Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 2. С. 124–135.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 2. P. 124–135.

УДК 517.9 DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-124-135
MSC 35J15
Оригинальное исследование

О повышенной суммируемости решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом

Чечкина А. Г.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. А. Алхутовым*)

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1
Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Россия, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112
chechkina@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрена задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами в ограниченной липшицевой области. Рассмотрен вопрос об однозначной разрешимости этой задачи при условии, что коэффициенты при производных первого порядка принадлежат классу Лебега. Разобраны случаи различной размерности пространства. Доказана повышенная суммируемость градиента решения, т. е. получены неравенства Боярского – Мейерса.

Ключевые слова: повышенная суммируемость градиента решения, неравенство Боярского – Мейерса, краевая задача Дирихле

Для цитирования: Чечкина А. Г. 2024. О повышенной суммируемости решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 124–135.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-124-135

Original Research

On Increased Summability of the Solution to the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift

Alexandra G. Chechkina
(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. A. Alkhutov*)

M. V. Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia
Institute of Mathematics with a Computer Center – a division of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,
112 Chernyshevskogo St., Ufa, 450008, Russia
chechkina@gmail.com

Abstract. This paper is devoted to study of the Dirichlet problem in bounded Lipschitz domain for linear second order equation with drift (lower terms). Assuming that the coefficients of the first-order derivatives belong to the Lebesgue class, we prove Theorem of existence and uniqueness of solutions to this problem, i.e. we show the unique solvability of this problem. Cases of different dimensions of space are analyzed. We also prove the Boyarsky–Meyers inequality, i.e. we prove higher integrability of the gradient of solutions to the Dirichlet problem in bounded Lipschitz domain for the Laplacian with lower order terms. The proof of main theorems is based on obtaining the inverse Hölder inequality for the gradient of the solution to the Dirichlet problem with subsequent application of the generalized Hering lemma. The Boyarsky – Meyers inequalities are useful for homogenization theory and in asymptotic methods.

Keywords: Higher Integrability of the Solution Gradient, Boyarsky – Meyers Inequality, Dirichlet Boundary Value Problem

For citation: Chechkina A. G. 2024. On Increased Summability of the Solution to the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 124–135. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-124-135

---

1. Введение. Для многих задач математической физики требуется повышенная суммируемость градиента решения. Впервые этот вопрос был исследован в работе [1], в которой был рассмотрен вопрос о повышенной суммируемости задачи Дирихле для линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами в плоской ограниченной области. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [2]. После этой работы оценки повышенной суммируемости градиента решений общепринято называть оценками типа Мейерса, хотя справедливее было бы их называть оценками Боярского – Мейерса. Оценка Боярского – Мейрса решения задачи Дирихле в области с липшицевой границей для уравнения p-Лапласа с переменным показателем p, обладающим логарифмическим модулем непрерывности, впервые получена в [3]. Позже в работах [4] и [5] этот результат был усилен и распространен на системы эллиптических уравнений с переменным показателем суммируемости. Отметим, что в статье [3] стимулом изучения оценок Мейерса явилась задача о термисторе, дающей совместное описание потенциала электрического поля и температуры (см. [3], [6] и [7]). Такого же рода системы возникают и в гидромеханике квазиньютоновых жидкостей.

Такого рода оценки важны в теории усреднения задач с быстрой сменой краевых условий, они позволяют улучшить скорость сходимости допредельных решений к решению усредненной задачи (см. аналогичную задачу для оператора без сноса [8], в области, перфорированной вдоль границы, в [9], а ткже [10], [11] и [12]). Аналогичные оценки для для p-Лапласиана получены в [13].

Введем соболевское пространство функций $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, как пополнение финитных бесконечно дифференцируемых в ограниченной области D функций по норме

$$\| v \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)} = \left(\int\limits_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Данное выражение является нормой в силу хорошо известного неравенства Фридрихса. Настоящая работа посвящена оценкам решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона с младшими членами вида

$$\mathcal{L}u := \Delta u + b \cdot \nabla u = \operatorname{div} f, \qquad f = (f_1, \dots f_n),\ f_j \in L_2(D),\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D), \tag{1}$$

заданного в ограниченной липшицевой области $D \in \mathbb{R}^n$, где $n > 1$. Здесь вектор-функция $b = (b_1, \dots, b_n)$ такова, что либо

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p = n, \text{ если } n > 2, \quad j = 1, \dots n, \tag{2}$$

либо

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p > 2, \text{ если } n = 2, \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

Под решением задачи (1) понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx = \int\limits_D (f \cdot \nabla \varphi) \, dx \tag{4}$$

для всех пробных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Сформулируем основные утверждения.

Теорема 1. *Если $n > 2$, выполнено условие (2) и $f \in \left(L_{2+\delta_0}(D)\right)^n$, где $\delta_0 > 0$, то существуют положительные постоянные $\delta(n, \delta_0) < \delta_0$ и C такие, что для решения задачи Дирихле для уравнения (1) справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leqslant C \int\limits_D |f|^{2+\delta} \, dx, \tag{5}$$

где C зависит только от δ_0, размерности пространства n, области D и $\|b\|_{L_n(D)}$.

