

УДК 534.11

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-541-554

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ РАСЩЕПЛЕННОГО ПРОВОДА. ЧАСТЬ I: ДВИЖЕНИЕ «В ЦЕЛОМ»****MATHEMATICAL MODELING OF SPLIT WIRE MOTIONS.  
Part I: MOTION "IN THE WHOLE"****В.И. Ванько****V.I. Vanko**

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,  
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия

Bauman Moscow State Technical University,  
5 2d Baumanskaya St, Moscow, 105005, Russia

E-mail: vvanko@mail.ru

**Аннотация**

Развивается интегральный подход к исследованию колебаний расщепленного провода (расщепленной фазы) линии электропередачи (р/п или р/ф ЛЭН): вся расщепленная фаза в силу кинематических предположений рассматривается как некоторая гипотетическая тяжелая нить, свойства которой определяются характеристиками проводов и распорок, образующих фазу. Представлены уравнения движения фазы «в целом»; вводится понятие о конфигурации р/ф и делаются выводы о движениях фазы в зависимости от ее конфигурации; решается задача о расстановке распорок в пролете расщепленного провода, максимизирующей декремент колебаний механической системы «провода – распорки». Все теоретические построения опираются на известные в мировой литературе экспериментальные данные.

**Abstract**

In the article the integral approach develops near research of the electricity overhead line split wire vibrations: by virtue of kinematics suppositions all split phase (the system "wires – spacers") is examined as some hypothetical heavy filament, properties of that are determined by mechanical characteristics of wires and spacers, formative the split phase. The phase motion equations are presented "on the whole" in dependence of the phase configuration; certain conclusions are done about spacers arrangement in split wire span, maximizing the vibrations decrement of mechanical system "wires – spacers". All the theoretical conclusions lean against known in world literature experimental results.

**Ключевые слова:** воздушная линия электропередачи, расщепленная фаза (провод), система «провода – распорки», уравнения движения, оптимальная расстановка распорок.

**Keywords:** electrical overhead line, split phase (wire), system "wires – spacers", vibration equations, spacers' optimal arrangement.

## 1. Введение

В 1910 году профессор В.Ф. Миткевич (с 1929 г. действительный член АН СССР) писал: «Таким образом, приходится констатировать непрерывный рост рабочего напряжения на линиях электрической передачи энергии. Несомненно, что применение новышенного рабочего напряжения налагает известные условия при выборе диаметра проводов, заставляет увеличивать этот диаметр. Здесь мы, конечно, не можем идти сколь угодно далеко, если только будем придерживаться обычных типов проводов, которые при относительно малом сечении были бы эквивалентны проводам с очень большим сечением. Одно из многих решений этой задачи состоит в следующем. Провод составляется из ряда отдельных жил, отстоящих одна от другой и расположенных по некоторой цилиндрической поверхности в качестве образующих этой поверхности. . .

Конечно, для того, чтобы практически осуществить подобного рода проводник, необходимо выработать его конструкцию, т. е. необходимо разработать и проверить на опыте способ сборки такого проводника, способ его подвески и т. д. Все это, однако, не представляет, на мой взгляд, «непреодолимых трудностей» [Миткевич, 1910].

Так возникла идея «расщеплять» каждую токопроводящую фазу. На рис. 1 показаны воздушные линии (ВЛ) переменного тока с расщепленными фазами и типичный 4-проводный расщепленный провод: во избежание схлестывания проводов фазы положения отдельных проводов в пространстве фиксируются установкой в пролете (расстояние между несущими опорами равно  $L$ ) стержневых конструкций – расборок. Для подавления колебаний участков проводов между распорками (в подпролетах) в конструкцию расборок включаются шарниры с вязкоупругими свойствами.

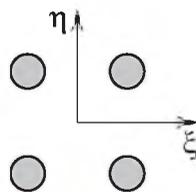
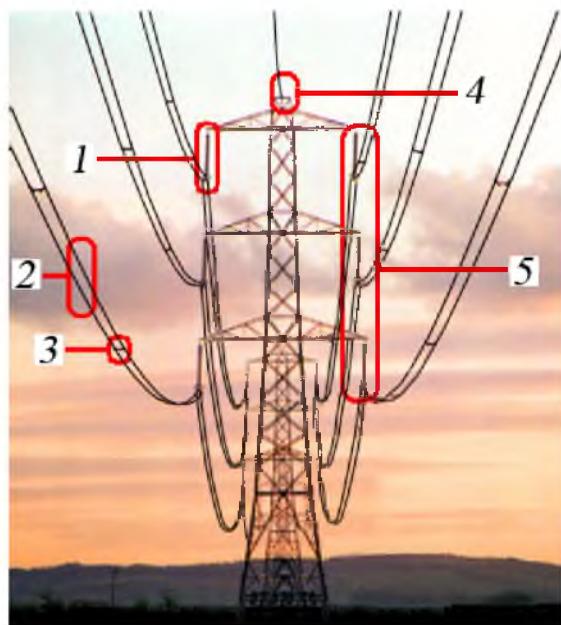


Рис 1. Цифрами на рисунке обозначены: 1 – изолятор; 2 – расщепленная фаза из двух проводов; 3 – распорка между проводами одной расщепленной фазы; 4 – провод заземления, закрепленный на верхушке опоры ЛЭН; 5 – три расщепленных фазы, расположенных на одной стороне по отношению к опоре ЛЭН и образующих одну электрическую цепь



В предлагаемой работе изучаются колебания расщепленной фазы как некоторого механически эквивалентного расщепленной фазе провода; предлагается способ расстановки распорок в пролете, позволяющий максимизировать сопротивление колебаниям системы «провода–распорки» за счет использования демпфирующих свойств распорок.

## 2. Движения расщепленной фазы

Нод «конфигурацией фазы» понимается совокупность геометрических и механических свойств расщепленного провода: особенности расположения проводов фазы в пространстве, геометрические и механические характеристики проводов и распорок, а также способ расстановки распорок по длине пролета.

