_1 + \frac{c_p \beta_1 p v}{R}\left(1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k+1}{2k}} \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\frac{k+1}{2}}\right). \tag{18}$$

Рассмотрим геометрическое решение данной задачи. Пусть состояние идеального газа в начальный момент времени имеет прежние параметры – давление $p_1 = 101325$ Па и объем $v_1 = 11,1272$ м^3/кг. Положим, что при адиабатном термодинамическом процессе в течении 100 секунд давление увеличилось до 296239,7579 Па, а температура изменилась от $T_1 = 273,15$ К до $T_2 = 373,15$ К. Зададим линию, через которую проходит интегральная поверхность:

$$p = p_1 + \alpha_p t, \quad v = v_1 + \alpha_v t, \quad Q_1 = 0.$$

Рассчитывая значения α_p и α_v, получаем окончательное задание интегральной кривой. Геометрическое представление решения (18) представлено на рисунке 2.

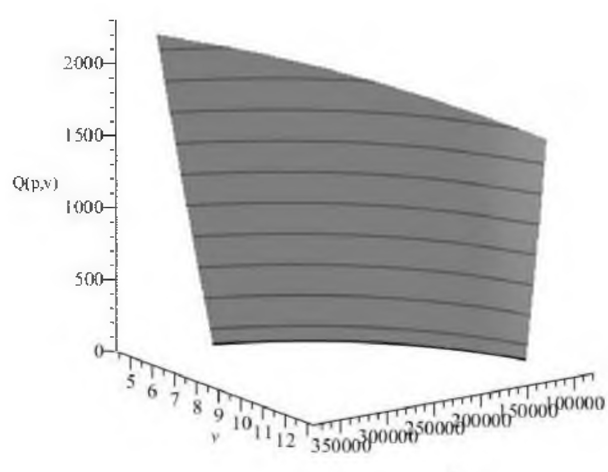

Рис. 2. Адиабатный процесс
Fig. 2. Adiabatic process

5. Изотермический процесс

Будем использовать соотношение давления p и объема v для изотермического процесса [Кириллин, Сычев, 1983]:

$$p_1v_1 = p_2v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2}\ . \tag{19}$$

Известно [Кириллин, Сычев, 1983], что изменение Q в этом случае подчиняется закону:

$$Q = RT\ln\frac{v_2}{v_1}.$$

Так как T постоянна, то, применяя (19), имеем:

$$p_1v_1\ln\frac{p_1}{p_2} = p_2v_2\ln\frac{p_1}{p_2}\ . \tag{20}$$

Зададим линию процесса l для получения интегральной поверхности:

$$p_l = p_1 + \alpha_p t, v_l = v_1 + \alpha_v t, Q_l = p_l v_l \ln\frac{v_2}{v_1}\ .$$

Подставим последние равенства в общее решение (6) системы (5). Получим:

$$p = (p_1 + \alpha_p t)\exp\left(\frac{s}{2c_v}\right), v = (v_1 + \alpha_v t)\exp\left(\frac{s}{2c_p}\right), \tag{21}$$

$$Q = Q_l + \frac{c_p\beta_1 p_l v_l}{R}\left(\exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right) - 1\right) = p_l v_l \ln\frac{v_l}{v_1} + \frac{c_p\beta_1 p_l v_l}{R}\left(\exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right) - 1\right).$$

Поскольку из (21)

$$e^s = \left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t}\right)^{2c_p},$$

то

$$p = (p_1 + \alpha_p t)\left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t}\right)^{c_p/c_v} = \frac{(p_1 + \alpha_p t)v^k}{(v_1 + \alpha_v t)^k}.$$

Отсюда имеем:

$$p_1 + \alpha_p t = \frac{p(v_1 + \alpha_v t)^k}{v^k}. \tag{22}$$

Рассмотрим выражение для Q из (21):

$$Q = p_l v_l\left(\ln\frac{v_l}{v_1} + \frac{c_p\beta_1}{R}\left(\exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right) - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{pv}{\exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right)}\left(\ln\frac{v_1 + \alpha_v t}{v_1} + \frac{c_p\beta_1}{R}\left(\exp\left(\frac{s}{c_p\beta_1}\right) - 1\right)\right).$$

