*Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 1. С. 13–20.*
*Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 1. P. 13–20.*

УДК 512.533.23 DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-13-20
MSC 05C10
Оригинальное исследование

# Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения

**Соломатин Д. В.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

Омский государственный педагогический университет,
Россия, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, 14
solomatin_dv@omgpu.ru

**Аннотация.** Доказаны характеристические свойства внешнепланарности и обобщенной внешнепланарности графов Кэли прямых произведений циклических полугрупп в терминах копредставлений. Основная идея доказательства теорем, приведенных в статье, заключается в следующем: если обнаруженные в результате исследования условия выполнены, то полугруппа допускает обобщенную внешнеплоскую [соответственно, внешнеплоскую] укладку её графа Кэли (то есть такую укладку, при которой каждое ребро принадлежит одной грани хотя бы одной из своих вершин, и ребра не пересекаются в плоскости) [соответственно, такую укладку, при которой все вершины принадлежат одной грани, а ребра не пересекаются в плоскости]; обратно, по закону контрапозиции, если найденные условия не выполнены, то указывается подграф, гомеоморфный одной из запрещенных конфигураций. Рассуждения ведутся по аналогии с исследованиями полугрупп, допускающих планарные графы, при этом запрещенные конфигурации меняются на новые, в силу критерия Чартрэнда–Харари и Седлачека.

**Ключевые слова:** полугруппа, граф Кэли полугруппы, внешнепланарный граф, прямое произведение

**Для цитирования:** Соломатин Д. В. 2024. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 13–20.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-13-20

---

Original Research

# Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Outerplanar Cayley Graphs and Their Generalizations

**Denis V. Solomatin**
(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev*)

Omsk State Pedagogical University,
14 Tukhachevsky emb., Omsk, 644099, Russia
solomatin_dv@omgpu.ru

**Abstract.** The characteristic properties of outerplanarity and generalized outerplanarity of Cayley graphs of direct products of cyclic semigroups are proved in terms of copresentations. The main idea of the proof of the theorems given in the article is the following: if the conditions discovered as a result of the study are met, then the semigroup admits a generalized outer-plane [respectively, outer-plane] layout of its Cayley graph (that is, such a layout in which each edge belongs to one face of at least one of its vertices, and the edges do not intersect in the plane) [accordingly, such a layout in which all the vertices belong to the same face, and the edges do not intersect in the plane]; conversely, according to the law of contraposition, if the found conditions are not met, then a subgraph is indicated that is homeomorphic to one of the forbidden configurations. The reasoning is carried out by analogy with the study of semigroups admitting planar graphs, while the forbidden configurations are changed to new ones, due to the Chartrand-Harari and Sedlacek criterion.

**Keywords:** Semigroup, Cayley Graph, Outerplanar Graph, Direct Product

**For citation:** Solomatin D. V. 2024. Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Outerplanar Cayley Graphs and Their Generalizations. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 13–20. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-13-20

---

**1. Введение.** Прямые произведения циклических полугрупп занимают умы ученых долгое время, привлекая своей простотой. Данная статья, выполненная в русле проблематики исследования полугрупп с планарными графами Кэли, продолжая цикл работ, начатый в [1, 2, 3], содержит обобщение и систематизацию накопленного материала о прямых произведениях циклических полугрупп, допускающих внешнепланарные и обобщенные внешнепланарные графы Кэли, а также ряд открытых вопросов для проведения исследований, с той целью, чтобы читателю предоставить возможность в краткие сроки освоить используемую при доказательствах технику и приступить к творческой самореализации.

**2. Предварительные сведения.** Основная идея доказательства теорем, приведенных в статье, заключается в следующем: если обнаруженные в результате исследования условия выполнены, то полугруппа допускает обобщенную внешнеплоскую [соответственно, внешнеплоскую] укладку её графа Кэли (то есть такую укладку, при которой каждое ребро принадлежит одной грани хотя бы одной из своих вершин, и ребра не пересекаются в плоскости) [соответственно, такую укладку, при которой все вершины принадлежат одной грани, а ребра не пересекаются в плоскости]; обратно, по закону контрапозиции, если найденные условия не выполнены, то указывается подграф, гомеоморфный одной из запрещенных конфигураций. Рассуждения ведутся по аналогии с исследованиями полугрупп, допускающих планарные графы, при этом запрещенные конфигурации меняются на новые, в частности, так как в силу критерия Чартрэнда – Харари [4] граф внешнепланарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_4$ или $K_{2,3}$, представленных на Рис.1.