Теорема 2. *Если $n = 2$, выполнено условие (3), $f \in \left(L_{2+\delta_0}(D)\right)^2$, где $\delta_0 > 0$, то существуют положительные постоянные $\delta(p, \delta_0) < \delta_0$ и C такие, что для решения задачи Дирихле для уравнения (1) справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leqslant C \int\limits_D |f|^{2+\delta} \, dx, \tag{6}$$

где C зависит только от δ_0 а также от области D и $\|b\|_{L_p(D)}$.

Замечание 1. *Теорема остаётся в силе, если вместо оператора Лапласа рассмотреть линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка вида*

$$div\,(A(x)\nabla u).$$

Здесь $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, то есть $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\alpha|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \alpha^{-1}|\xi|^2 \text{ для почти всех } x \in D \text{ и для всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

При этом константа C в (5) или в (6) будет дополнительно зависеть от постоянных эллиптичности матрицы A.

При $n > 2$ будем пользоваться следующим представлением младших коэффициентов $b \in (L_n(D))^n$ рассматриваемого уравнения

$$b = \check{b} + \widehat{b}, \quad \check{b} \in (L_\infty(D))^n, \quad \widehat{b} \in (L_n(D))^n, \quad \| \widehat{b} \|_{L_n(D)} \leqslant \theta \tag{8}$$

с достаточно малой постоянной $\theta \in (0,1)$, которая определяется в дальнейших рассуждениях.

2. Однозначная разрешимость поставленной задачи. В этом разделе однозначная разрешимость задачи Дирихле в произвольной ограниченной области доказывается для уравнения вида

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u = \operatorname{div} f,, \qquad f = (f_1, \dots f_n), f_j \in L_2(D),\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D), \tag{9}$$

где $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, то есть $a_{ij} = a_{ji}$, удовлетворяющая (1), а b удовлетворяет (2) или (3). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если выполнены условия (2) либо (3) и (1), то задача (1) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и для ее решения справедлива оценка*

$$\| \nabla u \|_{L_2(D)} \le C\|f\|_{L_2(D)} \tag{10}$$

с постоянной C, зависящей только от коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, области D и размерности пространства n.

Доказательство основано на вспомогательных утверждениях, которые устанавливаются ниже. Сначала нам потребуются оценки билинейной формы, связанной с оператором $\mathcal{L}$, имеющую вид

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_D a\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_D (b \cdot \nabla u) v \, dx \tag{11}$$

и определенную на функциях $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Следующую лемму докажем при $n > 2$. Случай $n = 2$ рассматривается аналогично с небольшими изменениями.

Лемма 1. *Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из (9) удовлетворяют условиям (2) и (1), то*

$$\mathcal{L}(u,u) \ge \frac{\alpha}{2} \int_D |\nabla u|^2 \, dx - C(\alpha, b, n) \int_D u^2 \, dx. \tag{12}$$

Доказательство. В силу условия (1) имеем

$$\mathcal{L}(u,u) \ge \alpha \int_D |\nabla u|^2 \, dx - \left| \int_D (b \cdot \nabla u) u \, dx \right|. \tag{13}$$

Оценим второе слагаемое в правой части тождества (11). Из (8) имеем

$$\int_D (b \cdot \nabla u) u \, dx = \int_D (\check{b} \cdot \nabla u) u \, dx + \int_D (\widehat{b} \cdot \nabla u) u \, dx. \tag{14}$$

Для первого интеграла из правой части в (14) имеем

$$\left| \int_D (\check{b} \cdot \nabla u) u \, dx \right| \leqslant C \, \| \check{b} \|_{L_\infty(D)} \int_D |\nabla u| \, |u| \, dx$$

и из неравенства Коши с $\varepsilon > 0$ найдем

$$\left| \int_D (\check{b} \cdot \nabla u) u \, dx \right| \leqslant \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 \, dx + C(\varepsilon) \, \| \check{b} \|^2_{L_\infty(D)} \int_D u^2 \, dx. \tag{15}$$

Второй интеграл в правой части (14) оценим с помощью неравенства Гёльдера, в силу которого

$$\left|\int\limits_D (\widehat{b}\cdot\nabla u)u\,dx\right| \leqslant \|\,\widehat{b}\,\|_{L_n(D)}\left(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{2n}}. \tag{16}$$

По неравенству Соболева

$$\left(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \leqslant C(n)\left(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Отсюда и из (16) с учетом (8) получим

$$\left|\int\limits_D (\widehat{b}\cdot\nabla u)u\,dx\right| \leqslant C(n)\theta\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx. \tag{18}$$

Из (15) и (18) найдем

$$\left|\int\limits_D (b\cdot\nabla u)u\,dx\right| \leqslant \varepsilon\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx + C(\varepsilon)\,\|\,\check{b}\,\|^2_{L_\infty(D)}\int\limits_D u^2\,dx + C(n)\theta\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx. \tag{19}$$

В итоге, после соответствующего выбора ε и θ из (13) и (19) приходим к оценке (12). Лемма доказана.

Следующую лемму также докажем для простоты изложения при $n > 2$. При $n = 2$ доказательство проводится аналогично.