Внесем экспоненту в скобки:

$$Q = pv\left(\left(\frac{v_1 + \alpha_v t}{v}\right)^{1+k}\ln\frac{v_1 + \alpha_v t}{v} + \frac{c_p\beta_1}{R} - \frac{c_p\beta_1}{R}\left(\frac{v_1 + \alpha_v t}{v}\right)^{1+k}\right).$$

Подставляя (22) в (19), имеем:

$$p_1 + \alpha_p t = \frac{p_1v_1}{v_1 + \alpha_v t} = \frac{p(v_1 + \alpha_v t)^k}{v^k} \Rightarrow (v_1 + \alpha_v t)^{k+1} = \frac{p_1v_1v^k}{p}. \tag{23}$$

Будем использовать (23) в выводе выражения для Q:

$$Q = pv\left(\frac{p_1 v_1 v^k}{pv^{1+k}}\ln\left(\frac{\left(p_1 v_1 v^k\right)^{1/(k+1)}}{p^{1/(k+1)} v_1}\right) + \frac{c_p\beta_1}{R} - \frac{c_p\beta_1}{R}\frac{p_1 v_1 v^k}{pv^{1+k}}\right).$$

Внесем множитель pv в скобки:

$$Q = \frac{p_1 v_1}{k+1}\ln\left(\frac{p_1}{p}\left(\frac{v}{v_1}\right)^k\right) + \frac{c_p\beta_1}{R}pv - \frac{c_p\beta_1}{R}p_1 v_1.$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для Q:

$$Q = \frac{c_p\beta_1}{R}pv + p_1 v_1\left(\frac{1}{k+1}\ln\left(\frac{p_1}{p}\left(\frac{v}{v_1}\right)^k\right) - \frac{c_p\beta_1}{R}\right). \tag{24}$$

Геометрическое решение данной задачи включает задание интегральной кривой, исходя из соотношения для изотермического процесса (22). Состояние идеального газа в начальный момент времени имеет прежние параметры – давление $p_1 = 101325$ Па и объем $v_1 = 11,1272$ м^3/кг. При изотермическом процессе в течении 100 секунд давление увеличилось до 299607,7043 Па, объем стал $v_2 = 3,7631$, а температура осталась прежней – 273,15 К. Линия, через которую проходит интегральная поверхность:

$$p = p_1 + \alpha_p t, v = v_1 + \alpha_v t, Q = (p_1 + \alpha_p t)(v_1 + \alpha_v t)\ln\frac{v_1 + \alpha_v t}{v_1}.$$

Геометрическое представление решения (24) показано на рисунке 3.

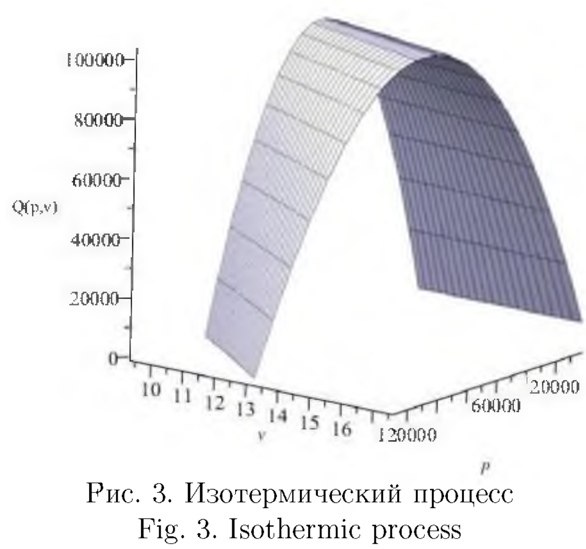

Рис. 3. Изотермический процесс
Fig. 3. Isothermic process

6. Заключение

Таким образом, получена геометрическая интерпретация решения уравнения (4) в виде интегральной новерхности в пространстве состояний идеального газа (v, p, Q). Решение задачи Коши для данного уравнения произведено путем задания интегральной кривой, которая рассматривается как кривая процесса и задается функцией времени. Это дает возможность ввести в соотношения термодинамики время как параметрическую переменную, и тем самым предложить решение одного из проблемных вопросов классической термодинамики, связанного с отсутствием времени в термодинамических уравнениях. При таком подходе устанавливается взаимосвязь между физическими понятиями и их математическими аналогами. При этом геометрическое представление имеет преимущество ясности и наглядности.