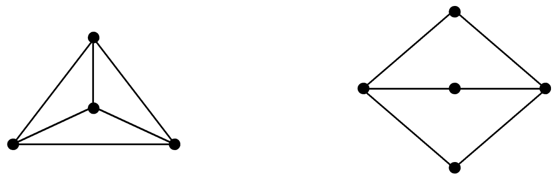

Рис. 1. Графы $K_4$ и $K_{2,3}$
Fig. 1. Graphs $K_4$ and $K_{2,3}$

Для полноты изложения перечислим основные определения:

**Определение 2.1.** *Граф (неориентированный граф)* – это пара $(V,\ E)$, где $V$ – конечное непустое множество *вершин*, $E$ – множество *ребер*, являющееся произвольным подмножеством множества неупорядоченных пар вершин графа.

**Определение 2.2.** *Ориентированный граф* – это пара $(V,\ A)$, где $V$ – конечное непустое множество *вершин*, $A$ – множество *дуг*, являющееся произвольным подмножеством декартова квадрата множества вершин графа.

**Определение 2.3.** Пусть $S$ полугруппа, $X$ – множество порождающих её элементов. Через $Cay(S,\ X)$ традиционно [5] обозначим *граф Кэли* полугруппы $S$ относительно $X$. Граф $Cay(S,\ X)$ состоит из множества вершин $S$ и множества помеченных дуг – всевозможных троек $(a, x, b)$, где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$. Заметим, что в данном случае граф Кэли является ориентированным мультиграфом с реберной раскраской. Вершины графа обычно изображаются точками на плоскости, а дуга $(a, x, b)$ – линией, направленной от $a$ к $b$ и помеченной элементом $x$. Такое понимание графа Кэли не противоречит классическому определению графа Кэли из [6], введённому для групп.

**Определение 2.4.** *Основой* ориентированного мультиграфа называем граф, полученный из данного графа удалением петель и заменой всех дуг, соединяющих две вершины одним ребром, соединяющим эти вершины. Ориентированный мультиграф называем планарным, если его основа является планарным графом.

**Определение 2.5.** Будем говорить, что *полугруппа* $S$ *допускает планарный граф Кэли*, если для некоторого множества $X$ основа $SCay(S,\ X)$ графа $Cay(S,\ X)$ является планарным графом.

Планарный граф называют внешнепланарным, если существует такая его плоская укладка, что каждая вершина графа принадлежит одной и той же грани.

Дополнительно общеупотребительные понятия теории графов приводить не будем; их определения можно найти в [7, 8]. Напомним лишь, что обобщенный внешнепланарный граф – это планарный граф, который можно уложить на плоскости таким образом, что каждое ребро обладает хотя бы одной концевой вершиной на границе одной и той же грани [9]. Обобщенные внешнепланарные графы ввел в рассмотрение Иржи Седлачек, это понятие сыграло важную роль при изучении локальных свойств графов [10]. Кроме того, Седлачек нашел характеризацию обобщенных внешнепланарных графов в терминах запрещенных подграфов, а именно: граф является обобщенным внешнепланарным тогда и только тогда, когда не содержит подграфов, гомеоморфных одному из графов, изображенных ниже на Рис.2. Справедливости ради следует отметить, что прежде существовали и другие попытки обобщения внешнепланарных графов. Например, в [11] вводятся $W$-внешнепланарные графы, в случае, когда внешней грани принадлежат вершины из непустого множества вершин $W$. Кроме того, интересны $k$-внешнепланарные графы [12], то есть такие планарные графы, которые имеют плоское вложение, вершины которого принадлежат не более чем $k$ концентрическим слоям. Позднее стал известен линейный алгоритм распознавания максимальных обобщенных внешнепланарных графов [13], что открыло дорогу публикациям результатов последующих исследований.

Заметим, что по определению всякий внешнепланарный граф является обобщенным внешнепланарным, обратное не верно. Существуют примеры графов, каждое ребро которых хотя бы одной из своих вершин принадлежит внешней грани, но при этом не являющиеся внешнепланарными. В частности, такие графы представлены выше на Рис.1.