Лемма 2. *Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из (9) удовлетворяют условиям (2) и (1), то для фиксированного $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ отображение $v \mapsto \mathcal{L}(u,v)$, где форма $\mathcal{L}(u,v)$ определена в (11), является ограниченным линейным функционалом на $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ и справедлива оценка*

$$|\mathcal{L}(u,v)| \le C(\alpha, b, n)\,\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)}\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)}. \tag{20}$$

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1) имеем

$$\left|\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right| \le \alpha^{-1}\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)}\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)}. \tag{21}$$

Второе слагаемое формы (11) оценим по неравенству Гёльдера:

$$\left|\int\limits_D (b\cdot\nabla u)v\,dx\right| \leqslant \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)}\left(\int\limits_D |b|^n\,dx\right)^{2/n}\left(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{2n}}. \tag{22}$$

По теореме вложения Соболева (17), где $u = v$, из (21), (22) приходим к (20). Лемма доказана.

Докажем теперь принцип максимума для решений однородной задачи (9). Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ называется субрешением однородной задачи (9) в области D, если

$$\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int\limits_D (b\cdot\nabla u)\varphi\,dx \le 0 \tag{23}$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$. Аналогично определяется суперрешение $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ в области D, для которого выполнено неравенство

$$\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int\limits_D (b\cdot\nabla u)\varphi\,dx \ge 0$$

для всех неотрицательных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$.

Следующее утверждение при $n > 2$ можно найти, например, в [14] (теорема 3.1) (см. также [15]).

Лемма 3. *Если выполнены условия (2) (или (3)) и (1), функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ является субрешением в области D, то*

$$\operatorname*{ess\,sup}_D u \le 0. \tag{24}$$

Если же $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ является суперрешением в области D, то

$$\operatorname*{ess\,inf}_D u \geq 0. \tag{25}$$

Доказательство. Сначала покажем (24). Доказательство проводим от противного. Предположим, что $\operatorname*{ess\,sup}_D u > 0$. Тогда существует такое число k, что $0 < k < \operatorname*{ess\,sup}_D u$. Рассмотрим функцию $v = \max(u-k, 0) = (u-k)^+$, которая принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и неотрицательна. В силу (23) имеем

$$\int\limits_D a\nabla v \cdot \nabla v\, dx \leq \int\limits_D (b \cdot \nabla v)v\, dx.$$

Перепишем эту оценку в виде

$$\int\limits_{D\cap\{u>k\}} a\nabla u \cdot \nabla u\, dx \leq \int\limits_{D\cap\{u>k\}} (b \cdot \nabla u)v\, dx. \tag{26}$$

Сначала предположим, что $n > 2$. Пользуясь в правой части (26) условием эллиптичности (1) и применяя неравенство Гёльдера в правой части, получим

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\, dx \leq \Bigg(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^n\, dx\Bigg)^{1/n}\Bigg(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\, dx\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\Bigg)^{\frac{2n}{n-2}}. \tag{27}$$

Поскольку $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, по теореме вложения Соболева

$$\Bigg(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\Bigg)^{\frac{2n}{n-2}} \leq C\Bigg(\int\limits_D |\nabla v|^2\, dx\Bigg)^{1/2} = C\Bigg(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\, dx\Bigg)^{1/2},$$

и из (27) будем иметь

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\, dx \leq C\Bigg(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^n\, dx\Bigg)^{1/n} \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\, dx. \tag{28}$$

Если $M = \operatorname*{ess\,sup}_D u = \infty$, то первый множитель в правой части (28) стремится к нулю при $k \longrightarrow \infty$, что приводит к противоречию.

Если же $M < \infty$, то $\nabla u = 0$ почти всюду на множестве $D \cap \{u = M\}$ и оценка (28) приобретает вид

$$\alpha \leq C\Bigg(\int\limits_{M_k} |b|^n\, dx\Bigg)^{1/n},$$

где

$$M_k = \{x \in D : \ k < u(x) < M\}, \ \nabla u(x) \neq 0\}.$$

Ясно, что n-мерная мера Лебега множества M_k стремится к нулю при $k \longrightarrow M$, в силу чего

$$\Bigg(\int\limits_{M_k} |b|^n\, dx\Bigg)^{1/n} \longrightarrow 0 \ \text{ при } \ k \rightarrow M,$$

и мы вновь приходим к противоречию, что и доказывает (24).

Рассмотрим оставшийся случай, когда $n = 2$. Исходя из (26), пользуясь условием эллиптичности и применяя в правой части (26) неравенство Гёльдера с другими показателями, придем к оценке

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\, dx \leq \Bigg(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^p\, dx\Bigg)^{1/p}\Bigg(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\, dx\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\, dx\Bigg)^{\frac{2p}{p-2}}, \tag{29}$$

где $p > 2$. При $n = 2$ по теореме вложения Соболева

$$\Bigg(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\, dx\Bigg)^{\frac{2p}{p-2}} \leq C\Bigg(\int\limits_D |\nabla v|^2\, dx\Bigg)^{1/2} = C\Bigg(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\, dx\Bigg)^{1/2}$$

и из (29) приходим к оценке

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx \le C\Bigg(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^p\,dx\Bigg)^{1/p} \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx. \tag{30}$$

Дальнейшие рассуждения, основанные на (30), ничем не отличаются от приведенных выше в случае $n > 2$, что вновь влечет (24).