Поставленная задача решена для заданных изохорного, адиабатного и изотермического процессов, которые в каждом случае описываются зависимостями от времени с учетом сохранения постоянного значения по конкретному физическому параметру.

С помощью системы компьютерной математики представлено геометрическое решение задачи в виде интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую процесса.

Список литературы

1. Аверин Г.В. 2014(A). Системодинамика. Донецк: Донбасс, 405 с.
2. Аверин Г.В, Шевцова М.В. 2019(B). Дифференциальные уравнения для описания пространства идеального газа. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. Т. 51, №2: 270–279.
3. Афанасьева-Эренфест Т.А. 1928. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики. Журн. прикл. Физики. Т. 5, вып. 3–4: 3–28.
4. Базаров И.П. 1991. Термодинамика. Изд. 4-е. М.: Высшая школа, 376 с.
5. Борн М. 1964. Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М.: Наука: 223–256.
6. Гухман А.А. 1986. Об основаниях термодинамики. М., Энергоатомиздат, 383 с.
7. Звягинцева А.В., Аверин Г.В. 2016(C). Интегрирование отдельных многомерных уравнений Пфаффа имеющих важное прикладное значение. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. №27 (248). Выпуск 45: 102–114.
8. Каратеодори К. 1964. Об основаниях термодинамики. В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М.: Наука: 188–222.
9. Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. 1983. Техническая термодинамика. М., Энергоатомиздат, 409 с.
10. Кошляков Н.С. 1970. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Вища школа, 712 с.
11. Млодзеевский А.Б. 1956. Геометрическая термодинамика. М.: Издательство МГУ, 94 с.
12. Петров И., Бранков Й. 1986. Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 285 с.
13. Пригожин П., Кондепуди Д. 2002. Современная термодинамика. Пер. с англ. М.: Мир, 461 с.
14. Франкфурт У. 1964. К истории аксиоматики термодинамики. В кн.: Развитие совр. физики: Пер. с нем. М.: Наука: 257–292.
15. Шевцова М.В., Аверин Г.В., Звягинцева А.В. 2016(D). К вопросу обоснования положений термодинамики методами дифференциальной геометрии многомерных пространств. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. №27 (248). Выпуск 45: 36–44.

16. Averin G.V., Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2016(E). Probabilistic methods of a complex assessment of quantitative information. Research Journal of Applied Sciences 11 (7): 415–418.

17. Averin G.V.,Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2017(F) Justification of Provisions of Thermodynamics by Methods of Differential Geometry of Multidimensional Spaces. Journal of Engineering and Applied Sciences. 12, 7830–7835.

18. Gyarmati I. 1962. On the Fundamentals of Thermodynamics. –Acta Chim. Hung. 30: 147–206.

19. Landsberg P.T. 1970. Main Ideas in the Axiomatics of Thermodynamics. Pure and Appl. Chem. 22: 215–227.

20. Lieb E. H., Yngvason J. 1999. The physics and mathematics of the second law of thermodynamics. Physics Reports. Vol. 310. № 1. Elsevier: 1–96.

21. Falk G. and Jung H. 1959. Axiomatik der Thermodynamik. Hdb. Phys. IH/2. Berlin: 119–175.

References

1. Averin G.V. 2014(A). Sistemodinamika [Systemdynamics]. Doneck: Donbass, 405 p.

2. Averin G.V., Shevtsova M. V. 2019. Differencialnye uravnenija dlja opisanija prostranstva idealnogo gaza [The differential equations for description the space of condition of ideal gas] Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika. T. 51, №2: 270–279.

3. Afanas'eva-Jerenfest T.A. 1928. Neobratimost', odnostoronnost' i vtoroe nachalo termodinamiki [Irreversibility, unilaterality and second law of thermodynamics]. Zhurn. prikl. Fiziki. T. 5, Issue 3–4: 3–28.