Целью настоящего исследования является ответ на вопрос о выборе определенной конфигурации р/ф, которая наилучшим образом отвечала бы требованиям к ее движениям с учетом особенностей конструкции данной ВЛ. Например, если проектируется воздушная линия с горизонтальным расположением трех фаз (т. е. все три фазы подвешиваются на одной высоте), то возникает необходимость в ограничении боковых перемещений линии центров масс (ЛЦМ) поперечных сечений каждой фазы; при расположении фаз в вертикальной плоскости, рис. 1, нужно стремиться к ограничению вертикальных перемещений ЛЦМ.

Актуальность упомянутых требований возрастает при сооружении ВЛ со сближенными фазами (т. п. «компактные линии»), что обеспечивает, наряду с улучшением электродинамических качеств линии, сужение полосы отчуждения в окрестности ВЛ [Александров, 1989].

Будем предполагать, что в каждом поперечном сечении р/ф взаимные перемещения проводов в подпролетах малы по сравнению с соответствующими перемещениями ЛЦМ фазы; р/ф «в целом» рассматривается как наделенная определенными свойствами тяжелая нить – механически эквивалентный фазе провод. Механические свойства эквивалентного провода определяются свойствами каждого из проводов фазы (площади сечения, натяжения, механические постоянные материала проводов) и конструкцией р/ф (расположение проводов в поперечных сечениях фазы, расстановка и механические характеристики распорок).

Поведение эквивалентного провода определяется следующими механическими гипотезами: провод сопротивляется только растяжению и кручению; каждое нонеречное сечение фазы движется поступательно со своим центром масс (ЦМ) и поворачивается вокруг ЦМ на угол  $\phi(x, t)$ , который характеризует кручение фазы ( $x$  – координата данного поперечного сечения, измеряемая вдоль провода,  $0 \leq x \leq L$ ;  $t$  – время); с учетом фиксирующего эффекта распорок принимается известная в теории стержней гипотеза плоских сечений, т. е. нонеречное сечение  $x = x_0$  каждого из проводов фазы имеет 4 степени свободы: движения центра масс сечения вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и поворот поперечного сечения вокруг центра масс сечения фазы (с сохранением прежней геометрии поперечного сечения).

Расщепленный провод состоит из произвольного числа  $n$  проводов, а пролет – из  $m$  подпролетов; расставленные в пролете распорки могут быть различны по своей конструкции и механическим характеристикам. При помощи  $\delta$ -функции Дирака в рассмотрение включаются массы и моменты инерции распорок, а также учитываются координаты расстановки распорок в пролете фазы. Каждый провод фазы – тяжелая вязкоупругая нить, работающая как модель Фойхта [Работнов, 2014], силу натяжения (натяжение) которой вычисляем в виде:

$$T_k(x, t) = T_{0k} + \sigma_k F = T_{0k} + (E\varepsilon_k + \mu\dot{\varepsilon}_k)F.$$

Здесь  $T_k(x, t)$  (Н) – натяжение провода с номером  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) в данный момент времени;  $T_{0k}(x)$  (Н) – начальное (монтажное) натяжение  $k$ -го провода;  $\sigma_k(x, t)$  (Н/м<sup>2</sup>) – механическое напряжение в проводе, возникающее вследствие его колебаний;  $\varepsilon_k(x, t)$  и  $\dot{\varepsilon}_k(x, t)$  (с<sup>-1</sup>) – деформация и скорость деформации в сечении  $x$ ;  $F$  (м<sup>2</sup>) – площадь поперечного сечения провода,



которую в данной работе будем считать постоянной для всех проводов фазы;  $E$ ,  $(\text{Н/м}^2)$  и  $\mu$ ,  $(\text{Н}\bullet\text{с/м}^2)$  – осредненные по сечению провода модуль Юнга и коэффициент вязкости материала провода в продольном направлении.

Перемещение точки  $x$  ЛЦМ фазы в процессе колебаний описывается вектором

$$\vec{\vartheta}(x, t) = u(x, t)\vec{i} + v(x, t)\vec{j} + w(x, t)\vec{k},$$

где  $u$ ,  $w$  – компоненты перемещения в плоскости начального провисания вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  соответственно,  $v$  – компонента перемещения из плоскости  $Oxz$  – боковое перемещение.

В работе [Ванько, 1991] разработана методика вычисления кинематических соотношений в рамках оговоренных выше предположений и, на основании принципа Даламбера-Лагранжа, выведены уравнения движения ЛЦМ фазы по каждой из степеней свободы:

$$T_0^* u'' + nEF(u' + w_0' w')' + ES_\xi(w_0' \phi')' + n\mu F(\dot{u}' + w_0' \dot{w}')' + \mu S_\xi(w_0' \dot{\phi}')' - n\bar{\rho}F\ddot{u} + Q_u = 0, \quad (1)$$

$$T_0^* v'' - T_\eta \phi'' - n\bar{\rho}F\ddot{v} + Q_v = 0, \quad (2)$$

$$T_0^* w'' - T_\xi \phi'' + nEF(u' w_0' + w_0' w')' + ES_\xi(w_0' \phi')' + n\mu F(\dot{u}' w_0' + w_0' \dot{w}')' + \mu S_\xi(w_0' \dot{\phi}')' - n\bar{\rho}F\ddot{w} + Q_w = 0, \quad (3)$$

$$T_I \phi'' + T_{II} \phi' + EI_\xi(w_0' \phi')' + \mu I_\xi(w_0' \dot{\phi}')' + ES_\xi(w_0' u' + w_0' w')' + \mu S_\xi(w_0' \dot{u}' + w_0' \dot{w}')' - T_\xi w'' - T_\eta v'' + \bar{\rho}S_\xi \ddot{w} + \bar{\rho}S_\eta \ddot{v} - \bar{J} \ddot{\phi} + Q_\phi = 0. \quad (4)$$