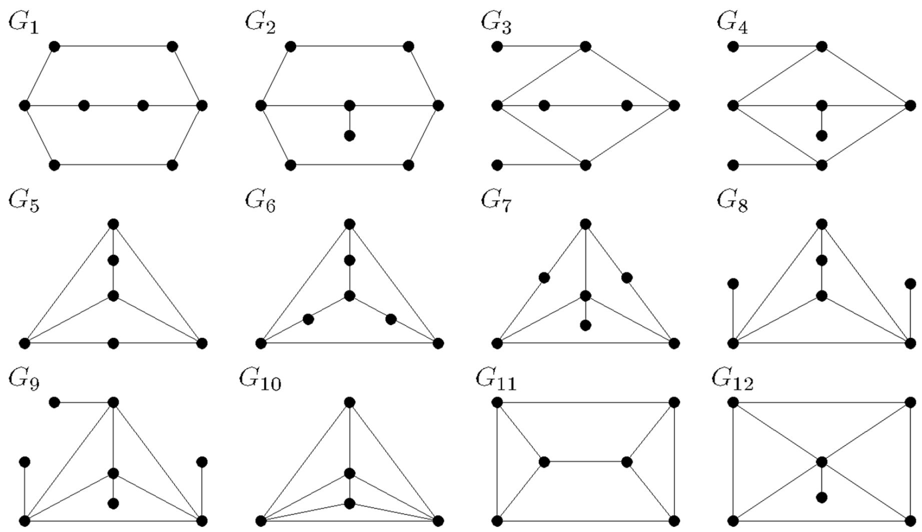


Рис. 2. Графы Седлачека
Fig. 2. Graphs by Sedláček

Сформулируем основную Теорему из [14] в виде следующей леммы.

**Лемма.** *Конечная полугруппа $S$, являющаяся прямым произведением неодноэлементных циклических полугрупп, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, *где для натуральных чисел $r$, $m$, $h$ и $t$ выполняется одно из ограничений*:

1.1) $r = 1, h = 1,\quad$ НОД$(m, t) < 3$;
1.2) $r = 1, m = 2, t < 3$;
1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;
1.4) $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$;
1.5) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, *где для натуральных чисел $r$, $m$, $h$, $t$, $k$, $l$ выполняется одно из следующих ограничений*:

2.1) $r = 1, m = 2, h = 1, t = 2, k = 1, l = 2$;
2.2) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;
2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;
2.4) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, *где для натуральных чисел $r$ и $m$ выполняется одно из следующих ограничений*:

3.1) $r = 1, m = 2$;
3.2) $r = 2, m < 3$;
3.3) $r = 3, m = 1$.

**3. Основной результат.** Основным результатом настоящей статьи являются следующие две теоремы, содержащие характеристические свойства полугрупп, допускающих внешнепланарные и обобщенные внешнепланарные графы Кэли. Заметим, что требование неодноэлементности множителей в формулировках теорем призвано лишь обеспечить конечное число множителей, так как прямое произведение всякой полугруппы $S$ на одноэлементную циклическую полугруппу изоморфно исходной полугруппе $S$.

**Теорема 3.1.** *Конечная полугруппа $S$, являющаяся прямым произведением неодноэлементных циклических полугрупп, допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий*:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, *где для натуральных чисел $r$, $m$, $h$ и $t$ выполняется одно из ограничений*:

1.1) $r = 1, h = 1,$ (НОД$(m, t) = 1\quad$ или $\quad m = t = 2$);
1.2) $r = 1, m = 2, (h < 4, t = 1\quad$ или $\quad h = t = 2)$;
1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;
1.4) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, *где для натуральных чисел $r$, $m$, $h$, $t$, $k$, $l$ выполняется одно из следующих ограничений*:

2.1) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;
2.2) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;
2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, *при $n > 2$, где для натуральных чисел $r$ и $m$ выполняется одно из следующих ограничений*:

3.1) $r = 1, m = 2$;
3.2) $r = 2, m < 3$;
3.3) $r = 3, m = 1$.

**Теорема 3.2.** *Конечная полугруппа $S$, являющаяся прямым произведением неодноэлементных циклических полугрупп, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий*:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, *где для натуральных чисел $r$, $m$, $h$ и $t$ выполняется одно из ограничений*:

1.1) $r = 1, h = 1,$ (НОД$(m, t) = 1$ или $m = t = 2$); 1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t = 1$;
1.2) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1$;

2) $S \cong \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, *при* $n > 2$.

**Доказательство.** Для удобства одновременного доказательства Теорем 3.1 и 3.2 в едином стиле переформулируем условие Теоремы 3.2, изменив нумерацию пунктов таким образом, чтобы применяемые номера 2.1) и 3.2) соответствовали используемым в Лемме.

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел $r$, $m$, $h$ и $t$ выполняется одно из ограничений:
1.1) $r = 1, h = 1,$ (НОД$(m, t) = 1$ или $m = t = 2$); 1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t = 1$;
1.2) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел $r$, $m$, $h$, $t$, $k$, $l$ выполняется следующее ограничение:

2.1) $r = 2$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 2$, $l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, при $n > 2$, где для натуральных чисел $r$ и $m$ выполняется следующее ограничение:

3.2) $r = 2$, $m = 1$;

Из имеющегося в Лемме списка выберем полугруппы, графы Кэли которых обобщенные внешнепланарные или являются внешнепланарными, проанализировав каждую серию ограничений.