4. Bazarov I.P. 1991. Termodinamika [Thermodynamics]. Izd. 4-e. M.: Vysshaya shkola, 376 p.

5. Born M. 1964. Kriticheskie zamechanija po povodu tradicionnogo izlozhenija termodinamiki. V kn.: Razvitie sovremennoj fiziki [Critical remarks concerning a traditional statement of thermodynamics. In book: Development of modern physics]: Per. s nem. M.: Nauka: 223–256.

6. Guhman A.A. 1986. Ob osnovanijah termodinamiki [About the thermodynamics bases]. M., Jenergoatomizdat, 383 p.

7. Zvyagintseva A.V., Averin G.V. 2016(C). Integrirovanie otdelnyih mnogomernyih uravneniy Pfaffa imeyuschih vajnoe prikladnoe znachenie [Integration of some multidimentional Pfaff equations of important applications] Nauchnyie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika. №27 (248). Vyipusk 45: 102–114.

8. Karateodori K. 1964. Ob osnovah termodinamiki. V kn.: Razvitie sovremennoj fiziki [About fundamentals of thermodynamics. In book: Development of modern physics] Per. s nem. M.: Nauka: 188–222.

9. Kirillin V.A., Sychev V.V., Sheyndlin A.Ye. 1983. Tekhnicheskaya termodinamika [Technical Thermodynamics]. M., Jenergoatomizdat, 409 p.

10. Koshlyakov I.S. 1970. Uravneniya v chastnyih proizvodnyih matematicheskoy fiziki [Partial Differential Equations of Mathematical Physics] M.: Vischa shkola, 712 p.

11. Mlodzeevskij A.B. 1956. Geometricheskaja termodinamika [Geometrical thermodynamics] M.: Izdatelstvo MGU, 94 p.

12. Petrov N., Brankov J. 1986. Sovremennye problemy termodinamiki [Modern problems of thermodynamics] M.: Mir, 285 p.

13. Prigozhin I., Kondepudi D. 2002. Sovremennaya termodinamika [Modern thermodynamics]. Per. s angl. M.: Mir, 461 p.

14. Frankfurt U. 1964. K istorii aksiomatiki termodinamiki [In history of axiomatics of thermodynamics. In book: Development of modern physics] V kn.: Razvitie sovr. fiziki: Per. s nem. M.: Nauka: 257–292.

15. Shevtsova M.V., Averin G.V., Zvyagintseva. 2016(D). K voprosu obosnovaniya polojeniy termodinamiki metodami differentsialnoy geometrii mnogomernyih prostranstv [About justification of provisions of thermodynamics by methods of differential geometry of multidimentional spaces] Nauchnyie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matema-tika. Fizika. №27 (248). Vyipusk 45: 36–44.

16. Averin G.V., Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2016(E). Probabilistic methods of a complex assessment of quantitative information. Research Journal of Applied Sciences 11 (7): 415–418.

17. Averin G.V.,Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2017(F) Justification of Provisions of Thermodynamics by Methods of Differential Geometry of Multidimensional Spaces. Journal of Engineering and Applied Sciences. 12, 7830–7835.

18. Gyarmati I. 1962. On the Fundamentals of Thermodynamics. –Acta Chim. Hung. 30: 147–206.

19. Landsberg P.T. 1970. Main Ideas in the Axiomatics of Thermodynamics. Pure and Appl. Chem. 22: 215–227.

20. Lieb E. H., Yngvason J. 1999. The physics and mathematics of the second law of thermodynamics. Physics Reports. Vol. 310. № 1. Elsevier: 1–96.

21. Falk G. and Jung H. 1959. Axiomatik der Thermodynamik. Hdb. Phys. HI/2. Berlin: 119–175.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Аверин Г.В., Шевцова М.В. 2019. Решение дифференциального уравнения состояния идеального газа в изонроцессах. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 522–532. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-522-532.

Averin G.V., Shevtsova M.V. 2019. Solving the differential equation of ideal gas condition at isoprocesses. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 522–532 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-522-532.