Оценка (25) доказывается аналогично. Нужно только заметить, что если функция u является суперрешением уравнения, то эта же функция со знаком минус будет субрешением. Лемма доказана.

Следствие 1. *При выполнении условий* (2) *либо* (3) *и* (1) *задача Дирихле* (9) *имеет единственное решение.*
Доказательство теоремы 3. Определим для $\sigma > 0$ оператор $\mathcal{L}_\sigma$ формулой $\mathcal{L}_\sigma u = \mathcal{L}u - \sigma u$. Из оценки (12) леммы следует, что соответствующая оператору $\mathcal{L}_\sigma$ форма

$$\mathcal{L}_\sigma(u,u) = \int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla u\,dx - \int\limits_D (b\cdot\nabla u)u\,dx + \sigma\int\limits_D u^2\,dx$$

при достаточно большом $\sigma = \sigma_0(\alpha, b, n, p)$ будет коэрцитивной, то есть

$$\mathcal{L}_\sigma(u,u) \ge \alpha/2\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx.$$

Отметим, что при таком выборе $\sigma = \sigma_0$ билинейная форма

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(u,v) = \int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int\limits_D (b\cdot\nabla u)v\,dx + \sigma_0\int\limits_D uv\,dx \tag{31}$$

является ограниченной. Это следует из оценки (20), примененной к первым двум слагаемым в правой части (31) и оценки

$$\int\limits_D uv\,dx \le \|u\|_{L_2(D)}\|v\|_{L_2(D)} \le C\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)}\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)},$$

вытекающей из неравенства Фридрихса. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ является ограниченным и коэрцитивным в гильбертовом пространстве $H = \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$.

Пусть H^{-1} — сопряженное пространство к H. Определим оператор $\mathfrak{I}_u : H \to H^{-1}$ равенством

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_u v = \int\limits_D uv\,dx, \quad v\in H. \tag{32}$$

Покажем, что отображение $\mathfrak{I}_u$ является компактным. Для этого заметим, что отображение $\mathfrak{I}_u$ можно представить в виде композиции

$$\mathfrak{I}_u = \mathfrak{I}_1\circ\mathfrak{I}_2. \tag{33}$$

Здесь $\mathfrak{I}_2 : H \to L_2(D)$ – естественное вложение. По теореме о компактности вложения Кондрашова – Соболева [17, Теорема 7.22] оператор $\mathfrak{I}_2$ является компактным, а отображение $\mathfrak{I}_1 : L_2(D) \to H^{-1}$ определено формулами (32) и (33). Из того, что оператор $\mathfrak{I}_1$ непрерывен и оператор $\mathfrak{I}_2$ компактен, следует компактность оператора $\mathfrak{I}$.

Уравнение $\mathcal{L}u = l$ для $u \in H$, где l – функционал в пространстве H^{-1}, сопряженном к $H = \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$, эквивалентно уравнению $\mathcal{L}_{\sigma_0}u + \sigma_0\mathfrak{I}_u u = l$. По лемме Лакса – Мильграма (см. [16]) обратный оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение H^{-1} на H. Поэтому, применяя этот оператор к предыдущему уравнению, получаем эквивалентное уравнение

$$u + \sigma_0\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l. \tag{34}$$

Отображение $T = -\sigma_0\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}_u$ в силу компактности $\mathfrak{I}$ также компактно. Следовательно, по альтернативе Фредгольма (см., например, терема 5.3 [17, § 5.3]) существование функции $u \in H$, удовлетворяющей уравнению (34), является следствием единственности в H тривиального решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$. Теперь однозначная разрешимость задачи Зарембы (1) вытекает из следствия к лемме .

Перейдем к доказательству оценки (10). Для этого определим формально сопряженный для $\mathcal{L}$ оператор $\mathcal{L}^\star$ формулой

$$\mathcal{L}^\star u := \operatorname{div}(a(x)\nabla u) - \operatorname{div}(b(x)u).$$

Поскольку для соответствующих билинейных форм $\mathcal{L}^\star(u,v)=\mathcal{L}(v,u)$ при $u,v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, оператор $\mathcal{L}^\star$ сопряжен оператору $\mathcal{L}$ в гильбертовом пространстве H. Заменяя в предыдущем рассуждении $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^\star$, мы видим, что уравнение $\mathcal{L}_\sigma u=l$ эквивалентно уравнению

$$u+(\sigma_0-\sigma)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\mathfrak{I}_u u=\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}l$$

и сопряженный оператор $T^\star$ компактного отображения $T_\sigma=(\sigma_0-\sigma)\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}$ (см. (32)) дается формулой

$$T_\sigma^\star=(\sigma_0-\sigma)(\mathcal{L}_{\sigma_0}^\star)^{-1}\mathfrak{I}.$$

Используя теперь теорему о сжимающих отображениях в банаховом пространстве (см., например, теорема 5.1 [17, §5.1]), мы приходим к следующему утверждению, аналогичному теореме 8.6 из §8.2 монографии [17].