Достаточность указанных ограничений для планарности доказывается приведением плоской укладки графа Кэли. Так, при выполнении условий Теоремы 3.1, граф Кэли соответствующей полугруппы относительно минимального множества неразложимых образующих оказывается обобщенным внешнепланарным, а при выполнении условий Теоремы 3.2 – внешнепланарным.

В остальных случаях планарных графов, описанных Леммой, основа графа Кэли соответствующей полугруппы обнаруживает подграф гомеоморфный одной из запрещенных конфигураций. Рассмотрим каждый из оставшихся вариантов.

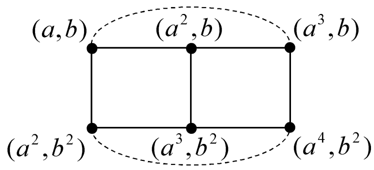


Рис. 3. Подграф графа $SCay(\langle a|a^{1+m} = a^1 \rangle \times \langle b|b^{1+2} = b^1 \rangle, \{(a, b), (a, b^2)\})$, гомеоморфный графу $G_{11}$, при $m \geq 3$
Fig. 3. Subgraph of the graph $SCay(\langle a|a^{1+m} = a^1 \rangle \times \langle b|b^{1+2} = b^1 \rangle, \{(a, b), (a, b^2)\})$, homeomorphic to the graph $G_{11}$, for $m \geq 3$

1.1) Полугруппа $S \cong \langle a \mid a^{1+m} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{1+t} = b^1 \rangle$ при НОД$(m, t)$=1 изоморфна циклической полугруппе, а основой графа Кэли циклической полугруппы является внешнепланарный и обобщенный внешнепланарный при любом числе вершин цикл. Кроме того, при НОД$(m, t)$=2, а $m = t = 2$ основу графа Кэли тоже формирует цикл, то есть граф Кэли полугруппы $S$ при выполнении условий Леммы допускает нужную укладку. Но уже при $m > 2$ или $t > 2$ в основе графа Кэли рассматриваемой полугруппы обнаруживается изображенный на Рис.3 подграф, гомеоморфный графу $G_{11}$, следовательно, граф не является даже обобщенным внешнепланарным, тем более внешнепланарным. Дальнейшее увеличение НОД$(m, t) \geq 3$ согласно Леммы приводит к потере планарности как таковой.

1.2) Для $h = 1$ и $t = 2$, либо $h = 2$ и $t = 1$ плоская укладка графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a \mid a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$ при допустимых Леммой значениях оказывается внешнепланарной. Но стоит увеличить $h+t \geq 4$, как тут же появляются в основе графа Кэли полугруппы подграфы $K_{2,3}$ и $G_5$, изображенные на Рис.4 и Рис.5 соответственно. Следовательно, в первом случае граф является обобщенно внешнепланарным, но не внешнепланарным, а во втором – ни тем, ни другим.

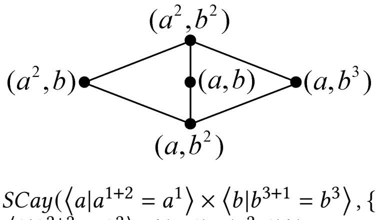


Рис. 4. Подграф графа $SCay(\langle a|a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b|b^{3+1} = b^3 \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$ и графа $SCay(\langle a|a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b|b^{2+2} = b^2 \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$, гомеоморфный графу $K_{2,3}$
Fig. 4. A subgraph of the graph $SCay(\langle a|a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b|b^{3+1} = b^3 \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$ and the graph $SCay(\langle a|a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b|b^{2+2} = b^2 \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$, homeomorphic graph $K_{2,3}$

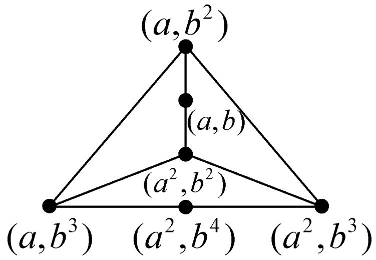


Рис. 5. Подграф графа $SCay(\langle a|a^{1+2}=a^1\rangle \times \left\langle b|b^{h+1}=b^h\right\rangle, \{(a,b),(a^2,b)\})$, при $h \geq 4$, и графа $SCay(\langle a|a^{1+2}=a^1\rangle \times \left\langle b|b^{h+2}=b^h\right\rangle, \{(a,b),(a^2,b)\})$, при $h \geq 3$, гомеоморфный графу $G_5$

Fig. 5. A subgraph of the graph $SCay(\langle a|a^{1+2}=a^1\rangle \times \left\langle b|b^{h+1}=b^h\right\rangle, \{(a,b),(a^2,b)\})$, for $h \geq 4$, and the graph $SCay(\langle a|a^{1+2}=a^1\rangle \times \left\langle b|b^{h+2}=b^h\right\rangle, \{(a,b),(a^2,b)\})$, for $h \geq 3$, homeomorphic graph $G_5$

1.3) В случаях, когда $h < 4$ и $t = 1$, либо $h = 1$ и $t = 2$, граф Кэли полугруппы $S \cong \langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \left\langle b|b^{h+t}=b^t\right\rangle$ допускает внешнеплоскую укладку, а в оставшихся по Лемме комбинациях, основа графа Кэли этой полугруппы обнаруживает подграфы $K_{2,3}$, изображенные на Рис.6 и Рис.7, следовательно, является обобщенной внешнепланарной, но не является внешнепланарной.