Здесь введены структурные параметры, характеризующие конфигурацию р/ф:

$$\xi^* = \sum_{k=1}^n \xi_k; \quad \eta^* = \sum_{k=1}^n \eta_k;$$

$\xi_k$ ,  $\eta_k$  – координаты центра масс поперечного сечения  $k$ -го провода в местной системе координат, начало которой в ЦМ данного поперечного сечения фазы. Нонеречное сечение фазы рассматривается как система материальных точек, массы которых сосредоточены в центрах кругов, коими являются сечения проводов фазы.

$$S_\xi = F\xi^*; \quad S_\eta = F\eta^*; \quad T_0^* = \sum_{k=1}^n T_{0k}; \quad I_\xi = F \sum_{k=1}^n \xi_k^2; \quad T_\xi = \sum_{k=1}^n T_{0k} \xi_k; \quad T_\eta = \sum_{k=1}^n T_{0k} \eta_k$$

$$T_I = \sum_{k=1}^n T_{0k} (\xi_k^2 + \eta_k^2); \quad T_{II} = \sum_{k=1}^n T_{0k} \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2};$$

$z = w_0(x)$  – кривая начального провисания ЛЦМ;

$\bar{\rho} = \bar{\rho}(x) = \rho + \frac{1}{nF} \sum_{i=1}^m m_i \delta(x - x_i)$  – обобщенная плотность материала эквивалентного провода;  $\rho$  ( $\text{кг/м}^3$ ) – плотность материала провода;  $m_i$  – масса  $i$ -ой распорки ( $i = 1, \dots, m$ ); размерность  $\delta$ -функции Дирака –  $1/\text{м}$ ;

$\bar{J} = \bar{J}(x) = \rho F \sum_{k=1}^n (\xi_k^2 + \eta_k^2) + \sum_{i=1}^m J_i \delta(x - x_i)$  ( $\text{кг}\bullet\text{м}$ ) – обобщенный «момент инерции» нонеречного сечения фазы,  $J_i$  ( $\text{кг}\bullet\text{м}^2$ ) – момент инерции  $i$ -ой распорки относительно центра масс сечения.

Точкой над буквенными символами в системе уравнений движения обозначены производные по времени, штрихами сверху справа – производные по координате  $x$ .



Интенсивности распределенных аэродинамических воздействий на провода фазы по соответствующим степеням свободы обозначены через  $Q_u, Q_v, Q_w$  (Н/м); интенсивность распределенного по длине пролета момента аэродинамических (а/д) сил, действующих на расщепленную фазу, обозначена через  $Q_\phi$  (Н).

Ограничимся анализом свободных колебаний и рассмотрим фазы различных конфигураций.

1) Нонеречные сечения фазы обладают симметрией относительно соответствующих осей  $O_1\xi$  и  $O_1\eta$ . Например, во время пролета 4-х проводной фазы расставлены прямоугольные либо квадратные одинаковые распорки (вообще говоря, сечения с центральной симметрией). Пусть начальные натяжения проводов  $T_{0k}$  равны между собой. Тогда значения структурных параметров:

$$\xi^* = \eta^* = S_\xi = S_\eta = T_\xi = T_\eta = 0.$$

Связанными, т. е. образующими систему, оказываются уравнения колебаний в плоскости  $Oxz$  начального провисания ЛЦМ:

$$\begin{aligned} T_0^* u'' + nEF(u' + w_0' w')' + n\mu F(\dot{u}' + w_0' \dot{w}') - n\bar{\rho} F \ddot{u} &= 0, \\ T_0^* w'' + nEF(u' w_0' + w_0'^2 w')' + n\mu F(\dot{u}' w_0' + w_0'^2 \dot{w}') - n\bar{\rho} F \ddot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Уравнения боковых (2) и крутильных (4) колебаний не связаны между собой, не связаны с системой (\*) не связаны; причем на боковые колебания никак не влияют вязкие свойства материала проводов.

Отмеченные особенности поведения р/ф рассматриваемых конфигураций наблюдались в натурных экспериментах: искусственно возбужденные колебания в вертикальной плоскости не вызывали ни боковых, ни крутильных колебаний; в свою очередь, начальные боковые колебания не вызывали движений по другим степеням свободы. Замеренный декремент боковых колебаний оказался на 1,5 порядка ниже декремента колебаний в вертикальной плоскости [Астахов и др., 1989].

Наиболее технологичным способом монтажа расщепленного провода является расстановка по пролету одинаковых распорок, которые обладают центральной симметрией. При расстановке трех фаз на одной высоте (горизонтально) необходимо ограничить колебания из плоскости начального провисания  $Oxz$ . Чтобы избежать самой неприятной по отношению к боковым колебаниям ситуации, описанной в п.1), нужно таким образом задать начальные натяжения проводов фазы, чтобы «силовые» структурные параметры  $T_\xi$  и  $T_\eta$  оказались неравными нулю. Этого можно добиться, задавая неравные начальные натяжения проводов фазы.

Тогда  $\xi^* = \eta^* = S_\xi = S_\eta = 0, T_\xi \neq 0, T_\eta \neq 0$ . В результате получим систему уравнений, связанных по всем степеням свободы.

Начальные боковые колебания, вызванные порывом ветра, инициируют крутильные колебания и колебания в плоскости  $Oxz$ , что обеспечит диссипацию энергии системы по всем (четырем) степеням свободы.

2) В работе [Ванько, Платонова, 1998] система уравнений (1)–(4) обобщена на случай, когда конфигурация фазы изменяется по длине пролета: могут быть расставлены распорки с неодинаковыми механическими и геометрическими свойствами; провода фазы не являются образующими цилиндрической поверхности; провода имеют различные начальные натяжения.

