УДК 517.906
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-496-505

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

ABOUT ONE INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR EQUATION OF BENDING BEAM VIBRATIONS

Э.Г. Оруджев, Р.Т. Зульфугарова
E.G. Orudzhev, R.T. Zulfugarova

Бакинский Государственный Университет
ул. Академика Захида Халилова, 23, Баку, AZ1148, Азербайджан

[1),2)]Baku State University,
23 Academic Zahid Khalilov St., Baku, AZ1148, Republic of Azerbaijan

E-mail: elsharorucov63@mail.ru, renazulfugarova94@gmail.com

Аннотация
В данной работе для неоднородного уравнения изгибных колебаний балки исследуется смешанная задача, содержащая в нераснадающихся граничных условиях производные но времени более высокого порядка, чем в уравнении. Дифференциальное выражение и краевые формы содержат не только главные части, но и производных низкого порядка. Смешанной задаче сопоставлены спектральная для уравнения 4-го порядка с несоизмеримыми стененями параметра в граничных условиях и задача Коши для уравнения 2-го порядка со спектральным параметром относительно переменной времени. Решение начально-краевой задачи построено в виде полного интегрального вычета от решений одномерной спектральной задачи и задачи Коши. Нри определенных условиях гладкости начальных данных, обращающихся в нуль вместе со всеми производными до некоторого порядка на концах интервала изменения пространственной переменной, доказано существование классического решения изучаемой начально-краевой задачи.

Abstract
This research is devoted for the inhomogeneous equation of bending vibrations of a beam , investigated mixed problem which non-decaying boundary conditions, higher-order time derivatives than in the equation. Differential expression and edge forms isn't contain only the main parts. The mixed problem is associated with the spectral for the fourth order equation with incommensurable degrees of the parameter in the boundary conditions and the Cauchy problem for the second order equation with the spectral parameter with respect to the time variable. The solution of the initial-boundary-value problem is constructed the form of complete integral residue from the solutions of the one-dimensional spectral problem and Cauchy problem. The existence of a classical solution to the studied initial-boundary-value problem is proved which under certain smoothness conditions for the initial data, vanishes together with all derivatives to a certain order at the ends of the variation interval of the spatial variable.

Ключевые слова: уравнение балки, начально-граничная задача, спектральный параметр, спектральная задача, полный интегральный вычет, функция Грина.
Keywords: beam equation, initial-boundary value problem, spectral parameter, spectral problem, full integral residue, Green's function.

1. Введение и постановка задачи

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных более высокого порядка, чем уравнение струны. В инженерной практике часто встречаются балки, лежащие на сплошном упругом основании. Упругое основание рассматривается как система опирающихся на жесткое горизонтальное основание и не связанных между собой пружин, сжатие которых возрастает прямо пропорционально приложенной нагрузке. Коэффициент пронорциональности между нагрузкой и деформацией называется коэффициентом постели.

Рассмотрим однородную балку Эйлера-Бернулли со свободными концами, лежащую на упругом основании. Уравнение свободных изгибных колебаний [Аитбаева, 2014] запишется в виде

$$EJ\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}+ku(x,t)+\rho F\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0\,, \tag{1}$$

где $u=u(x,t)$ прогиб оси балки – просадка основания (балки); EJ – изгибная жесткость; ρ – плотность балки; F – площадь поперечного сечения; L – длина балки, $0\le x\le L$. Величина $k=k_0b>0$ называется погонным коэффициентом постели, где b – ширина балки, а k_0 коэффициент постели. Для широкого класса задач о колебаниях балки краевые условия зависят от времени. Преобразование Лапласа может быть использовано для решения задачи о колебаниях балки Бернулли-Эйлера с краевыми условиями, зависящими от времени. Однако в более сложных случаях не удается выполнить обратное преобразование.

Предположим, что на балку действует сила $f(x,t)$, длина балки равна 1, $EJ\equiv\rho F\equiv 1$. Тогда уравнению (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}+ku(x,t)=f(x,t)\,. \tag{2}$$

Для определения колебания точек балки нужно задать граничные условия концах $x=0$ и $x=1$. Зададим краевые условия следующим образом:

$$u(0,t)=0,\;\; u_x''(0,t)-\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}\right|_{x=0}=0, \tag{3}$$

$u_x'''(1,t)=0,\;\; u_x'''(0,t)+\left.\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x\partial t^3}\right|_{x=1}=0,\quad 0<t<T,\qquad T$ – заданное положительное число.