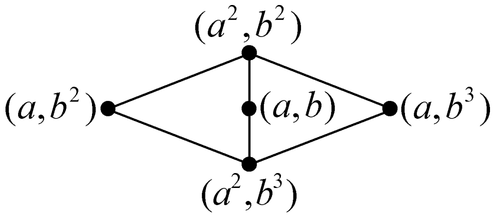


Рис. 6. Подграф графа $SCay(\langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b|b^{2+2}=b^2\rangle, \{(a,b),(a,b^2),(a,b^3),(a^2,b)\})$, гомеоморфный графу $K_{2,3}$

Fig. 6. Subgraph of the graph $SCay(\langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b|b^{2+2}=b^2\rangle, \{(a,b),(a,b^2),(a,b^3),(a^2,b)\})$, homeomorphic to the graph $K_{2,3}$

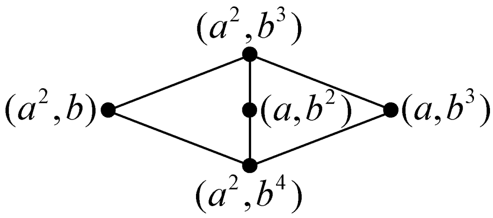


Рис. 7. Подграф графа $SCay(\langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b|b^{3+2}=b^3\rangle, \{\left(a,b^k\right)|1 \leq k \leq 4\} \cup \{(a^2,b)\})$, гомеоморфный графу $K_{2,3}$

Fig. 7. Subgraph of the graph $SCay(\langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b|b^{3+2}=b^3\rangle, \{\left(a,b^k\right)|1 \leq k \leq 4\} \cup \{(a^2,b)\})$, homeomorphic to the graph $K_{2,3}$

1.4) Из пункта Леммы с соответствующим номером 1.4) вытекает, что в случае, когда полугруппа $S \cong \langle a \mid a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b \mid b^{h+1}=b^h\rangle$, граф Кэли полугруппы $S$ допускает плоскую укладку если и только если $h < 5$. Однако, при $h = 4$ в основе графа Кэли полугруппы $S$ обнаруживается подграф $G_{10}$, изображенный на Рис.8. Следовательно, граф не является обобщенным внешнепланарным и не является внешнепланарным. Тем не менее, случаи $h < 4$ всё же допустимо имеют место и охвачены пунктом 1.3).

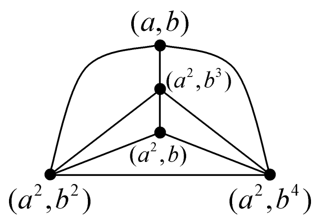


Рис. 8. Подграф графа $SCay(\langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b|b^{4+1}=b^4\rangle, \{\left(a,b^k\right)|1 \leq k \leq 4\} \cup \{(a^2,b)\})$, гомеоморфный графу $G_{10}$

Fig. 8. Subgraph of the graph $SCay(\langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b|b^{4+1}=b^4\rangle, \{\left(a,b^k\right)|1 \leq k \leq 4\} \cup \{(a^2,b)\})$, homeomorphic to the graph $G_{10}$

1.5) Наконец, для $r = h = 3$ и $m = t = 1$ основа графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a \mid a^{r+m}=a^r\rangle \times \langle b \mid b^{h+t}=b^h\rangle$ содержит изображенный на Рис.9 подграф $K_{2,3}$, следовательно, граф не является внешнепланарным, но при этом допускает обобщенную внешнеплоскую укладку.