Лемма 4. *Если выполнены условия*(2) *и* (1), *то существует не более чем счетное дискретное множество* $\Sigma\in(-\infty,0)$ *такое, что если* $\sigma\notin\Sigma$, *то задачи Дирихле для уравнений* $\mathcal{L}_\sigma u=l$ *и* $\mathcal{L}_\sigma^\star u=l$ *однозначно разрешимы в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *для произвольного линейного функционала* l *в пространстве, сопряженном к* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Для доказательства оценки (10) рассмотрим оператор $G_\sigma: H^\star\to H$, определяемый равенством $G_\sigma=\mathcal{L}_\sigma^{-1}$ при $\sigma\notin\Sigma$. Этот оператор естественно назвать оператором Грина задачи Дирихле (9). Используя альтернативу Фредгольма (см., например, теорему 5.3 из [17, §5.3]), заключаем, что этот оператор является ограниченным, и, следовательно, справедлива оценка (10). Теорема 3 доказана.

3. Доказательство основных результатов. Доказательство обеих теорем основано на получении обратного неравенства Гёльдера для градиента решения задачи Дирихле (1) с последующим применением обобщённой леммы Геринга.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $Q_R^{x_0}$ открытый куб с центром в точке x_0 и рёбрами длиной $2R$, где $R\le 1$, которые параллельны координатным осям. Ниже полагается

$$\fint_{Q_R^{x_0}} f\,dx=\frac{1}{|Q_R^{x_0}|}\int_{Q_R^{x_0}} f\,dx,$$

где $|E|$ обозначает n-мерную меру множества $E\subset\mathbb{R}^n$.

Продолжим функцию u нулём вне области D. Сначала рассмотрим случай, когда $Q_{3R/2}^{x_0}\subset D$ и выберем в интегральном тождестве (4) пробную функцию $\varphi=(u-\lambda)\eta^2$, где

$$\lambda=\fint_{Q_{3R/2}^{x_0}} u,\ dx,$$

а срезающая функция $\eta\in C_0^\infty(Q_{3R/2}^{x_0})$ такова, что $0\le\eta\leqslant 1$, $\eta=1$ в $Q_R^{x_0}$ и $|\nabla\eta|\leqslant CR^{-1}$. Тогда (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\int_{Q_{3R/2}^{x_0}}|\nabla u|^2\eta^2\,dx=\int_{Q_{3R/2}^{x_0}}(b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx-2\int_{Q_{3R/2}^{x_0}}\eta(u-\lambda)\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx+\\+2\int_{Q_{3R/2}^{x_0}}f(u-\lambda)\eta\cdot\nabla\eta\,dx+\int_{Q_{3R/2}^{x_0}}\eta^2 f\cdot\nabla u\,dx.\end{aligned}\tag{35}$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части тождества (35), имея в виду, что $n>2$. Из представления младших коэффицентов (8) вытекает, что

$$\int_{Q_{3R/2}^{y_0}}(b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx=\int_{Q_{3R/2}^{y_0}}(\check{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx+\int_{Q_{3R/2}^{y_0}}(\widehat{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx.\tag{36}$$

Для первого интеграла из правой части в (36) имеем

$$\left|\int_{Q_{3R/2}^{y_0}}(\check{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\right|\leqslant R\parallel\check{b}\parallel_{L_\infty(D)}\int_{Q_{3R/2}^{y_0}}|\nabla u|\left|\frac{u-\lambda}{R}\right|\eta^2\,dx.$$

Поскольку $R\leqslant 1$ и $0\leqslant\eta\leqslant 1$, то, пользуясь неравенством Коши с $\varepsilon>0$, найдем

$$\left|\int_{Q_{3R/2}^{y_0}}(\check{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\right|\leqslant\varepsilon\int_{Q_{3R/2}^{y_0}}|\nabla u|^2\eta^2\,dx+C(\varepsilon)\parallel\check{b}\parallel^2_{L_\infty(D)}R^{-2}\int_{Q_{2R}^{y_0}}(u-\lambda)^2\,dx.\tag{37}$$

Второй интеграл в правой части (36) оценим с помощью неравенства Гёльдера, в силу которого

$$\Big|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (\widehat{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant R\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\widehat{b}|^2\eta^2\left(\frac{u-\lambda}{R}\right)^2 dx\Big)^{1/2} \leqslant \tag{38}$$

$$\leqslant R\,\|\,\widehat{b}\,\|_{L_n(D)}\,\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} \left|\frac{(u-\lambda)\eta}{R}\right|^{\frac{2n}{n-2}} dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}}.$$

По неравенству Соболева

$$\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} \left|\frac{(u-\lambda)\eta}{R}\right|^{\frac{2n}{n-2}} dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}} \leqslant C(n)\Big(\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dy\Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2|\nabla\eta|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big). \tag{39}$$

Поскольку $R\leqslant 1$, то из (38), (39) и представления (8) найдем

$$\Big|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (\widehat{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant C(n)\theta\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2|\nabla\eta|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big),$$

в силу чего

$$\Big|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (\widehat{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dy\Big| \leqslant C(n)\theta\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + C(n)\theta\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2|\nabla\eta|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big).$$

Отсюда по неравенству Коши получим

$$\Big|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (\widehat{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant C(n)\theta\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2|\nabla\eta|^2\,dx\Big). \tag{40}$$

В итоге, из оценок (37) и (40) в силу (36) с учетом выбора срезающей функции η будем иметь

$$\Big|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant (\varepsilon + C(n)\theta)\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + (C(\varepsilon)\,\|\,\check{k}\,\|^2_{L_\infty(D)} + C(n)\theta)R^{-2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{41}$$

Оценим теперь оставшиеся интегралы в правой части интегрального равенства (35). Для второго слагаемого получаем

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} \eta(u-\lambda)\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dy + \frac{C(\varepsilon)}{R^2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{42}$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом:

$$\Big|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} f(u-\lambda)\eta\cdot\nabla\eta\,dx\Big| \leqslant \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + \frac{C}{R^2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{43}$$

Для четвертого слагаемого выводим

$$\Big|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} \eta^2 f\cdot\nabla u\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + C(\varepsilon)\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx. \tag{44}$$

В результате, пользуясь (35), учитывая последние оценки (41)-(44), после соответствующего выбора ε и σ придем к неравенству

$$\int\limits_{Q^{y_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(n,b)\Big(\frac{1}{R^2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx + \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx\Big). \tag{45}$$

Далее, из неравенства Пуанкаре – Соболева

$$\left(\fint_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant C(n)R\left(\fint_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\right)^{1/q},\ q=\frac{2n}{n+2}$$

и из (45) найдем

$$\left(\fint_{Q^{y_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant C(n,b)\left(\left(\fint_{Q^{y_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\right)^{1/q}+\left(\fint_{Q^{y_0}_{2R}} |f|^2\,dx\right)^{1/2}\right). \tag{46}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $Q^{y_0}_{3R/2}\cap\widetilde{F}_{R_0}\neq\emptyset$. Выбирая в интегральном тождестве (4) пробную функцию $\varphi=u\eta^2$ с той же срезающей функцией η, получим

$$\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx=\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\,u\eta^2\,dx--2\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} \eta u\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx-2\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} fu\eta\cdot\nabla\eta\,dx-\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} \eta^2 f\cdot\nabla u\,dx. \tag{47}$$

Все интегралы в правой части (47) оцениваются точно так же, как и выше вплоть до (45). В результате приходим к оценке (45), в которой $\lambda=0$. Перепишем эту оценку в виде

$$\int_{Q^{y_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx\leqslant C(n,b)\left(\frac{1}{R^2}\int_{Q^{y_0}_{2R}} u^2\,dx+\int_{Q^{y_0}_{2R}} |f|^2\,dx\right). \tag{48}$$

Далее заметим, что поскольку $Q^{x_0}_{3R/2}\cap\partial D\neq\emptyset$ и область D липшицева, то$|(\mathbb{R}^n\setminus D)\cap\overline{Q}^{x_0}_{2R}|\geq c(D)R^n$ для достаточно малого R. Поэтому по неравенству Соболева

$$\left(\fint_{Q^{x_0}_{2R}} u^2\,dx\right)^{\frac12}\leqslant C(n,D)\,R\left(\fint_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\ dx\right)^{\frac1q}. \tag{49}$$

Откуда вновь приходим к оценке (46). Ясно, что оценка (46) выполнена и для кубов с центрами, лежащими вне области D. Таким образом, оценка (46) справедлива во всех рассматриваемых случаях.

Из (46) оценки, справедливой для всех рассматриваемых кубов $Q^{y_0}_R$, и обобщённой леммы Геринга (см. [18], [19], а также [20, гл. VII]) вытекает, что в предположении $f\in L_{2+\delta_0}(D)$, где $\delta_0>0$, имеет место оценка

$$\|\nabla u\|_{L_{2+\delta}(D)}\leqslant C(n,b,\delta_0,D)(\|\nabla u\|_{L_2(D)}+\|f\|_{L_{2+\delta}(D)}). \tag{50}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (50) с помощью оценки (10) теоремы 3. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Схема рассуждений остается такой же, как и в доказательстве теоремы 1. Поэтому приведем отличительные особенности плоского случая. Отличие состоит только в другом способе оценки первого интеграла в правой части интегральных равенств (35) и (47). Сначала предположим, что $Q^{y_0}_{3R/2}\subset K_{R_0}\setminus\widetilde{F}_{R_0}$. Первый интеграл в правой части (35) оценивается по неравенству Гёльдера, в силу которого

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\right|&\leqslant\\ \leqslant R\left(\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} |b|^2\eta^2\left(\frac{u-\lambda}{R}\right)^2\,dx\right)^{1/2}&\leqslant\\ \leqslant R\left(\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} |b|^p\eta^p\,dx\right)^{2/p}\left(\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} \left|\frac{u-\lambda}{R}\right|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\right)^{\frac{p-2}{2p}}&.\end{aligned} \tag{51}$$