При $t=0$ должны выполняться начальные условия:

$$u(x,0)=\varphi_0(x)\,,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x)\,,\quad 0\le x\le 1\,, \tag{4}$$

где $f(x,t)$ неоднородная часть уравнения (2), определяющая внешнее воздействие на балки, достаточно гладкая функция но обеим переменным; $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – функции, определяющие начальное положение оси балки.

В этой работе для неоднородного уравнения изгибных колебаний балки (2) изучим решение задачи с условиями (3) и (4) в прямоугольной области $D=\{(x,t)|\,0<x<1,\; 0<t<T\}$. Отметим, что в работе [Сабитов, 2015] изучены изгибные колебания балки для однородного уравнения (2) в случае двучленной левой части ($k=0$) с краевыми условиями $u(0,t)=u_x'(0,t)=u(1,t)=u_x'(1,t)=0,\;\; 0\le t\le T$ с начальными условиями (4). Там же методами спектрального анализа доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения из класса $u(x,t)\in C^{4,2}_{x,t}(D)\bigcap C^{2,1}_{x,t}(\bar{D})$. Эти же краевые условия были

рассмотрены в работе [Оруджев, Амирова, 2019] для уравнения 4-го порядка с двукратными характеристиками, где найдены формулы четырехкратного разложения но собственными и присоединенными функциями. А это соответствует случаю, когда условие (2) содержит слагаемую $P(\partial^2 u(x,t)/\partial x^2)$, где P отвечает действию продольной сжимающей нагрузки на балку. Поскольку краевые условия (3) содержат производные по времени, причем более высокого порядка, чем в уравненпи, метод разделения нереме нных и метод преобразования Лапласа для решения задачи (2)–(4) не применимы. Подобная смешанная задача решена в работе [Оруджев, Намазова, 2019], когда краевые условия содержат производные по времени 2-го порядка. А в работе [Зульфугарова, 2015] решена смешанная задача для волнового уравнения с производными 3-го порядка по времени в одном пз граничных условий. Здесь ввиду того, что в одном из граничных условий (3) содержится производное но t 3-го порядка нужно исследовать специально.

Заметим, что результаты работы [Orudzhev, 1998] можно применить для спектрального анализа колебаний бесконечной балки, когда в уравненпп коэффициент постели является периодической функцией от x и на балку действует равномерно распределенная гармоническая сила, что может приводить к появлению непрерывного спектра и спектральных особенностей. Соответствующпе результаты будут изложены в другой работе авторов.

2. Решение смешанной задачи (2)–(4)

Согласно работе [Расулов, 1986], смешанной задаче (2)–(4) сопоставляется две вспомогательные задачи:

1) Спектральная задача нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(4)} - \lambda^4 y = h(x), \qquad x \in (0,1) \tag{5}$$

при граничных условиях

$$L_1(y) = y(0) = 0, \quad L_2(y) = y''(0) - \lambda^2 y'(0) = -\varphi_0', (0)$$

$$L_3(y) = y'''(0) - \lambda^2 y^{(5)}(1) = -\varphi_0^{(5)}(1) + \left(\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}\right)_{x=1} + \lambda^2 \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-\lambda^{2t}} f(x,t)\,dt\Big|_{x=1}, \tag{6}$$

$$L_4(y) = y'''(1) = 0,$$

где $h(x)$ – произвольная функция, обладающая непрерывной производной но замкнутой интервале $[0,1]$;

2) Задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} + \left(\lambda^4 + k\right) z(x,t) = f(x,t), \ t \in (0,T) \tag{7}$$

при начальных условиях

$$\left.\frac{\partial^k z(x,t)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \ \ k = 0,1. \tag{8}$$

Единственное решение задачи (5)–(6)можно представить в виде

$$y(x,\lambda,h) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\,h(\xi)\,d\xi + N(x,\lambda,\varphi_0,\varphi_1,f). \tag{9}$$