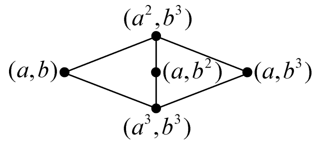


Рис. 9. Подграф основы графа Кэли полугруппы $\langle a|a^4 = a^3\rangle \times \langle b|b^4 = b^3\rangle$ относительно образующих $\{\left(a^k, b^l\right) | l = 1 \leq k \leq 3 \vee k = 1 \leq l \leq 3\}$, гомеоморфный графу $K_{2,3}$

Fig. 9. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup $\langle a|a^4 = a^3\rangle \times \langle b|b^4 = b^3\rangle$ with respect to generators $\{\left(a^k, b^l\right) | l = 1 \leq k \leq 3 \vee k = 1 \leq l \leq 3\}$, homeomorphic to the graph $K_{2,3}$

2.1) Перейдём к случаю, когда циклических множителя в прямом произведении больше, чем два. Перемножая три циклические группы второго порядка получим, что основа графа Кэли результата изоморфна трёхмерному кубу. А трёхмерный куб содержит гомеоморфный графу $G_{11}$ подграф, изображенный на Рис.10, поэтому не является обобщенным внешнепланарным и не является внешнепланарным.

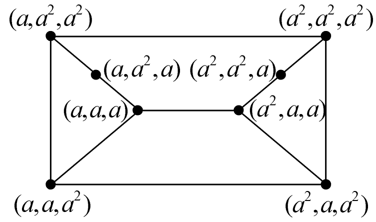


Рис. 10. Подграф основы графа Кэли полугруппы $\langle a|a^{1+2} = a^1\rangle^3$ относительно множества образующих $\{\left(a, a^2, a^2\right), \left(a^2, a, a^2\right), \left(a^2, a^2, a\right)\}$, гомеоморфный графу $G_{11}$

Fig. 10. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup $\langle a|a^{1+2} = a^1\rangle^3$ with respect to the set of generators $\{\left(a, a^2, a^2\right), \left(a^2, a, a^2\right), \left(a^2, a^2, a\right)\}$, homeomorphic to the graph $G_{11}$

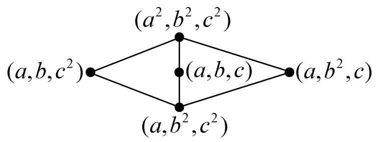


Рис. 11. Подграф основы графа Кэли полугруппы $\langle a|a^{1+2} = a^1\rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle \times \langle c|c^{2+1} = c^2\rangle$ относительно образующих $\{(a, b, c), \ldots, \left(a^2, b, c\right)\}$, гомеоморфный графу $K_{2,3}$

Fig. 11. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup $\langle a|a^{1+2} = a^1\rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle \times \langle c|c^{2+1} = c^2\rangle$ with respect to generators $\{(a, b, c), \ldots, \left(a^2, b, c\right)\}$, homeomorphic to the graph $K_{2,3}$

2.2) Перемножая циклическую группу второго порядка с двумя циклическими полугруппами второго порядка, не имеющими нетривиальных подгрупп, получим полугруппу, основа графа Кэли которой содержит изображенный на Рис.11 граф $K_{2,3}$, следовательно, граф не является внешнепланарным, но при этом допускает обобщенную внешнеплоскую укладку.

2.3) Для полугруппы $S \cong \langle a \mid a^{2+1} = a^2\rangle \times \langle b \mid b^{2+1} = b^2\rangle \times \langle c \mid c^{2+l} = c^2\rangle$ случай $l = 1$ приводит к полугруппе изоморфной полугруппе с нулевым умножением, граф Кэли которой допускает внешнеплоскую укладку. При $l = 2$ в основе графа Кэли получившейся полугруппы обнаруживается изображенный на Рис.12 подграф $K_{2,3}$, следовательно, граф не является внешнепланарным, но при этом допускает обобщенную внешнеплоскую укладку.

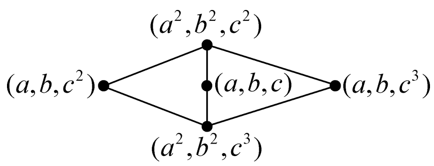


Рис. 12. Подграф основы графа Кэли полугруппы $\langle a|a^{2+1} = a^2\rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle \times \langle c|c^{2+2} = c^2\rangle$ относительно образующих $\{(a, b, c), \ldots, \left(a, b, c^2\right)\}$, гомеоморфный графу $K_{2,3}$

Fig. 12. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup $\langle a|a^{2+1} = a^2\rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle \times \langle c|c^{2+2} = c^2\rangle$ with respect to generators $\{(a, b, c), \ldots, \left(a, b, c^2\right)\}$, homeomorphic to the graph $K_{2,3}$

2.4) В случае, когда полугруппа $S \cong \langle a|a^{2+1} = a^2\rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle \times \langle c|c^{3+1} = c^3\rangle$, основа графа Кэли данной полугруппы содержит изображенный на Рис.13 подграф $K_{2,3}$ и не содержит подграфов Седлачека, следовательно, этот граф является обобщенным внешнепланарным, но не внешнепланарным.