В вычислительном эксперименте, описанном в цитируемой работе, изучались колебания фазы под действием порыва бокового ветра со скоростным напором, равным 310 Па (скорость ветра  $\sim 22$  м/с); фаза состояла из четырех проводов АС-150/34, соединенных жесткими квадратными распорками через 50 м; длина пролета 300 м. Рассматривались случаи, когда натяжения  $T_H$  в проводах нижней пары составляют 100, 95, 85 и 80 процентов от натяжения  $T_B$  в проводах верхней пары.

В данном случае отличен от нуля «силовой» структурный параметр  $T_\eta$ , и система уравнений движения распадается на две системы – колебания в вертикальной плоскости и крутильно-боковые колебания. Установлено, что характер крутильно-боковых колебаний существенно зависит от упомянутого выше соотношения натяжений в проводах нижней и верхней пар, рис. 2 (рис 2.а соответствует случаю  $T_H/T_B = 0,8$ ; рис. 2.б – случаю  $T_H/T_B = 0,9$ ).

В качестве критерия зависимости между крутильными и боковыми колебаниями выбиралось отношение максимального угла поворота за время  $\tau$  (период колебаний огибающих к кривым  $\phi = \phi(t)$  и  $v = v(t)$ ) к величине начального угла поворота фазы (ее монтажного положения)  $\phi_0 = \pi/4$ :

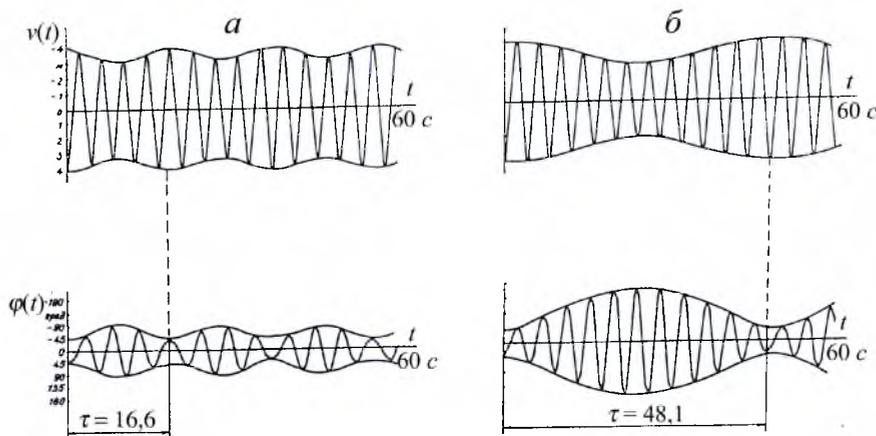


Рис. 2. Крутильно-боковые колебания фазы при неравных натяжениях проводов

$$\lambda = \frac{\phi_{\max}}{\phi_0},$$

так как чем больше величина  $\lambda$ , тем выше амплитуда колебаний огибающей графика боковых перемещений  $v = v(t)$ .

На рис. 3 приведена настроенная по отдельным точкам зависимость  $\lambda$  от величины  $T_H/T_B$  в точке  $x = L/2$  (середина пролета). Максимальное значение  $\lambda$  достигается при  $T_H/T_B = 0,9$ .

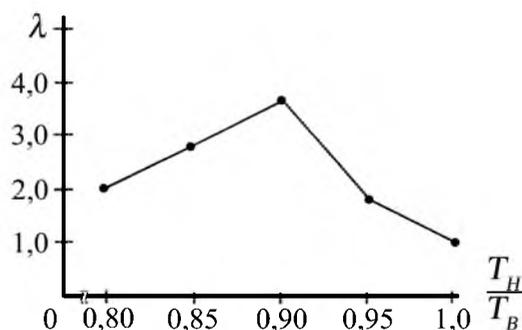


Рис. 3. Зависимость параметра  $\lambda$  от угла поворота сечения;  $\lambda = 1$  соответствует чисто боковому перемещению, так как силовой параметр  $T_\eta = 0$

Таким образом, изменяя натяжения в проводах фазы в достаточно небольших пределах, можно ограничить перемещения, опасные для данной конструкции ВЛ, в данном случае – боковые перемещения.

Приведенные выше зависимости между конфигурацией фазы и характером ее движений в целом (движения линий центров масс нонеречных сечений) необходимо учитывать при проектировании компактных ЛЭН.

### 2. Оптимизация расстановки распорок

С тех пор, как в практике энергетического строительства стали использовать распорки-гасители колебаний в подпролетах, актуален вопрос: каким образом следует располагать распорки по пролету фазы, чтобы наилучшим образом использовать их диссипирующую способность.

Обсуждению названных и смежных вопросов посвящены работы [Rowbottom, Richards, 1973; Hearnshaw, 1974, 1975]. Экспериментально изучались фазы с различными расстановками распорок. При каждом способе расстановки внимание концентрировалось на тех формах колебаний, при которых распорки работают в наиболее неблагоприятных режимах, например, когда провода в подпролетах совершают противофазные движения по отношению к корпусу распорки, рис. 4.

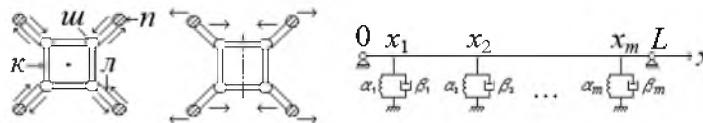


Рис. 4. Буквами обозначены:  $\kappa$  – корпус распорки;  $л$  – луч распорки;  $ш$  – вязкоупругий шарнир;  $п$  – провод фазы

В работе [Hearnshaw, 1975] отмечен важный экспериментальный факт: на равных по длине подпролетах трех- и четырехпроводных РФ максимальные значения декремента колебаний системы достигались при одинаковых расстановках распорок в обеих исследуемых фазах.

В работе [Ванько, Яковенко, Виноградов, 1989] обосновывается правомерность использования линейных вязкоупругих моделей при исследовании колебаний в подпролетах р/ф.

На основании вышеизложенного предлагается следующий подход к проблеме максимизации декремента колебаний расцепленной фазы как системы «провода-распорки».