Здесь $G(x,\xi,\lambda) = \Delta(\lambda,\xi,\lambda)/\Delta(\lambda)$ является функцией Грина задачи (5)–(6),

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) & y_4(x,\lambda) \\ L_1(g)_x & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_2(g)_x & \vdots & & \Delta(\lambda) & \\ L_3(g)_x & \vdots & & & \\ L_4(g)_x & \vdots & & & \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$y_k(x,\lambda) = e^{\varepsilon_k \lambda x}$, $k = \overline{1,4}$ являются фундаментальными системами решений однородного уравнения (5) и ε_k корни из 4-й степени 1,т. е. $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = i$, $\varepsilon_3 = -i, \varepsilon_4 = 1$,

$$g(x,\xi,\lambda) = \pm\frac{\sum_{k=1}^{4} W_{4k}(\xi,\lambda)\, y_k(x,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)}, \quad \begin{matrix} + \text{ если } 0 \le \xi \le x \\ - \text{ если } 0 \le x \le \xi \end{matrix}, \tag{12}$$

$W(\xi,\lambda)$ – определитель Вронского от $y_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,4}$; $W_{4k}(\xi,\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента $(4,k)$ в определителе $W(\xi,\lambda)$;

$$\Delta_1(x,\lambda,\varphi_0,\varphi_1,f) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\lambda x} & e^{i\lambda x} & e^{-i\lambda x} & e^{\lambda x} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_1 & \vdots & & \Delta(\lambda) & \\ F_2 & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & & \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$F_1 = -\varphi_0'(0), \;\; F_1 = -\varphi_0^{(5)}(1) + \left(\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}\right)_{x=1} + \lambda^2 \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} f(x,t)\,dt\Big|_{x=1}.$$

Выражение (10) называется характеристическим определителем спектральной задачи (5)–(6). Его нули совпадают с собственными значениями этой задачи. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) = \lambda^8 \big[&(-4i+4\lambda)e^{-i\lambda} + (-4\lambda-4i)e^{i\lambda} + (-4i\lambda+4i)e^{-\lambda} + (4i\lambda+4i)e^{\lambda} + \\ &+ \left(-2\lambda^5 - 2i\lambda^5 + 4i\lambda^4\right)e^{-\lambda(1+i)} + \left(2\lambda^5 - 2i\lambda^5 + 4i\lambda^5\right)e^{-\lambda(1-i)} + \\ &+ \left(2i\lambda^5 + 2\lambda^5 + 4i\lambda^4\right)e^{\lambda(1+i)} + \left(2i\lambda^5 - 2\lambda^5 + 4i\lambda^4\right)e^{\lambda(1-i)}\big];\end{aligned}$$

$$g(x,\xi,\lambda) = \pm\frac{1}{2\lambda^3}\left[\frac{1}{4}e^{\lambda(x-\xi)} - \frac{1}{4}e^{-\lambda(x-\xi)} - \frac{1}{4i}e^{i\lambda(x-\xi)} + \frac{1}{4i}e^{-i\lambda(x-\xi)}\right], \quad \begin{matrix} + \text{ если } \xi \le x \\ - \text{ если } \xi \ge x \end{matrix}$$

$$W(\xi,\lambda) = 16i\lambda^6;$$

$$L_1(g)_x = -\frac{1}{8\lambda^3}\left[e^{-\lambda\xi} - e^{\lambda\xi} - \frac{1}{i}e^{-i\lambda\xi} + \frac{1}{i}e^{i\lambda\xi}\right], \tag{14}$$

$$L_2(g)_x = -\frac{1}{8\lambda}\left[e^{-\lambda\xi} - e^{\xi\lambda} + \frac{1}{i}e^{-i\lambda\xi} - \frac{1}{i}e^{i\lambda\xi}\right] + \frac{1}{8}\left[e^{-\lambda\xi} + e^{\lambda\xi} - e^{-i\lambda\xi} - e^{i\lambda\xi}\right],$$

$$L_3(g)_x = -\frac{1}{8}\left[e^{-\lambda\xi} + e^{\lambda\xi} + e^{-i\lambda\xi} + e^{i\lambda\xi}\right] - \frac{\lambda^4}{8}\left[e^{\lambda(1-\xi)} + e^{-\lambda(1-\xi)} - e^{i\lambda(1-\xi)} - e^{-i\lambda(1-\xi)}\right],$$

$$L_4(g)_x = \frac{1}{8}\left[e^{\lambda(1-\xi)} + e^{-\lambda(1-\xi)} + e^{i\lambda(1-\xi)} + e^{-i\lambda(1-\xi)}\right].$$

Осями λ -плоскости и биссектрисами координатных углов вся плоскость комплексного параметра λ разбивается на 8 секторов $R_j,\ \ j=\overline{1,8}$.