Далее, по неравенству Пуанкаре – Соболева

$$\left(\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} \left|\frac{u-\lambda}{R}\right|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\right)^{\frac{p-2}{2p}}\leqslant C(p)\left(\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^{q_1}\,dx\right)^{1/q_1}, \tag{52}$$

где $q_1 = \frac{p}{p-1}$. Из (52) и (51), учитывая, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, найдем

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\right| \leqslant C(p)R\Bigg(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Bigg)^{1/2} \parallel b\parallel^2_{L_p(Q^{y_0}_{3R/2})}\Bigg(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^{q_1}\,dx\Bigg)^{1/q_1}.$$

По неравенству Коши с $\varepsilon > 0$

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\right| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(p)}{4\varepsilon}R^2 \parallel b\parallel^4_{L_p(Q^{y_0}_{3R/2})}\Bigg(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^{q_1}\,dx\Bigg)^{2/q_1}. \tag{53}$$

Оставшиеся интегралы в правой части интегрального равенства (35) оцениваются точно так же, как и в (42)–(44). В результате, поскольку $R \leqslant 1$, то, пользуясь (35), учитывая последние оценки после соответствующего выбора ε, придем к неравенству

$$\fint\limits_{Q^{y_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(b,p)\Bigg(\frac{1}{R^2}\fint\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx + \fint\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + \Bigg(\fint\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^{q_1}\,dx\Bigg)^{2/q_1}\Bigg). \tag{54}$$

В силу неравенства Пуанкаре – Соболева

$$\Bigg(\fint\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx\Bigg)^{1/2} \leqslant C(p)R\Bigg(\fint\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^{q_1}\,dx\Bigg)^{1/q_1}, \quad q_1 = \frac{p}{p-1},$$

и из (54) найдем

$$\Bigg(\fint\limits_{Q^{y_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx\Bigg)^{1/2} \leqslant C(b,p)\Bigg(\Bigg(\fint\limits_{Q^{y_0}_{2R}} |\nabla u|^{q_1}\,dx\Bigg)^{1/q_1} + \Bigg(\fint\limits_{Q^{y_0}_{2R}} |f|^2\,dx\Bigg)^{1/2}\Bigg). \tag{55}$$

Если $Q^{y_0}_{3R/2} \cap \widetilde{F}_{R_0} \neq \varnothing$, то первый интеграл в правой части (47) оценивается по неравенству Гёльдера точно так же, как в (51). В результате будем иметь

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)u\eta^2\,dx\right| \leqslant \Bigg(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Bigg)^{1/2} \parallel b\parallel^2_{L_p(Q^{y_0}_{3R/2})}\Bigg(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Bigg)^{\frac{p-2}{2p}}.$$

Отсюда и по неравенству Коши с $\varepsilon > 0$ выводим

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)u\eta^2\,dx\right| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(p,b)}{4\varepsilon}\Bigg(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Bigg)^{\frac{p-2}{p}}. \tag{56}$$

Оставшиеся интегралы в правой части (47) оцениваются так же, как и в случае $n > 2$. В результате, пользуясь (56), после соответствующего выбора ε придем к оценке

$$\int\limits_{Q^{y_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(b,p)\Bigg(\Bigg(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Bigg)^{\frac{p-2}{p}} + \frac{1}{R^2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} u^2\,dx + \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx\Bigg).$$

Поскольку $R \leqslant 1$, то, применяя неравенство Гёльдера ко второму интегралу в правой части данного неравенства, получим

$$\int\limits_{Q^{y_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(b,p)\Bigg(R^{\frac{4-2p}{p}}\Bigg(\int\limits_{Q^{y_0}_{2R}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Bigg)^{\frac{p-2}{p}} + \int\limits_{Q^{y_0}_{2R}} |f|^2\,dx\Bigg). \tag{57}$$

Далее заметим, что поскольку $Q^{x_0}_{3R/2} \cap \partial D \neq \varnothing$ и область D липшицева, то $|(\mathbb{R}^n \setminus D) \cap \overline{Q}^{x_0}_{2R}| \geq c(D)R^2$ для достаточно малого R. Первый интеграл в правой части (57) по неравенству Соболева оценивается следующим образом:

$$\Bigg(\fint\limits_{Q^{y_0}_{2R}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Bigg)^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant C(p)R\Bigg(\fint\limits_{Q^{y_0}_{2R}} |\nabla u|^{q_1}\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Отсюда вновь приходим к оценке (55). Ясно, что оценка (55) выполнена и для кубов с центрами, лежащими вне области D. Таким образом, оценка (55) справедлива во всех рассматриваемых случаях.