Пусть в пролете поставлено  $m$  распорок с известными механическими свойствами (модули упругости и коэффициенты вязкости); заданы координаты точек постановки распорок, рис. 4:  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < L$  ( $L$  – длина пролета).

Распорка наиболее полно играет роль гасителя колебаний, если ЛЦМ нонеречных сечений фазы остается неподвижной, а провода в подпролетах движутся осесимметрично относительно ЛЦМ, либо так, что имеется плоскость симметрии. В обоих случаях имеют место противофазные движения проводов. Тогда задача об изучении взаимодействия распорок с проводом существенно упрощается, так как можно рассматривать только один провод, на который в точках  $x_1, x_2, \dots, x_m$  действуют сосредоточенные силы, вычисляемые в зависимости от принятой механической схемы работы демпфирующих узлов (шарниров) распорок.

Будем считать, что узлы распорок являются линейными вязкоупругими элементами Фойхта, рис. 4 [Работнов, 2014]. Действие узлов распорок на провод моделируется распределенной по длине провода поперечной нагрузкой интенсивности

$$Q(w, \dot{w}) = \sum_{k=1}^m (\alpha_k w(x, t) + \beta_k \dot{w}(x, t)) \delta(x - x_k). \tag{5}$$

Здесь размерности входящих в (5) величин таковы:  $[Q] = \text{Н/м}$ ,  $[\alpha] = \text{Н/м}$ ,  $[\beta] = \text{Н}\cdot\text{с/м}$ ,  $[\delta(x - x_k)] = 1/\text{м}$ ;  $w(x, t)$  и  $\dot{w}(x, t)$  – перемещение и скорость перемещения точки провода в



вертикальной плоскости,  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  – величины упругой и вязкой жесткостей демпфирующего узла распорки с номером  $k$ .

Предположим, что из решения задачи о свободных колебаниях системы «провод–распорки» получена функциональная зависимость демпфирующей способности системы от координат  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и параметров  $\alpha_k, \beta_k$ :

$$\gamma = f(x_1, \dots, x_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_m). \quad (6)$$

Известно, что при монтаже расщепленной фазы должны соблюдаться определенные требования к выбору длин подпролетов: длины последних назначаются так, чтобы избежать соударения проводов фазы либо их слипания при коротком замыкании. При соблюдении этих требований длины подпролетов определяются механическими свойствами распорок [Проектирование ЛЭП сверхвысокого напряжения, 1983]. Назначаются предварительные длины подпролетов (их можно взять, например, равными), т. е. задаются начальные координаты точек постановки распорок

$$x_1 = x_{10}, \quad \dots, \quad x_m = x_{m0},$$

которые в процессе решения задачи будут варьироваться в известных допустимых пределах:  $x_{i0} - \varepsilon_i \leq x_i \leq x_{i0} + \varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Таким образом, задача об оптимизации демпфирующей способности системы «провод–распорки» может быть поставлена как задача о поиске максимального значения функции  $m$  переменных (при фиксированных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ ) при ограничениях на варьируемые переменные в виде неравенств [Ванько, Зайцев, Галкин, 1996; Дейкина, 2003]:

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_m; \alpha, \beta) \rightarrow \max, \\ x_{k0} - \varepsilon_k \leq x_k \leq x_{k0} + \varepsilon_k. \end{cases} \quad (7)$$

Экспериментально установлено, что провод в пролете совершает, в основном, колебания вдоль оси  $Oz$  (поперечные колебания) [Ванько и др., 1987]. Поэтому уравнение (3) запишем в виде:

$$A[w] = T_0 w'' + EF(w_0'^2 w')' + \mu F(w_0'^2 \dot{w}')' - Q(w, \dot{w}) - \rho F \ddot{w} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) представим выражением

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^l w_r(t) \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad (9)$$

при этом координатные функции удовлетворяют краевым условиям  $w(0, t) = w(L, t) = 0$ .

В представлении (9) нечетным номерам  $r$  соответствуют симметричные относительно середины пролета  $x = L/2$  формы колебаний, четным номерам – антисимметричные формы.

Согласно методике Галеркина-Канторовича [Канторович, Крылов, 1952; Михлин, 1957] подставим (9) в уравнение (8), умножим последовательно результат подстановки на каждую координатную функцию ( $l$  раз), проинтегрируем по координате  $x$  и каждый интеграл приравняем к нулю:

$$\int_0^L A \left[ \sum_{r=1}^l w_r(t) \sin \frac{r\pi x}{L} \right] \sin \frac{j\pi x}{L} dx = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (10)$$

При вычислении интегралов используется основное свойство  $\delta$ -функции Дирака:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \delta(x - x_k) dx = \psi(x_k).$$



В результате получаем систему, состоящую из  $l$  обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно амплитудных функций  $w_1(t), \dots, w_l(t)$ .

Примем форму начального провисания провода в виде параболы

$$w_0(x) = 4w_0^* \frac{x^2 - xL}{L^2}$$

$(w_0(L/2) = w_0^*)$ . (10),, :  $w_2(t), w_4(t), \dots$ . Это обстоятельство существенно упрощает дальнейшие выкладки.

Пусть форма колебаний провода аппроксимируется двумя слагаемыми ( $l = 2$ ):

$$w(x, t) = w_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} + w_2(t) \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

Тогда из (10) получим два несвязанных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\rho FL}{2} \ddot{w}_p + \left( 32\kappa_p \mu F \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \beta_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right) \dot{w}_p + \\ + \left( \frac{(p\pi)^2}{2L} T_0 + 32EF\kappa_p \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right) w_p = 0, \quad p = 1, 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь  $\kappa_p = ((p\pi)^2 + 12) / 12$ ,  $p = 1, 2$ .

Отсюда находим значения коэффициентов затухания и собственные частоты колебаний для 1-ой и 2-ой форм колебаний:

$$\delta_p = \frac{1}{\rho FL} \left( 32\kappa_p \mu F \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \beta_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \omega_p = \frac{1}{\rho FL} \left( 2\rho FL \left[ \frac{(p\pi)^2}{2L} T_0 + 32EF\kappa_p \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right] - \right. \\ \left. - \left[ 32\kappa_p \mu F \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \beta_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right]^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $p = 1, 2$ ;  $[\mu] = \text{Н}\cdot\text{см}^2$ ;  $[\beta_k] = \text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}$ ;  $[\alpha_k] = \text{Н}/\text{м}$ .

При учете более, чем четырех форм колебаний, получить явные формулы для коэффициентов затухания  $\delta_p$  и собственных частот  $\omega_p$ , к сожалению, не удастся.

При  $l = 4$  задачу вычисления значений  $\delta_1, \dots, \delta_4$  и  $\omega_1, \dots, \omega_4$  удастся довести до числа при помощи обозримого алгоритма. Полученные при этом значения  $\delta$  и  $\omega$  для конкретных механических параметров  $E, \mu, \alpha, \beta$  отличаются от получаемых с использованием формул (12), (13) при значениях  $p = 3, 4$  не более, чем на 5 %.

Поэтому будем считать, что формулы (12), (13) имеют силу при любых  $p > 2$ .

Рассмотрим пример точного решения задачи (7) о нахождении максимума демпфирующей способности системы «провод–распорки».

Пусть в пролете РФ поставлены две распорки ( $m = 2$ ) симметрично относительно середины пролета и при этом требования на максимальную длину подпролета не нарушаются, поэтому решается задача на безусловный экстремум

$$\gamma(x_1, x_2) \rightarrow \max \quad (0 < x_1 < x_2 < L).$$

В эксперименте было выяснено, что основной демпфирующий эффект в системе «провод–распорки» создают потери энергии в узлах распорки [Ванько и др., 1987].



В качестве функции  $\gamma(x_1, x_2)$  в силу формулы (12) при  $p = 1, 2$ , положив  $\mu = 0$ , выберем выражение

$$\gamma(x_1, x_2) = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \rightarrow \max,$$

где

$$\delta_p = \frac{1}{\rho FL} \sum_{k=1}^2 \beta_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L}, \quad p = 1, 2.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\delta_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial x_i} + \delta_2 \frac{\partial \delta_2}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Введем безразмерную координату  $\xi = \pi x/L$ ,  $0 \leq \xi \leq \pi$ , и заметим, что искомые координаты  $\xi_1, \xi_2$  связаны зависимостью  $\xi_2 = \pi - \xi_1$  (распорки расположены симметрично относительно середины пролета  $\xi = \pi/2$ ), поэтому система (14) сводится к одному уравнению относительно  $\xi_1$  ( $0 < \xi_1 < \pi/2$ ):

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\sin^4 \xi_1 + \sin^4 2\xi_1) = 0 \Rightarrow \sin^3 \xi_1 \cos \xi_1 + 2 \sin^3 2\xi_1 \cos 2\xi_1 = 0.$$

Отсюда:  $32 \cos^4 \xi_1 - 16 \cos^2 \xi_1 + 1 = 0$ .

Решая это уравнение, получим:  $(\cos^2 \xi_1)_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$ , значит:

$$\xi_{1,1} \approx 0,8588, \quad \xi_{1,2} \approx 1,2968. \quad (15)$$

Отметим, что значения  $0, \pi/2$  и  $\pi$ , являющиеся корнями уравнений  $\sin 2\xi_1 = 0$  и  $\sin \xi_1 = 0$ , условиям исходной задачи не удовлетворяют.

Из значений (15) первое,  $\xi_{1,1}$ , дает глобальный максимум функции  $\gamma(\xi_1)$  на отрезке  $[0; \pi/2]$  и является решением поставленной задачи.

Итак, имеем

$$\xi^* \approx 0,8588, \quad x_1 = L\xi^*/\pi, \quad x_2 = L - x_1. \quad (16)$$

При решении задачи о расстановке распорок при условии, что форма колебаний задается в виде  $w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin \frac{k\pi x}{L}$  ( $n > 2$ ), где, в качестве  $\gamma$ , выбрана функция ( $\mu = 0$ ):

$$\gamma = |\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n|.$$

Такой выбор обосновывается в работе [Ванько и др., 1996] ббльшей простотой при построении вычислительного алгоритма, чем при выборе функции  $\gamma(x_1, \dots, x_m)$  в виде, аналогичном (2.10), что было сделано в работе [Дейкина, 2003].

Приведем сравнение наших результатов с рекомендациями иностранных фирм, полученными в результате обработки экспериментального материала [KUNHWA, 1993; DUNLOP, 1969].

В таблице 1 приведены данные по схемам расстановки двух распорок в пролетах длиной 100–170 м: результаты вычислений по формуле (16) и данные из отчета [KUNHWA].



Таблица 1: Расстановка двух распорок в пролете

Длина пролета, $L$ , м	Источник	Длины подпролетов, м		
100	формула (16) отчет [KUNHWA]	27,34 32,70	45,32 34,60	27,34 32,70
120	формула (16) отчет [KUNHWA]	32,80 37,50	54,40 45,00	32,80 37,50
140	формула (16) отчет [KUNHWA]	38,27 40,63	63,46 58,74	38,27 40,63
160	формула (16) отчет [KUNHWA]	43,74 43,47	72,52 73,06	43,74 43,47
170	формула (16) отчет [KUNHWA]	46,47 44,93	77,06 80,14	46,47 44,93

В таблице 2 представлены результаты вычислений по нашей программе [Ванько и др., 1996] п, для сравнения, данные по расстановке распорок, заимствованные из материалов упомянутых выше инофирм. Длины пролетов  $L$  изменялись в диапазоне 210...530 м; наши данные отмечены в таблице 2 символом \*. Прочерк в строке для  $L = 390$  м есть следствие того, что в таблицах фирмы DUNLOP рекомендуется ставить 6 распорок.

