УДК 004.94
DOI 10.18413/2411-3808-2019-46-4-710-716

О НЕЙРОСЕТЕВОМ ПОДХОДЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ABOUT NEURAL NETWORKS TO SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS

А.В. Ломакин
A.V. Lomakin

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: lomakin_a@bsu.edu.ru

Аннотация
Рассматривается задача решения уравнений математической физики с использованием нейронных сетей. Приведены существующие подходы к решению уравнений нейросетевым методом. Разработана универсальная архитектура нейронной сети, имеющая преимущества по сравнению с существующими подходами. Приведены данные о погрешности и скорости вычислений. Приведены зависимости погрешности вычислений и их скорости от количества нейронов. Проанализировано время выполнения на CPU и GPU в качестве последовательного и параллельного алгоритма. Разработана ячеистая нейронная сеть с заранее синтезированным параллельным алгоритмом, позволяющая без изменения архитектуры решать целый класс дифференциальных уравнений.

Abstract
Considered the problem of solving equations of mathematical physics using neural networks. Given existing approaches to solving the equation by the neural network method. A universal neural network architecture that has advantages over existing approaches has been developed. Developed neuroequations, feedback weights, proved assertions about the output values of the neurons. Activation functions and weight feedback neurons are changed corresponding to the boundary conditions, depending on the type of boundary conditions. Given dependence of error of calculations on the number of neurons. This dependence represented by the empirical expression. Analyzed calculation time on GPU and CPU as parallel and sequential algorithms. Proposed lattice neural network without changing the architecture allows, with appropriate setting of weighting coefficients and setting boundary conditions to obtain the solution some differential equations with the error defined by the number of neurons of the network, with a parallel algorithm actually synthesized.

Ключевые слова: ячеистая нейронная сеть, дифференциальные уравнения, погрешность.
Keywords: lattice neural network, differential equations, calculations error.

Дифференциальные уравнения широко используются при описании динамических свойств многих предметных областей при решении теоретических и прикладных задач математики, физики и техники. Это связано с тем, что во многих случаях не представляется возможным установить функциональные зависимости между искомыми и заданными переменными величинами. Но при этом путем математического описания физических свойств реальных процессов удается получить дифференциальное уравнение, позволяющее с достаточной степенью адекватности описать характер протекания конкретного процесса при условиях, определяемых известными временными, частотными и другими характеристиками процесса. Все это предопределяет существенное прикладное значение

дифференциальных уравнений как инструмента исследования при решении прикладных задач естествознания и техники. Они широко используются в механике, астрономии, физике, электротехнике, а также при описании различных динамических процессов в химии и биологии.

Задание произвольных краевых условий является важным проблемным вопросом при определении рациональных подходов для построения расчетных схем численного решении рассматриваемого класса уравнений [Murray et al., 1992]. Рассмотрим особенности решения указанной проблемы для двух методов: конечных элементов и конечных разностей. При применении первого метода осуществляется включение краевых условий непосредственно в сами получаемые уравнения. Для второго метода при определении краевых условий необходимо задать условия усложнения сетки дискретизации. Это в свою очередь приводит к вводу дополнительных вспомогательных элементов сетки для определения значения производной искомой функции через выражение, записанное в конечных разностях. Все это способствует тому, что количество узлов становится неприемлемо большим, что можно сказать и о размерности получаемой системы линейных алгебраических уравнений [Корсунов и др., 2010].

В настоящее время существуют множество задач, решаемых при помощи нейронных сетей. Таковыми являются задачи распознавания голоса и изображений, численного решения дифференциальных уравнений и моделирования процессов [Кормен и др., 2005]. Использование нейросетевых методов для решения дифференциальных уравнений несет в себе целый ряд преимуществ. Так, выбрав соответствующую архитектуру, можно добиться решения целого класса уравнений с погрешностью, не превышающей классические методы решения. Существует класс задач, где нахождения решения требует высокой точности, что приводит к высоким вычислительным затратам и увеличению времени нахождения решения. Для решения многих задач помимо высокой точности требуется высокая скорость вычисления. Прежде всего, это относится к моделированию процессов, где параметры процесса или окружающей среды непрерывно изменяются. Поэтому несомненным преимуществом использования нейронных сетей является также их структура, в которой параллелизм заложен изначально, что позволяет не тратить время на разработку соответствующего параллельного алгоритма и дает выигрыш в скорости вычислений [Lagaris et al., 1998].

В настоящее время разработки нейронных сетей для решения задачи численного решения дифференциальных уравнений ведутся по трем основным направлениям: на основе метода невязок, на основе применения полносвязной нейронной сети с симметричной матрицей и на основе сетей с особой структурой [Корсунов, Ломакин, 2014].

Стоит заметить, что последний способ наиболее сложен в реализации, однако захватывает наибольшую область решаемый задач и обладает большей универсальностью по сравнению с другими подходами.

В таблице 1 рассмотрены вышеперечисленные направления разработки нейронных сетей.

Рассмотренный метод с использованием нейронной сети со специальной архитектурой предполагает, что область Q является прямоугольной. Данное условие может не выполняться при решении ряда задач. При этом может потребоваться решение поставленной задачи при крупном шаге сетки. Это необходимо для обеспечения процесса обучения персептрона. Все это вызывает необходимость применения одного из классических методов решения дифференциальных уравнений вместе с примененным ранее [Korsunov, Lomakin, 2013].

На основе анализа основных свойств рассмотренных трех основных подходов разработана новая архитектура, предназначенная для получения численного решения ряда дифференциальных уравнений. Опишем основные особенности разработанной ячеистой нейросети.

Таблица 1
Table 1

Направления разработки нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений
Directions of development of neural networks for solving differential equations

На основе метода невязок	Применение полносвязной нейронной сети с симметричной матрицей на основе архитектуры Хопфилда	Применение нейронных сетей со специальной структурой
Решение представлено набором простых базисных функций. Отдельные виды сплайнов могут быть получены с помощью взаимного наложения кусочно-линейных активационных функций. Форма получаемого решения делает возможным получение архитектуры нейронной сети прямого распространения по полученному решению. Количество базисных функций при применении рассматриваемого подхода достаточно большое и зависит от числа узлов. Неэффективен по времени по сравнению с другими методами, что в полной мере проявляется для задач большой размерности [Moller, 1993].	Решение получается обращением матрицы на основе указанного типа нейронной сети, при этом данная матрица получена на основе применения одного из методов: конечных разностей или конечных элементов. Обучение нейросети с архитектурой Хопфилда означает минимизацию энергетической функции. Решение системы уравнений происходит при обучении нейронной сети, при этом энергетическая функция соответствует невязке решения системы линейных уравнений. С точки зрения вычислительной сложности наибольший вклад вносит этап минимизации энергетической функции. Специализированность решения приводит к тому, что полученная и обученная нейронная сеть применима только для решения конкретной системы уравнений. Для обучения сети данного типа нужны существенные временные затраты.	Получение аналитического решения задачи. Данное решение является приближенным и представлено как суперпозиция двух функций. Первая функция задает краевые условия, зависящие от конкретных особенностей рассматриваемой задачи. Вторая обладает таким свойством, что на границе области обращается в ноль. Данная функция частично задается предлагаемой для решения уравнения нейронной сетью. В итоге данный подход предполагает получение дифференцируемого аналитического решения.

В некоторой замкнутой области Q определим N узлов с координатами ri, .^, $Гn$. Данные узлы дискретизации формируют n-мерную однородную прямоугольную сетку, имеющую шаг hi по i-й координате. Временной промежуток разделим на m одинаковых по длине отрезков длиной m.

Определим структуру предлагаемой нейронной сети в виде m прилегающих друг к другу слоев, соответствующих определенному моменту времени. Каждый слой представлен набором нейронов в виде n-мерной прямоугольной решетки, при этом заданы линейные функции активации нейронов $f(x) = x$.

Зададим координаты отдельных нейронов внутри отдельного слоя в виде (ri, _, *Гп)*. При этом можно определить координаты узла дискретизации для рассматриваемых нейронов как (ri^i, _, rnhn). Слою *i, i* е *(0, m-1)* соответствует аналогичный момент времени, обозначаемый *iz*. Для каждого нейрона определим число связей. Количество связей с находящимися рядом нейронами внутри слоя равно 2п. Кроме этого имеется одна обратная связь, а также две связи с нейронами, имеющих аналогичный номер в предыдущем и последующем слоях. Очевидно, что у нейронов первого и последнего слоя будут отсутствовать соответственно связи с нейронами нижнего и верхнего уровня.

Структура сети приведена на рисунке 1. В узлах кубической решетки отмечены нейроны.

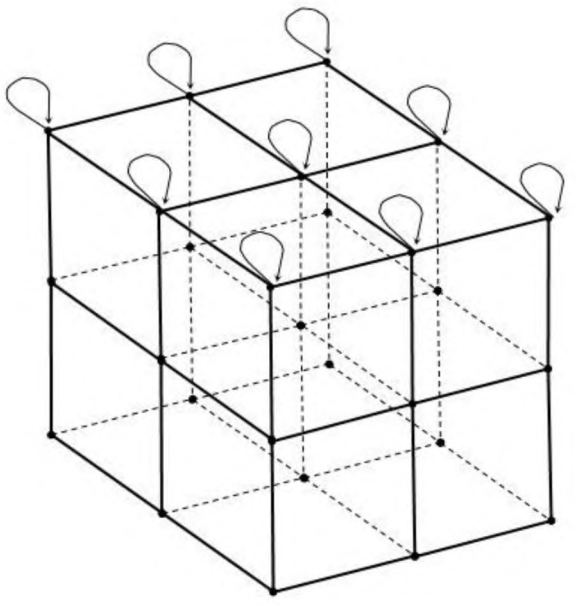

Рис. 1. Структура ячеистой нейронной сети
Fig. 1. The structure of lattice neural network

Для подтверждения адекватности решения дифференциальных уравнений нейронной сетью проведен вычислительный эксперимент на примере уравнения Пуассона в заданной прямоугольной области со следующими граничными условиями:

$$f(P) = \begin{cases} 0{,}75y, P \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ \text{з}(*\cdot 2) \blacksquare P \wedge \Gamma 2 \wedge y 4 \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\text{Ti: } \begin{cases} X = -4 \\ i < y < 7 \\ \wedge 2{:}[- \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 \\ 4 < X < O \wedge 3{:} \end{cases} \quad \begin{cases} \wedge = 0 \\ (1 < y < 7 \\ \wedge 4' \end{cases} \quad \begin{cases} \wedge = 7 \\ 4 < X < O \end{cases}$$

Цель эксперимента - установление точности решения относительно аналитического в зависимости от числа нейронов, а также быстродействия на *CPU* и *GPU*. При проведении эксперимента использовалось разработанное на *Microsoft Visual C#* приложение; нейронная сеть соответствовала равномерной сетке дискретизации. Погрешность решения сравнивалась с известным аналитическим решением уравнения [Корсунов, Ломакин, 2014]. В таблице 2 приведены данные экспериментов с различным количеством нейронов.

Таблица 2
Table 2

Погрешность вычислений в зависимости от числа нейронов
Calculation error depending of number of neurons

Число нейронов	Погрешность
25	0.0002
64	0.00002
100	10^{-6}
10000	10^{-11}
1000000	10^{-17}

График экспериментально установленной зависимости погрешности решения уравнений от числа нейронов приведен на рисунке 2.