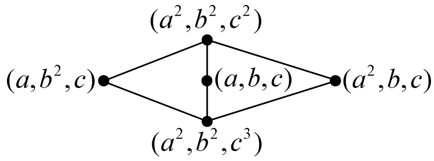


Рис. 13. Подграф основы графа Кэли полугруппы $\langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b|b^{2+1}=b^2\rangle \times \langle c|c^{3+1}=c^3\rangle$ относительно образующих $\{(a,b,c),\dots,(a,b,c^2)\}$, гомеоморфный графу $K_{2,3}$

Fig. 13. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup $\langle a|a^{2+1}=a^2\rangle \times \langle b|b^{2+1}=b^2\rangle \times \langle c|c^{3+1}=c^3\rangle$ with respect to generators $\{(a,b,c),\dots,(a,b,c^2)\}$, homeomorphic to the graph $K_{2,3}$

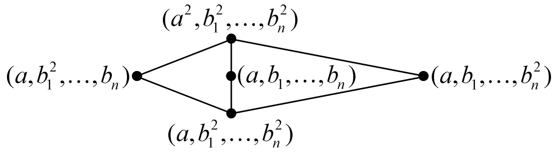


Рис. 14. Подграф основы графа Кэли полугруппы $\langle a|a^{1+2}=a^1\rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i|b_i^{2+1}=b_i^2\rangle$ относительно образующих $\{(a,b_1,\dots,b_n),\dots,(a^2,b_1,\dots,b_n)\}$, гомеоморфный графу $K_{2,3}$

Fig. 14. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup $\langle a|a^{1+2}=a^1\rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i|b_i^{2+1}=b_i^2\rangle$ with respect to generators $\{(a,b_1,\dots,b_n),\dots,(a^2,b_1,\dots,b_n)\}$, homeomorphic to the graph $K_{2,3}$

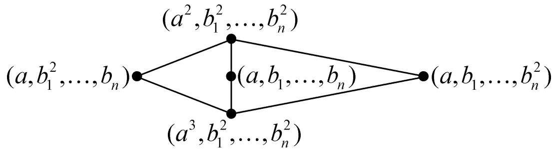


Рис. 15. Гомеоморфный графу $K_{2,3}$ подграф основы графов Кэли полугрупп $\langle a|a^{2+2}=a^2\rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i|b_i^{2+1}=b_i^2\rangle$ и $\langle a|a^{3+1}=a^3\rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i|b_i^{2+1}=b_i^2\rangle$ относительно множества образующих вида $\left(a,b_1^{i_1},\dots,b_n^{i_n}\right)$, $\left(a^2,b_1^{j_1},\dots,b_n^{j_n}\right)$, где степени $1\le i_k\le 2$, $1\le j_k\le 2$ не могут быть равными 2 одновременно

Fig. 15. Subgraph of the basis of Cayley graphs of semigroups $\langle a|a^{2+2}=a^2\rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i|b_i^{2+1}=b_i^2\rangle$ and $\langle a|a^{3+1}=a^3\rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i|b_i^{2+1}=b_i^2\rangle$ homeomorphic to the graph $K_{2,3}$, with respect to generators of the form $\left(a,b_1^{i_1},\dots,b_n^{i_n}\right)$, $\left(a^2,b_1^{j_1},\dots,b_n^{j_n}\right)$, where powers $1\le i_k\le 2$ and $1\le j_k\le 2$ are not equal to 2 at one and the same time

3.1) Основа графа Кэли полугруппы $S \cong \left\langle a_0 \mid a_0^{1+2}=a_0^1\right\rangle \times \prod_{i=1}^n \left\langle a_i \mid a_i^{2+1}=a_i^2\right\rangle$ относительно минимального множества неразложимых образующих содержит изображенный на Рис.14 подраф $K_{2,3}$, следовательно, граф Кэли такой полугруппы не является внешнепланарным, но, заметим, при этом он допускает обобщенную внешнеплоскую укладку.

3.2) и 3.3) Прямое произведение произвольного числа двухэлементных полугрупп $\left\langle a_i \mid a_i^{2+1}=a_i^2\right\rangle$, не имеющих нетривиальных подгрупп, изоморфно полугруппе с нулевым умножением, граф Кэли которой допускает внешнеплоскую укладку. Оставшиеся комбинации в пунктах 3.2) и 3.3) Леммы формируют полугруппы, основы графов Кэли которых содержат изображенный на Рис.15 подграф $K_{2,3}$, следовательно, их граф Кэли не внешнепланарный, но при этом обобщенно внешнепланарный, так как обе основы не содержат подграфов Седлачека.

Что и требовалось доказать.

**4. Заключение.** В заключение отметим, интересно было бы узнать, что получится в результате замены множителей прямого произведения на циклические моноиды и полугруппы с нулём? Об этом и многом другом, возможно, пойдёт речь в продолжении наметившейся в [15] серии статей.