Таблица 2: Расстановка распорок в длинных пролетах

Длина пролета, $L$ , м	Число распорок	Источник	Длины подпролетов, м													
210	3	KUNHWA	42,21	63,19		62,39		42,21								
		DUNLOP	46,94	54,86		61,57		46,94								
		*	48,61	61,51		51,54		48,61								
250	3	KUNHWA	45,46	83,33		75,75		45,46								
		DUNLOP	46,94	75,29		80,77		46,94								
		*	57,87	73,23		61,03		57,87								
300	4	KUNHWA	45,45	66,97		75,16		66,97		45,45						
		DUNLOP	46,94	63,40		77,72		63,40		46,94						
		*	54,79	58,60		73,22		58,60		54,79						
350	5	KUNHWA	45,45	57,99		83,62		61,61		55,88		45,45				
		DUNLOP	46,94	53,34		61,57		88,39		53,34		46,94				
		*	46,80	68,40		51,26		67,84		68,90		46,80				
390	5	KUNHWA	45,45	74,12		83,62		74,12		67,15		45,45				
		DUNLOP	-	-		-		-		-		-				
		*	52,15	76,22		57,11		75,65		76,72		52,15				
440	6	KUNHWA	45,45	62,30		71,69		81,12		71,69		62,30		45,45		
		DUNLOP	46,94	50,60		79,25		85,34		79,25		50,60		46,94		
		*	58,84	65,01		63,94		64,42		63,94		65,01		58,84		
490	7	KUNHWA	45,45	58,34		65,00		83,33		75,75		61,47		55,31		45,45
		DUNLOP	46,94	50,60		65,84		78,94		85,04		65,85		50,60		46,94
		*	47,91	65,52		71,78		47,83		71,25		72,28		65,52		47,91
530	8	KUNHWA	45,45	51,16		55,76		68,78		80,85		75,75		55,70		45,45
		DUNLOP	46,94	51,21		59,74		65,84		82,91		65,8		59,74		46,94
		*	44,88	77,81		52,26		51,24		77,61		51,25		52,26		44,88

Отметим, что рекомендации фирмы KUNHWA выработаны на основе исследований [Hearnshow, 1974, 1975], причем таблицы фирмы KUNHWA несколько скорректированы экспериментальными данными. Характерная особенность рекомендаций вышеупомянутых инофирм состоит в том, что длины первого и последнего подпролетов равны 45,45 м либо 46,94 м независимо от длины всего пролета. Объяснить этот факт с точки зрения механики колебаний невозможно.

### 3. Заключение

В литературе, посвященной изучению движений расщепленной фазы и проектированию воздушных линий электропередачи, отмечается дороговизна проведения натуральных испытаний, на основании которых можно делать заключения и давать рекомендации строителям. Особенно строгие требования предъявляются к компоновке ВЛ со сближенными фазами (т. п. компактные линии) [Проектирование ЛЭП, 1983; Александров, 1989]. Поэтому предварительные

расчеты на основе математических моделей, качественно и адекватно описывающих движения такой сложной механической системы, как расщепленная фаза, имеют большое значение и оправдывают усилия их разработчиков.

В этой связи необходимо сослаться на цикл работ, проведенных в Белорусском политехническом институте [Стрелюк, Сергей, 80–90-тые годы], в МГТУ им. Н.Э. Баумана [Дейкина, 2003; Иванова, 2013].

В данной работе представлены математические модели, построенные на основе «линейного» подходе к проблеме колебаний воздушных проводов: считаем, что сравнительно с длинами пролетов ВЛ (более 100 м), колебания провода (амплитуды  $\sim 1\text{--}5$  м) можно считать «малыми». Такой подход, во многом, позволяет выявить качественную картину движений и свойств расщепленной фазы, а отдельные детали можно прояснить, используя упомянутые выше программные комплексы.

### Список литературы

1. Александров Г.Н. 1989. Установки сверхвысокого напряжения и охрана окружающей среды. Л.: Энергоатомиздат, 360.
2. Астахов Ю.Н., Постолатий В.М., Чеботарь Ф.И., Яковлев Л.В. 1989. Оценка потерь энергии колебаний в расщепленной фазе при изменении шага расщепления ВЛ 500 кВ. Управляемые электропередачи. Вып.1, Кишинев: Штиинца: 114–124.
3. Ванько В.И., Бекметьев Р.М., Виноградов А.А., Ширинских Н.В. 1987. Экспериментальное исследование колебаний проводов расщепленной фазы ЛЭП. Изв. вузов. Энергетика, N2: 44–47.
4. Ванько В.И., Яковенко М.Г., Виноградов А.А., 1989. Линейная вязкоупругая модель колебаний провода в подпролете расщепленной фазы. Изв. вузов. Энергетика, N10: 16–21.
5. Ванько В.И. 1991. Колебания расщепленной фазы проводов ЛЭП. Изв. вузов. Энергетика, N2: 11–16.
6. Ванько В.И., Зайцев А.А., Галкин С.В. 1996. Об оптимальной расстановке распорок-гасителей в пролете расщепленной фазы ЛЭП. Изв. РАН. Энергетика, N5: 89–97.
7. Ванько В.И., Платонова И.А. 1998. Сравнительный анализ свободных колебаний расщепленных фаз применительно к компактным ЛЭП. Изв. вузов и энергетических объединений СНГ. Энергетика, № 5: 27–33.
8. Дейкина Е.С. 2003. Оптимальное проектирование расщепленной фазы проводов ЛЭП. Материалы VI межд. конф. по математическому моделированию. СПб: МАП ВШ: 67–70.
9. Иванова О.А. 2013. Математическое моделирование аэроупругих колебаний провода линии электропередачи: Дис. канд. физ.-мат. наук. М., 2013: 142 с.
10. Канторович Л.В., Крылов В.И. 1952. Приближенные методы высшего анализа. М.: ГИТТЛ, 695.
11. Миткевич В.Ф. 1910. Явление тихого разряда в высоковольтных воздушных линиях. Электричество, N7: 185–200.
12. Михлин С.Г. 1957. Вариационные методы в математической физике. М.: ГИТТЛ, 476.

13. Проектирование ЛЭН сверхвысокого напряжения, 1983. Под ред. Г.Н. Александрова и Л.Л. Петерсона. Л.: Энергоатомиздат, 386.
14. Работнов Ю.Н. 2014. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 752.
15. Сергей И.И., Виноградов А.А. 1998. Численное моделирование эксплуатационных статических и динамических режимов проводов и кабелей. Электрические станции, N1: 41–49.
16. Стрелюк М.И., Сергей И.И., Вотяков А.Г. 1991. Численный метод расчета пляски проводов воздушных линий сверхвысокого напряжения. Изв. вузов и энергетических объединений СНГ, N6: 8–12.
17. Calculation of span lengths for 345 kV lines 4-bundle spacer-dampers. Technical specifications, 1993, March. Korea, Seoul: KUNHWA Company, 41 p.
18. Hearnshow D. 1974. Spacer-dampers performance – a function of in-space positioning . IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS 93, N5: 1289–1309.
19. Hearnshow D. 1975. Optimization of system performance for spacer-dampers. IEEE Power Eng. Soc. Conf. papers. Summer Meeting. San-Francisco, vol. A75, N490-0: 9 p.
20. Recommended in-span positions for metallic spacer–dampers (Tables of positions of DUNLOP spacer-dampers for various span lengths), 1969. England: The DUNLOP Company Ltd., Polymer Engineering Division: 16 p.
21. Rowbottom M.D., Richards D.I. 1973. Mechanical and aerodynamical problems associated with future overhead lines. Phil. Trans. Soc. London, vol. A275: 181–188.

### References

1. Alexandrov G.N. 1989. Ultra-high voltage installations and environmental protection. L.: Energoatomizdat, 360.
2. Astakhov Yu.N., Postolatii V.M., Chebotar' F.I., Yakovlev L.V. 1989. Estimation of energy losses of oscillations in the split phase when the splitting step changes VL 500 kV. Power transmission control. 1, Kishinev: Shtiintsa: 114–124.
3. Van'ko V.I., Bekmet'yev R.M., Vinogradov A.A., Shirinskikh N.V., 1987. Experimental study of vibrations of wires of the split phase LEP. Izv. VUZov. Energetika, N2: 44–47.
4. Van'ko V.I., Yakovenko M.G., Vinogradov A.A. 1989. Linear viscoelastic model of wire oscillations in split-phase sub-span. Izv VUZov. Energetika, N10: 16–21.
5. Van'ko V.I. 1991. Oscillations of split-phase of the LEP wire. Izv VUZov. Energetika, N2: 11–16.
6. Van'ko V.I., Zaitsev A.A., Galkin S.V. 1996. On the optimal arrangement of damper struts in the split phase span LEP. Izv. RAN. Energetika, N5: 89–97.
7. Van'ko V.I., Platonova I.A. 1998. Comparative analysis of free oscillations of split phases in relation to compact LEP. Izv. VUZov i energeticheskikh ob'yedinenii SNG. Energetika, № 5: 27–33.
8. Deikina E.S. 2003. Optimal projection of LEP wire split phase. Matherials of VI Int. Conf. on mathematical modelling. SPb: MAN VSh: 67–70.



9. Ivanova O.A. 2013. Mathematical modelling of air elastic vibrations of power line wire: Thesis. M., 142 s.
10. Kantorovich L.V., Krylov V.I. 1952. Approximate methods of higher analysis. M.: GITTL, 695.
11. Mitkevich V.F. 1910. The phenomenon of quiet discharge of high voltage overhead lines. Electricity, N7: 185–200.
12. Mikhlin S.G. 1957. Variational methods in Mathematical physics. M.: GITTL, 476.
13. Progection of super high voltage LEP. 1983. Eds. G.N. Alexandrova and L.L.Petersona. L.: Energoatomizdat, 386.
14. Rabortnov Yu.N. 2014. Creep of structural elements. M.: Nauka, 752.
15. Sergei I.I., Vinogradov A.A. 1998. Numeral modelling operational static and dynamic regimes of wires and cables'. Electrical stations, N1: 41–49.
16. Strelyuk M.I., Sergei I.I., Votyakov A.G. 1991. Numerical method of calculation of dancing of wires of air lines super high voltage. Izv. VUZov i energeticheskikh ob'yedinenii SNG, N6: 8–12.
17. Calculation of span lengths for 345 kV lines 4-bundle spacer-dampers. Technical specifications, 1993, March. Korea, Seoul: KUNHWA Company, 41 p.
18. Hearnshow D. 1974. Spacer-dampers performance - a function of in-space positioning . IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS 93, N5: 1289 – 1309.
19. Hearnshow D. 1975. Optimization of system performance for spacer-dampers. IEEE Power Eng. Soc. Conf. papers. Summer Meeting. San-Francisco, vol. A75, N490-0: 9 p.
20. Recommended in-span positions for metallic spacer-dampers (Tables of positions of DUNLOP spacer-dampers for various span lengths), 1969. England: The DUNLOP Company Ltd., Polymer Engineering Division: 16 p.
21. Rowbottom M.D., Richards D.I. 1973. Mechanical and aerodynamical problems associated with future overhead lines. Phil. Trans. Soc. London, vol. A275: 181–188.

**Ссылка для цитирования статьи  
For citation**

Ванько В.И. 2019. Математическое моделирование движений расценленного провода. Часть I: Движение «в целом». Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 541–554. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-541-554.

Vanko V.I. 2019. Mathematical modeling of split wire motions. Part I: Motion «in the whole». Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 541–554 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-541-554.