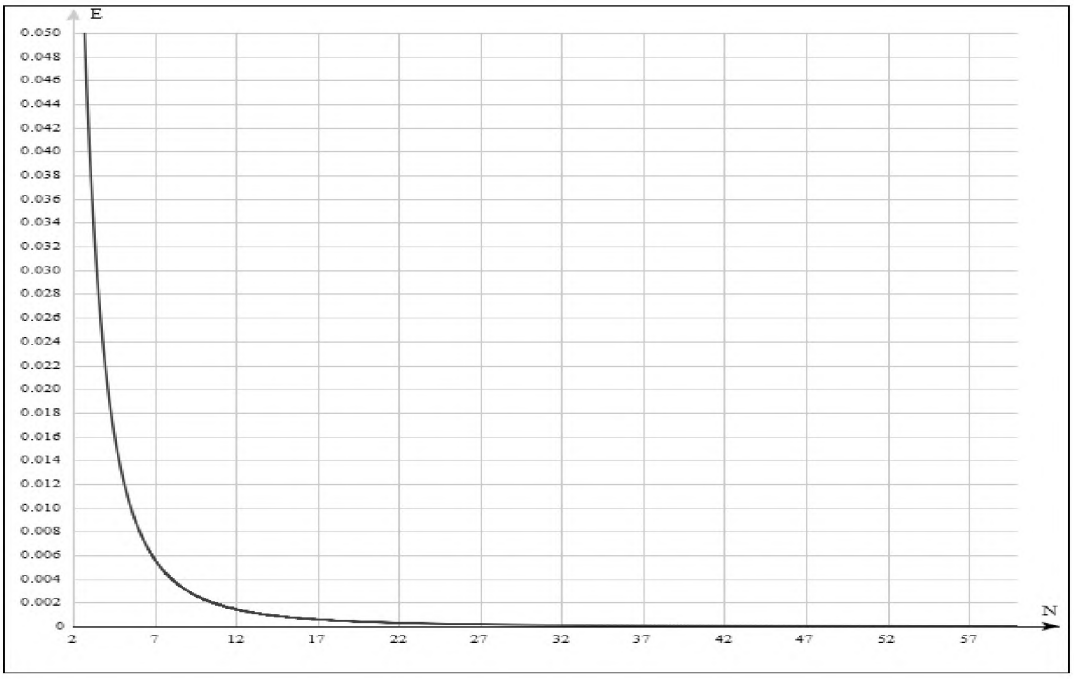

Рис. 2. График зависимости погрешности вычислений от числа нейронов
Fig. 2. Graph of dependence of calculation error and number of neurons

Зависимость представляется эмпирическим выражением:

$$\text{й} = \frac{\ln W}{T_{N^4}} \quad (2)$$

На рисунке 3 представлен график, показывающий эффективность выполнения алгоритма последовательно на CPU и параллельно на GPU.

Таким образом, использование ячеистой нейронной сети с сохранением архитектуры позволяет получить решение класса дифференциальных уравнений в частных производных с погрешностью, задаваемой количеством нейронов сети, меняя лишь настройку весовых коэффициентов и краевых условий, с фактически синтезированным параллельным алгоритмом.

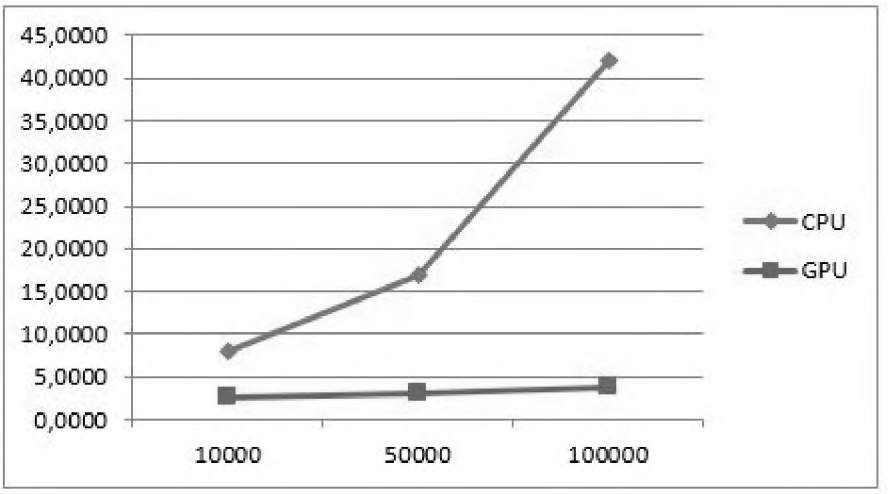

Рис. 3. Время выполнения алгоритма на CPU и на GPU
Fig. 3. CPU and GPU calculation speed

Список литературы

1. Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К. 2005. Алгоритмы: построение и анализ. Под ред. И. В. Красикова. 2-е изд. М., Вильямс: 57-64.

2. Корсунов Н.И., Скандаков А.А., Слободюк А.А. 2010. Аналитико-численный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика, 13(84): 72-76.

3. Корсунов Н.И. 2010. Решение систем линейных алгебраических уравнений с использованием нейросетевых информационных технологий. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика, 1(72): 62-65.

4. Корсунов Н.И., Ломакин А.В. 2014. Моделирование процессов, описываемых волновым дифференциальным уравнением, с использованием нейронных сетей. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика, 15(186): 103-107.

5. Корсунов Н.И., Титов А.И., Красильников В.В. 2010. Повышение эффективности защиты информации модификацией шифра Вижинера. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика, 7(78): 171-175.

6. Культин Н. 2007. C# в задачах и примерах СПб., БХВ-Петербург, 241.

7. Hagan M.T., Demuth H.B., Beale M.H. 1996. Neural Network Design, Boston, MA: PWS Publishing.

8. Hagan M.T., Menhaj M. 1994. Training feedforward networks with the Marquardt algorithm. IEEE Transactions on Neural Networks, 5(6): 989-993,

9. Korsunov N., Mikhelev V., Lomakin A. 2013. Application of Lattice Neural Networks for Modeling of Stationary Physical Fields. Proceedings of the 2013 IEEE 7th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems, 1, 369-372.

10. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. 1998. Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations. IEEE Transactions on Neural Networks. 9(5): 422-448.

11. Lawrence, Introduction to Neural Networks, California Scientific Software Press, 1994.

12. Lee H. and Kang I. 1990. Neural algorithms for solving differential equationsю Journal of Computational Physics, 91: 110-117.

13. Moller M.F. 1993. A scaled conjugate gradient algorithm for fast supervised learning. Neural Networks. 6, 525-533,

14. Murray R., Neumerkel D., Sbarbaro D. 1992. Neural Networks for Modeling and Control of a Non-linear Dynamic System," Proceedings of the 1992 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 404-409.

15. Nguyen D., Widrow B. 1990. Improving the learning speed of 2-layer neural networks by choosing initial values of the adaptive weights. Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks. 3, 21-26,

16. Wang L., Mendel J.M. 1990. Structured trainable networks for matrix algebra. IEEE Int. Joint Conference on Neural Networks. 2: 125-128.

References

1. Kormen, T., Leyzerson, CH., Rivest, R., Shtayn, K. 2005. Algoritmy: postroyeniye i analiz [Algorithms: construction and analysis]. Pod re d. I. V. Krasikova. 2-ye izd. M., Vil'yams: 57-64.

2. Korsunov N.I., Skandakov A.A., Slobodyuk A.A. 2010. Analytical-numerical method for solving systems of linear algebraic equations. Scientific statements of Belgorod State University. Ser. Story. Political science. Economy. Information technology, 13(84): 72-76. (in Russian)

3. Korsunov N.I. 2010. Solution of linear algebraic equations using neural network information technologies. Scientific statements of Belgorod State University. Ser. Story. Political science. Economy. Information technology, 1(72): 62-65. (in Russian)

4. Korsunov N.I., Lomakin A.V. 2014. Modeling of processes described by a wave differential equation using neural networks. Scientific statements of Belgorod State University. Ser. Story. Political science. Economy. Information technology, 15(186): 103-107. (in Russian)

5. Korsunov N.I., Titov A.I., Krasil'nikov V.V. 2010. Improving the efficiency of information protection by modifying the Viginer code. Scientific statements of Belgorod State University. Ser. Story. Political science. Economy. Information technology, 7(78): 171-175. (in Russian)

6. Kul'tin N. 2007. C# v zadachakh i primyerakh [C # in problems and examples]. SPb., BKH V-Peterburg, 241.

7. Hagan M.T., Demuth H.B., Beale M.H. 1996. Neural Network Design, Boston, MA: PWS Publishing.

8. Hagan M.T., Menhaj M. 1994. Training feedforward networks with the Marquardt algorithm. IEEE Transactions on Neural Networks, 5(6): 989-993,

9. Korsunov N., Mikhelev V., Lomakin A. 2013. Application of Lattice Neural Networks for Modeling of Stationary Physical Fields. Proceedings of the 2013 IEEE 7th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems, 1, 369-372.

10. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. 1998. Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations. IEEE Transactions on Neural Networks. 9(5): 422-448.

11. Lawrence, Introduction to Neural Networks, California Scientific Software Press, 1994.

12. Lee H. and Kang I. 1990. Neural algorithms for solving differential equationsю Journal of Computational Physics, 91: 110-117.

13. Moller M.F. 1993. A scaled conjugate gradient algorithm for fast supervised learning. Neural Networks. 6, 525-533,

14. Murray R., Neumerkel D., Sbarbaro D. 1992. Neural Networks for Modeling and Control of a Non-linear Dynamic System," Proceedings of the 1992 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 404-409.

15. Nguyen D., Widrow B. 1990. Improving the learning speed of 2-layer neural networks by choosing initial values of the adaptive weights. Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks. 3, 21-26,

16. Wang L., Mendel J.M. 1990. Structured trainable networks for matrix algebra. IEEE Int. Joint Conference on Neural Networks. 2: 125-128.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Ломакин А.В. 2019. О нейросетевом подходе решения дифференциальных уравнений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 46 (4): 710-716. DOI 10.18413/2411-3808-2019-46-4-710-716

Lomakin A.V. 2019. About neural networks to solving differential equations. Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Information technologies. 46 (4): 710-716 (in Russian). DOI 10.18413/2411-3808-2019-46-4-710-716