Следуя работе [Лидский, Садовничий, 1968], нетрудно получить асимптотические представления для собственных значений спектральной задачи (5)–(6). Например, если взять сектор, где при нумерации $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = i, \varepsilon_3 = -i, \varepsilon_4 = 1$ выполняется неравенство $\mathrm{Re}\lambda\varepsilon_1 \le \mathrm{Re}\lambda\varepsilon_2 \le 0 \le \mathrm{Re}\lambda\varepsilon_3 \le \mathrm{Re}\lambda\varepsilon_4$, можно получить следующее представление:

$$\lambda^{-11}e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\lambda}\Delta(\lambda) = \left[\left(2i+2+\frac{4i}{\lambda}\right)e^{\varepsilon_2\lambda} + \left(2i-2+\frac{4i}{4}\right)e^{\varepsilon_3\lambda}+1\right]e^{-\varepsilon_3\lambda} + \frac{E(\lambda)}{\lambda}e^{\varepsilon_2\lambda}, \quad (15)$$

$|\lambda| \to \infty$ (здесь $E(\lambda)$ является ограниченной функцией при $|\lambda| \to \infty$). Откуда находим, что главные члены собственных значений в этом секторе являются

$$\lambda_v^{1,2} = \left[\ln|z_{1,2}| + i\left(\arg z_{1,2} + 2v\pi\right)\right]\varepsilon_2^{-1},\ \ v = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad (16)$$

где $z_1 = \frac{\sqrt{31}-1}{16} + i\frac{(1+\sqrt{31})}{16};\ \ z_2 = \frac{-\sqrt{31}-1}{16} + i\frac{(1-\sqrt{31})}{16}$.

С применением теоремы Руше [Лаврентьев, Шабат, 1973] получаем, что собственные значения в этом секторе имеют оценку $\lambda_v^{1,2} + O\left(v^{-1}\right)$.

В общем случае, записывая $\Delta(\lambda)$ в виде $\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^{4} P_k(\lambda)e^{\alpha_k\lambda}$, можно показать, что корни $\Delta(\lambda)$ расположены вдоль логарифмических цепей, идущих по длине нормалей к сторонам многоугольника, построенного из выпуклой оболочки точек $\overline{\alpha}_1, \cdots, \overline{\alpha}_9$ и для них при $n \to \infty$ справедливы асимптотические представления

$$\lambda_n \approx \frac{2\pi\, in}{\alpha_{s+1}-\alpha_s}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_k(\ln n)}{n^k}\right\},\quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\ \ R_k(\ln n) = \sum\limits_{l=0}^{k} r_l^k \ln^l n,\ \ r_l^l,\ \ 0 \le l \le k$ некоторые числа.

Для получения асимптотики $G(x,\xi,\lambda)$ в секторе, где выполняется вышенаписанное неравенство, умножим 2-й, 3-й, 4-й, 5-й столбцы $\Delta(x,\xi,\lambda)$ на $W_{4k}/2W$, предварительно неренумеруя столбцы соответственно по расположению $\varepsilon_k,\ \ k=\overline{1,4}$ в неравенстве от левой стороны и сложим с соответствующими элементами 1-го столбца. Полученные таким образом элементы первого столбца обозначим через $g_0(x,\xi,\lambda),\ g_1(\xi,\lambda),\ g_2(\xi,\lambda),\ g_3(\xi,\lambda),\ g_4(\xi,\lambda)$:

$$g_0(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\lambda^3}\left(e^{\lambda(x-\xi)} - ie^{i\lambda(x-\xi)}\right), & 0 \le x \le \xi \le 1; \\ -\dfrac{1}{4\lambda^3}\left(e^{-\lambda(x-\xi)} - ie^{i\lambda(x-\xi)}\right), & 0 \le \xi \le x \le 1; \end{cases}$$

$$g_1(\xi,\lambda) = -\frac{1}{4\lambda^3}\left(e^{-\lambda\xi} - ie^{i\lambda\xi}\right),$$

$$g_2(\xi,\lambda) = -\frac{1}{4\lambda}\left(e^{-\lambda\xi} + ie^{i\lambda\xi} - \lambda e^{-\lambda\xi} + \lambda e^{i\lambda\xi}\right),$$

$$g_3(\xi,\lambda) = -\frac{1}{4}\left(e^{-\lambda\xi} + e^{i\lambda\xi} - \lambda^4 e^{i\lambda(1-\xi)} + \lambda^4 e^{-\lambda(1-\xi)}\right),$$

$$g_4(\xi,\lambda) = \frac{1}{4}\left(e^{-\lambda(1-\xi)} + \frac{1}{4}e^{i\lambda(1-\xi)}\right).$$

Полученные элементы $g_0(x,\xi,\lambda)$, $g_1(\xi,\lambda)$, $g_2(\xi,\lambda)$, $g_3(\xi,\lambda)$, $g_4(\xi,\lambda)$ напишем на 1-м столбце $\Delta(x,\xi,\lambda)$ и раскроем этот детерминант по элементам первой строки и обозначим полученный детерминант через $\Delta_0(x,\xi,\lambda)$. В результате имеем следующее разложение:

$$\frac{\Delta_0(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = g_0(x,\xi,\lambda) +$$

$$+\frac{1}{4}e^{-\lambda x}\Big(\lambda^{-3}\left[e^{-\lambda\xi}+ie^{i\lambda\xi}\right]\frac{\Delta_{11}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \lambda^{-1}\left[e^{-\lambda\xi}-ie^{i\lambda\xi}+\lambda e^{-\lambda\xi}-\lambda e^{i\lambda\xi}\right]\frac{\Delta_{21}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}+$$

$$+\lambda^{-1}\left[e^{-\lambda\xi}-\lambda e^{i\lambda\xi}+\lambda^5e^{i\lambda(1-\xi)}-\lambda^5e^{-\lambda(1-\xi)}\right]\frac{\Delta_{31}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}+\left[e^{-\lambda(1-\xi)}-e^{i\lambda(1-\xi)}\right]\frac{\Delta_{41}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Big)-$$

$$-\frac{1}{4}e^{i\lambda x}\Big(-\lambda^{-3}\left[e^{-\lambda\xi}+ie^{i\lambda\xi}\right]\frac{\Delta_{12}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \lambda^{-1}\left[e^{-\lambda\xi}-ie^{i\lambda\xi}+\lambda e^{-\lambda\xi}-\lambda e^{-i\lambda\xi}\right]\frac{\Delta_{22}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}+$$

$$+\left[e^{-\lambda\xi}-e^{i\lambda\xi}+\lambda^4e^{i\lambda(1-\xi)}-\lambda^4e^{-i\lambda(1-\xi)}\right]\frac{\Delta_{32}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}+\left[e^{-\lambda(1-\xi)}-e^{i\lambda(1-\xi)}\right]\frac{\Delta_{42}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Big)-$$

$$-\frac{1}{4}e^{-i\lambda x}\Big(\lambda^{-3}\left[e^{-\lambda\xi}+ie^{i\lambda\xi}\right]\frac{\Delta_{13}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \lambda^{-1}\left[e^{-\lambda\xi}-ie^{i\lambda\xi}+\lambda e^{-\lambda\xi}-\lambda e^{i\lambda\xi}\right]\frac{\Delta_{23}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}+$$

$$+\left[e^{-\lambda\xi}-e^{i\lambda\xi}+\lambda^4e^{i\lambda(1-\xi)}-\lambda^4e^{-i\lambda(1-\xi)}\right]\frac{\Delta_{33}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\left[e^{-\lambda(1-\xi)}-e^{i\lambda(1-\xi)}\right]\frac{\Delta_{43}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Big)-$$

$$-\frac{1}{4}e^{\lambda x}\Big(\lambda^{-3}\left[e^{-\lambda\xi}-ie^{i\lambda\xi}\right]\frac{\Delta_{14}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \lambda^{-1}\left[e^{-\lambda\xi}-ie^{i\lambda\xi}+\lambda e^{-\lambda\xi}-\lambda e^{i\lambda\xi}\right]\frac{\Delta_{24}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}-$$

$$-\left[e^{-\lambda\xi}+e^{i\lambda\xi}+\lambda^4e^{i\lambda(1-\xi)}-\lambda^4e^{-\lambda(1-\xi)}\right]\frac{\Delta_{34}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}+\left[e^{-\lambda(1-\xi)}-e^{i\lambda(1-\xi)}\right]\frac{\Delta_{44}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Big). \tag{17}$$

В определителе $\Delta_{vp}(\lambda)$ при $p\leq 2$ в секторе R_j показательной функцией, имеющей наибольшую действительную часть, является функция $e^{\lambda(1-i)}$, а при $p\geq 3$ таких функций являются e^{λ} и $e^{-i\lambda}$. Умножая числитель и знаменатель $\frac{\Delta_0(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ на $\lambda^{-13}e^{\lambda(1-i)}$, подобно проведенной схеме [Оруджев, 1989] можно установить, что вне малых кругов $K_\delta(\lambda_v)$ радиуса δ с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$ выполняется соотношение

$$G(x,\xi,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad |\lambda|\to\infty. \tag{18}$$

Это представление справедливо во всех секторах R_j, $j=\overline{1,8}$. Аналогичным образом устанавливается, что вне малых окрестностей собственных значений имеет место и такая оценка

$$\frac{\Delta_1(x,\lambda,\varphi_0,\varphi_1,f)}{\Delta(\lambda)} = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad |\lambda|\to\infty\,. \tag{19}$$

Эти соотношения показывают, что спектральная задача (5)–(6) регулярна [Расулов, 1986; Оруджев, 1999]. Следовательно, для всякой непрерывной функции $h(x)$ имеет место формула разложения

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_v\int\limits_{C_v}\lambda^s d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\,h(\xi)\,d\xi = \begin{cases} h(x), & s=3\\ 0, & s<3\end{cases} \tag{20}$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_v\int\limits_{C_v}\lambda^3\frac{\Delta_1(x,\lambda,\varphi_0,\varphi_1,f)}{\Delta(\lambda)}d\lambda = 0,$$

где C_v – простой замкнутый контур, окружающий только одну из корней $\Delta(\lambda)$ и v сумма распространяется на все полюсы функции Грина.

Нетрудно установить, что решение задачи Коши (7)–(8) представляется в виде

$$z(t,\lambda,x)=\varphi_0(x)\cos t\sqrt{\lambda^4+k}+\frac{1}{\sqrt{\lambda^4+k}}\cdot\sin t\sqrt{\lambda^4+k}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda^4+k}}\int\limits_0^t f(x,\xi)\,\sin(t-\xi)\sqrt{\lambda^4+k}d\xi\,, \tag{21}$$

здесь $\sqrt{\lambda^4+k}$ – регулярная ветвь, положительная при $\lambda^4+k>0$.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1. *Производные* $\dfrac{d^m\varphi_0(x)}{dx^m}$ $\left(m=\overline{0,6}\right)$, $\dfrac{d^m\varphi_1(x)}{dx^m}$ $\left(m=\overline{0,4}\right)$ *непрерывны па отрезке* $[0,1]$;
2. $\left.\dfrac{d^m\varphi_0(x)}{dx^m}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{d^m\varphi_0(x)}{dx^m}\right|_{x=1}=0,\quad\left(m=\overline{0,5}\right)$

   $\left.\dfrac{d^m\varphi_1(x)}{dx^m}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{d^m\varphi_1(x)}{dx^m}\right|_{x=1}=0,\quad\left(m=\overline{0,3}\right)$;
3. $f(x,t)$ *при всех* $x\in[0,1]$ *дважды пепрерывно дифференцируема по* t *в интервале* $[0,T]$, *имеет непрерывную производную до четвертого порядка включительно но* $x\in[0,1]$ *при всех* $t\in[0,T]$ *п* $\left.\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}\right|_{x=1}=0$.

Тогда существует единственное решение смешанной задачи (2)–(4), *представленное в виде полного интегрального вычета*

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_v\int\limits_{C_v}\lambda^3d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\,z(t,\xi,\lambda)\,d\xi. \tag{22}$$

□ Представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t) \tag{23}$$

Обозначим $A_n=\varphi_{0n}$, $B_n=\frac{1}{\lambda_n^2\sqrt{1+k/\lambda_n^4}}$, $C_n=\frac{1}{\lambda_n^2\sqrt{1+k/\lambda_n^4}}f_{1n}$, где

$$\varphi_{0n}=\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda_n)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi,$$

$$\varphi_{1n}=\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda_n)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi,$$

$$f_{1n}=\int\limits_0^t \sin\,\lambda_n^2\sqrt{1+k/\lambda_n^4}f(\xi,\tau)\,d\tau.$$

Тогда из оценки $|u_n(x,t)| \le |A_n| + |B_n| + |C_n|$ получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(|A_n| + |B_n| + |C_n|\Big)$ является мажорантом наиисанного выше ряда и

$$\frac{\partial^{k+m} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{k+m} u_n(x,t)}{\partial x^k \partial t^m}, \;\; k = \overline{0,4}; \;\; m = \overline{0,3}\,.$$

Следовательно, имеет место эквивалентное соотношение

$$\frac{\partial^{k+m} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^m} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{k+m}\Big(|A_n| + |B_n| + |C_n|\Big).$$

Дифференцировать три раза но t, четыре раза но x возможно, если ряды в правых частях последнего соотношения будут сходиться равномерно, что обеспечивается при выполненпи условии 1)–4) теоремы. Единственность решения $u(x,t)$ получается непосредственно из (22). ■

Заключение

В исследовании доказано, что изучаемая начально-краевая задача для уравнения изгибных колебаний балки имеет классическое решение, если в одном пз граничных условий имеются производные но времени более высокого порядка, чем в самом уравнении. При этом преднолагаются определенные условия гладкости начальных данных, которые обращаются в нуль вместе со всеми производными до некоторого порядка на концах интервала изменения пространственной переменной, а также условия гладкости и обращение в нуль частной производной по длине балки в начальный момент времени на правом конце. Кроме того, необходимо условие о том, что коэффициент постели отличен от четвертой степени собственных значений, взятых с отрицательным знаком.

Это решение представлено в виде полного интегрального вычета и выражено через решения нностроенных специальным образом спектральной задачи и задачи Коши. Решение задачи Коши является ограниченным на точках спектра краевой задачи. Это решение определяется легко применяемым практически и относительно эффективным разложением, не пспользующим техники классических методов интегральных преобразований обобщенного метода Фурье, а также метода характеристик.

Список литературы

1. Аитбаева А.А. 2014. Онределенпе коэффициента постели по собственным частотам колебаний балки. Труды Института Механики им. Р.Р.Мавлютова Уфимского научного центра РАН, вып. 10: 13–15.

2. Сабитов К.Б. 2015. Колебания балки с заделанными концами. Вестнпк Самарского государственного технического университета. Сер.Физ.-мат. Наук, Т.19, № 2:311–324.

3. Оруджев Э.Г., Амирова Л.И. 2019. Четырехкратное разложение но решению краевой задачи для дифференциального уравнения 4-го порядка с двухкратными характеристиками. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, Т.51, № 2:183–191.

4. Оруджев Э.Г., Намазова Н.М. 2019. Об одной смешанной задаче для уравнения колебания стержня, содержащей в граничных условиях производные по времени. Вестнпк Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные наукп, Т. 34, вып. 3: 66–72.

5. Зульфугарова Р.Т. 2015. О смешанных задачах для волнового уравнения, содержащих в граничных условиях производные но времени. Journal of Contemporary Applied Mathematics, V.5(1):29–34.

6. Расулов М.Л. 1986. Разложение функции в ряд полного интегрального вычета и решение смешанных задач. ДАН СССР, Т. 286, № 1: 42–46.

7. Лидский В.Б., Садовничий В.А. 1968. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций. Математический сборник, Т.75(117), № 4, 558–566.

8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. 1973. Методы теории функций комплексного переменного. Москва, Наука, 735 с.

9. Оруджев Э.Г. 1989. О краевых задачах для дифференциального уравнения 4-го порядка, полиномиального зависящего от спектрального параметра. ДАН Аз.ССР, Т.45(10), 7–12.

10. Оруджев Э.Г. 1999. Краевые задачи для дифференциальных уравнений четкого порядка с кратными характеристиками. Доклады Академии Наук, Российская Академия Наук, 368(1): 14–17.

11. Orudzhev E.G. 1998. To spectral analysis of ordinary differential operators polynomially depending on a spectral parameter with periodic coefficients. Proc. Inst. Math. Mech. Nati. Acad. Sci. Azerb 8(15):169- 175.

References

1. Aitbaeva A.A. 2014. Opredelenie koeffisenta posteli po sobstvennim chastotam kolebaniy balki. Trudi Instituta Mexaniki im.R.R.Mavlyutova Ufimskoqo nauchnoqo tsentra RAN, vip. 10:13–15.

2. Sabitov K.B. 2015. Kolebaniya balki s zadelannimi kontsami. Vestnik Samarskoqo qosudarstvennoqo texnicheskoqo universiteta. Ser.Fiz.-Mat. Nauk, T.19, № 2:311–324.

3. Orudzhev E.G., Amirova L.I. 2019. Chetirexkratnoe razlojenie po resheniyu kraevoy zadachi dlya differentsialnoqo uravneniya 4-qo poryadka s dvuxkratnimi xarakteristikami. Nauchnie vedomosti Belqorodskoqo qosudarstvennoqo universiteta. Seriya:Matematika. Fizika, T. 51, № 2:183–191.

4. Orudzhev E.G., Namazova N.M. 2019. Ob odnoy smeshannoy zadache dlya uravneniya kolebaniya sterjnya, soderjashey v qranichnix usloviyax proizvodnie po vremeni. Vestnik Daqestanskoqo qosudarstvennoqo universiteta. Seriya 1. Estestvennie nauki, T. 34, vip. 3:66–72.

5. Zulfugarova R.T. 2015. O smeshannix zadachax dlya volnovoqo uravneniya, soderjashix v qranichnix usloviyax proizvodnie po vremeni. Journal of Contemporary Applied Mathematics, V.5(1):29–34.

6. Rasulov M.L. 1986. Razlojenie funktsii v ryad polnoqo intlimitseqralnoqo vicheta I reshenie smeshannix zadach. DAN SSSR, T. 286, № 1: 42–46.

7. Lidskiy V.B., Sadovnichiy V.A. 1968. Asimptoticheskie formuli dlya korney odnoqo klassa tselix funktsiy. Matematicheskiy sbornik, T.75(117), № 4, 558–566.

8. Lavrentev M.A., Shabat B.V. 1973. Metodi teorii funktsiy kompleksnoqo peremennoqo. Moskva, Nauka, 735 p.

9. Orudzhev E.G. 1989. O kraevix zadachax dlya differentsialnoqo uravneniya 4-qo poryadka, polinomialnoqo zavisyasheqo ot spektralnogo parametra. DAN Az.SSR, T.45(10), 7–12.

10. Orudzhev E.G. 1999. Kraevie zadachi dlya differentsialnix uravneniy chetkoqo poryadka s kratnimi xarakteristikami. Dokladi Akademii Nauk, Rossiyskaya Akademiya Nauk, 368(1): 14–17.

11. Orudzhev E.G. 1998. To spectral analysis of ordinary differential operators polynomially depending on a spectral parameter with periodic coefficients. Proc. Inst. Math. Mech. Nati. Acad. Sci. Azerb 8(15):169- 175.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Оруджев Э.Г., Зульфугарова Р.Т. 2019. Об одной начально-граничной задаче для уравнения изгибных колебаний балки. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 496–505. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-496-505.

Orudzhev E.G., Zulfugarova R.T. 2019. About one initial-boundary problem for equation of bending beam vibrations. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 496–505 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-496-505.