Дальнейшие рассуждения, основанные на использовании упоминавшейся ранее леммы Геринга, ничем не отличаются от приведенных выше. Из (55) и обобщенной леммы Геринга придем к оценке (50), в которой постоянные C и δ дополнительно зависят от p. Оцениваем первое слагаемое в правой части (50) с помощью оценки (10) теоремы 3. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. *Математический сборник.* 1957;43(85)4:451–503
2. Meyers N.G. An L^p–estimate for the gradient of solutions of second order elliptic deivergence equations *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série.* 1963;17(3):189–206.
3. Zhikov V.V. On some Variational Problems. *Russian Journal of Mathematical physics.* 1997;5(1):105–116.
4. Acerbi E., Mingione G. Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacian system. *J. Reine Angew. Math.* 2005;584:117–148.
5. Diening L., Schwarzsacher S. Global gradient estimates for the $p(\cdot)$-Laplacian. *Nonlinear Anal.* 2014;106:70–85.
6. Cimatti G., Prodi G. Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor. *Ann. Mat. Pura Appl* 1988;63:227–236.
7. Howison S.D., Rodriges J.F., Shillor M. Stationary solutions to the thermistor problem. *Journal Math. Anal. Appl.* 1993;174:573–588.
8. Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона. *Доклады РАН.* 2021;497(2):3–6.
9. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary. *Mathematics* 2021;9(23):Art number 3015.
10. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form. *C R Mécanique.* 2021;349(2):299–304.
11. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A., Maz'ya V.G. On the Bojarski – Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* 2022;245(2):1197–1211.
12. Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. Оценка Боярского – Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера. *Проблемы математического анализа.* 2022;119:107–116.
13. Чечкина А.Г. О задаче Зарембы для p-эллиптического уравнения. *Математический сборник.* 2023;214(9):144–160.
14. Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Лемма о нормальной производной и вокруг неё. *УМН* 2022;77(2):3–68.
15. Stampacchia G. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 1965;15(1):189–257.
16. Lax P.D., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. Ann. Math. Studies. vol. 33. Princeton: Princeton University Press; 1954. p. 167–190.
17. Гилбарг Д., Трудингер Н.С. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Москва: Наука; 1989.
18. Gehring F.W. The L_p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. *Acta Math.* 1973;130:265–277.
19. Giaquinta M., Modica G. Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. *Journ. für die reine und angewandte Math.* 1979;311/312:145–169.
20. Skrypnik I.V. Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Translations of Math. Monographs. Vol.139. Providence: AMS; 1994.

References

1. Boyarskii BV. Generalized solutions of a system of differential equations of first order and of elliptic type with discontinuous coefficients. (Russian) Mat. Sb. N.S. 43(85), 1957, P. 451–503. MR0106324
2. Meyers NG. An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic deivergence equations *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série.* 1963;17(3):189–206.
3. Zhikov VV. On some Variational Problems. *Russian Journal of Mathematical physics.* 1997;5(1):105–116.
4. Acerbi E., Mingione G. Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacian system. *J. Reine Angew. Math.* 2005;584:117–148.
5. Diening L., Schwarzsacher S. Global gradient estimates for the $p(\cdot)$-Laplacian. *Nonlinear Anal.* 2014;106:70–85.
6. Cimatti G., Prodi G. Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor. *Ann. Mat. Pura Appl* 1988;63:227–236.
7. Howison SD., Rodriges JF., Shillor M. Stationary solutions to the thermistor problem. *Journal Math. Anal. Appl.* 1993;174:573–588.

8. Alkhutov YuA., Chechkin GA. Increased Integrability of the Gradient of the Solution to the Zaremba Problem for the Poisson Equation. *Russian Academy of Sciencies. Doklady Mathematics.* 2021;103(2):69–71. (Translated from Доклады РАН 2021;497(2):3–6)
9. Chechkin GA. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary. *Mathematics* 2021;9(23):Art number 3015.
10. Alkhutov YuA., Chechkin GA. The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form. *C R Mécanique.* 2021;349(2):299–304.
11. Alkhutov YuA., Chechkin GA., Maz'ya VG. On the Bojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* 2022;245(2):1197–1211.
12. Chechkin GA., Chechkina TP. The Boyarsky–Meyers Estimate for Divergent Elliptic Operators of the Second Order. Two Spacial Examples. *Journal of Mathematical Sciences, New York, Springer.* 2022;268(4):523–534.
13. Chechkina AG. On the Zaremba Problem for the p-Elliptic Equation. *Sb. Math.* 2023;214(9):1321–1336.
14. Apushkinskaya DE., Nazarov AI. The Normal Derivative Lemma and Surrounding Issues. *Russian Math. Surveys.* 2022;77(2):189–249.
15. Stampacchia G. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 1965;15(1):189–257.
16. Lax PD., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. Ann. Math. Studies. vol. 33. Princeton: Princeton University Press; 1954. p. 167–190.
17. Gilbarg D., Trudinger NS. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer–Varlag; 1983.
18. Gehring FW. The L_p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. *Acta Math.* 1973;130:265–277.
19. Giaquinta M., Modica G. Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. *Journ. für die reine und angewandte Math.* 1979;311/312:145–169.
20. Skrypnik IV. Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Translations of Math. Monographs. Vol.139. Providence: AMS; 1994.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.02.2024
Поступила после рецензирования 01.04.2024
Принята к публикации 08.04.2024

Received February 17, 2024
Revised April 1, 2024
Accepted April 8, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Чечкина Александра Григорьевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа, Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН, г. Уфа, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexandra G. Chechkina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematical Analysis, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Institute of Mathematics with a Computer Center – a division of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

К содержанию