### Список литературы

1. Мартынов П.О., Соломатин Д.В. Конечные свободные коммутативные полугруппы и полугруппы с нулём, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли. *Вестник Омского университета.* 2014;3(73):22–26.
2. Мартынов П.О. Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие обобщенно внешнепланарные графы Кэли. *Вестник Омского университета.* 2015;4:6–9.
3. Мартынов П.О. Рассыпчатые полугруппы, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли. *Вестник Омского университета.* 2018;3:6–9.
4. Harary F. Graph Theory: Advanced Book Program Series. Boulder: Westview Press; 1994. 284 p.
5. Zelinka B. Graphs of Semigroups. *Časopis pro pěstování matematiky.* 1981;106:407–408. (in Czech)
6. Maschke H. The representation of finite groups. *American Journal of Mathematics.* 1896;18:156–194.
7. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сараванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука; 1990. 384 с.

8. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука; 1987. 384 с.
9. Sedláček J. On a generalization of outerplanar graphs. *Časopis pro pěstování matematiky.* 1988;113(2):213–218. (in Czech)
10. Sedláček J. On local properties of graphs again. *Časopis pro pěstování matematiky.* 1989;114(4): 381–390. (in Czech)
11. Oubiña L., Zucchello R.A Generalization of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics, North-Holland.* 1984;51:243–249.
12. Sysło M.M. On some generalizations of outerplanar graphs: Results and open problems. In: Tinhofer, G., Schmidt, G. (eds) Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1986. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin: Heidelberg; 1987. 246 p. DOI: 10.1007/3-540-17218-1_56
13. Cáceres J., Márquez A. A linear algorithm to recognize maximal generalized outerplanar graphs. *Mathematica Bohemica.* 1997;122(3):225–230.
14. Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли. *Сибирские Электронные Математические Известия.* 2006;3:238–252.
15. Соломатин Д.В. Строение полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли. *Сибирские Электронные Математические Известия.* 2011;8:191–212.

**References**

1. Martynov PO., Solomatin DV. Finite free commutative semigroups and semigroups with zero how admitting generalized outerplanar Cayley graphs. *Herald of Omsk University.* 2014;3:22–26. (in Russian)
2. Martynov PO. Finite free commutative monoids who admitted generalized outerplanar Cayley graphs. *Herald of Omsk University.* 2015;4:6–9. (in Russian)
3. Martynov PO. Crisp semigroups admit generalized outerplanar Cayley graphs. *Herald of Omsk University.* 2018;3:6–9. (in Russian)
4. Harary F. Graph Theory: Advanced Book Program Series. Boulder: Westview Press; 1994. 284 p.
5. Zelinka B. Graphs of Semigroups. *Časopis pro pěstování matematiky.* 1981;106:407–408. (in Czech)
6. Maschke H. The representation of finite groups. *American Journal of Mathematics.* 1896;18:156–194.
7. Emelichev VA., Melnikov OI., Sarvanov VI., Tyshkevich RI. Lectures on Graph Theory. Moscow: Nauka Publ.; 1990. 384 p. (in Russian)
8. Zykov AA. Basics of Graph Theory. *Uspekhi Mat. Nauk.* 1974;29(6):89–154. (in Russian)
9. Sedláček J. On a generalization of outerplanar graphs. *Časopis pro pěstování matematiky.* 1988;113(2):213–218. (in Czech)
10. Sedláček J. On local properties of graphs again. *Časopis pro pěstování matematiky.* 1989;114(4):381–390. (in Czech)
11. Oubiña L., Zucchello R. A Generalization of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics, North-Holland.* 1984;51:243–249.
12. Sysło MM. On some generalizations of outerplanar graphs: Results and open problems. In: Tinhofer, G., Schmidt, G. (eds) Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1986. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin: Heidelberg; 1987. 246 p. DOI: 10.1007/3-540-17218-1_56
13. Cáceres J., Márquez A. A linear algorithm to recognize maximal generalized outerplanar graphs. *Mathematica Bohemica.* 1997;122(3):225–230.
14. Solomatin DV. Direct products of cyclic semigroups admitting a planar Caley graph. *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2006;3:238–252. (in Russian)
15. Solomatin DV. Semigroups with outerplanar Cayley graphs. *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2011;8:191–212. (in Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.12.2023
Поступила после рецензирования 29.01.2024
Принята к публикации 03.02.2024

Received December 18, 2023
Revised January 29, 2024
Accepted February 3, 2024

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ**

**Соломатин Денис Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

**INFORMATION ABOUT THE AUTHOR**

**Denis V. Solomatin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associete Professor, Associete Professor Professor of Mathematics and Mathematics Education in Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia