Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 3. С. 181–192.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 3. P. 181–192.

УДК 517.977.1+517.922
MSC 34H05, 34A09, 34B15, 34A60
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-181-192

О дифференциальном неравенстве для неявной управляемой системы

Серова И. Д.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии О. М. Пенкиным*)

Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина,
Россия, 392036, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
Irinka_36@mail.ru

Аннотация. В статье исследуется неявная дифференциальная управляемая система, описываемая не разрешенными относительно производной дифференциальными уравнениями первого порядка. Получены условия существования и оценки решений в виде теорем о дифференциальных неравенствах типа теоремы Чаплыгина. Используются методы теории многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах и ранее полученные автором результаты о неявных дифференциальных включениях. В первой части работы приводится утверждение о разрешимости в частично упорядоченном пространстве операторного включения, порождаемого многозначным отображением двух аргументов, по одному из которых оно накрывающее, а по другому — антитонное. Утверждение имеет вид теоремы сравнения с решением соответствующего операторного неравенства. Во второй части работы рассматривается краевая задача для системы неявных дифференциальных включений. Приводятся условия разрешимости (в классе абсолютно непрерывных функций), оценки решений, условия существования решения с наименьшей производной. В третьей основной части с использованием приведенных во второй части результатов исследуется двухточечная краевая задача для неявной дифференциальной управляемой системы. Траектория предполагается абсолютно непрерывной, управление — измеримым. Получены условия разрешимости, оценки решений, условия существования решения с наименьшим управлением и с траекторией, имеющей наименьшую производную.

Ключевые слова: управляемая система, неявное дифференциальное уравнение, краевая задача, существование и оценки решений, дифференциальное включение

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 24-21-00272, https://rscf.ru/project/24-21-00272/

Для цитирования: Серова И. Д. 2024. О дифференциальном неравенстве для неявной управляемой системы. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 181–192. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-181-192

Original Research

About the Differential Inequality for Implicit Control System

Irina D. Serova
(*Article submitted by a member of the editorial board O. M. Penkin*)

Derzhavin Tambov State University,
33 International St., Tambov, 392036, Russia
Irinka_36@mail.ru

Abstract. In this article we study an implicit differential control system described by first order differential equations not solved with respect to the derivative. Existence conditions and solution estimates in the form of theorems on differential inequalities of Chaplygin's theorem type are obtained. Methods of the theory of multivalued mappings in partially ordered spaces and results on implicit differential inclusions obtained earlier by the author are used. In the first part of the paper we give a statement on the solvability in a partially ordered space of an operator inclusion generated by a multivalued mapping of two arguments, one of which is covering and the other — antitone. The statement has the form of a comparison theorem with the solution of the corresponding operator inequality. In the second part of the paper we consider a boundary value problem for a system of implicit differential inclusions. Solvability conditions (in the class of absolutely continuous functions), estimates of solutions, and conditions for the existence of a solution with the smallest derivative are given. In the third main part, using the results given in the second part, a two-point boundary value problem for an implicit differential control system is investigated. The trajectory is assumed to be absolutely continuous, the control — measurable. Solvability conditions, solution estimates, existence conditions of the solution with the smallest control and with the trajectory having the smallest derivative are obtained.

Keywords: Control System, Implicit Differential Equation, Boundary Value Problem, Existence and Estimates of Solutions, Differential Inclusion

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Science Foundation on (project no. 24-21-00272, https://rscf.ru/project/24-21-00272/)

For citation: Serova I. D. 2024. About the Differential Inequality for Implicit Control System. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 181–192. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-181-192

1. Введение. Неявные, то есть не разрешенные относительно старшей производной, уравнения широко используются в различных разделах математики и в приложениях. В частности, такими уравнениями описывается динамика некоторых неголономных механических систем (см. [1]), электрических колебательных контуров (см. [2, с. 145, 148.]), электромагнитных полей в холодной анизотропной плазме (см. [3]), процессов термодинамики и других. Для исследования неявных дифференциальных уравнений при наличии параметров (в частности, управлений) можно использовать основанный на лемме Филиппова об измеримом выборе (см. п. 1.5.2. [4]) метод подстановки в уравнение множества возможных параметров, сводящий уравнение к включению. Возможность применения такого подхода открывают результаты о существовании, оценках и свойствах решений неявных дифференциальных включений, полученные в недавних работах [5, 6, 7].

В статье исследуется краевая задача для неявной дифференциальной управляемой системы, описываемая не разрешенными относительно производной дифференциальными уравнениями первого порядка. С использованием леммы Филиппова об измеримом выборе построена ассоциированная система неявных дифференциальных включений, для которой исследуется соответствующая краевая задача. Такой подход позволил в настоящей статье получить условия существования и оценки решений исходной управляемой системы в виде теорем о дифференциальных неравенствах типа теоремы Чаплыгина [8].

Отметим, что распространению и обобщению теоремы Чаплыгина на системы дифференциальных и интегральных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений начиная с 50-х годов XX века посвящены многочисленные публикации (см., например, монографию [9]). Однако для неявных уравнений, включений и управляемых систем подобные результаты пока фрагментарны (отметим статьи [10, 18, 20]).

2. Операторное включение в частично упорядоченном пространстве. Напомним определения используемых ниже простейших понятий теории частично упорядоченных пространств.

Обозначим $X \doteq (X, \preceq)$ — частично упорядоченное пространство. Множество $S \subset X$ называют *цепью*, если для любых его двух элементов $v, w \in S$ выполнено $v \preceq w$ или $w \preceq v$.

Элемент $\tilde{v}$ множества $X_0 \subset X$ называют *минимальным* в X_0, если для любого $v \in X_0$, $v \neq \tilde{v}$, выполнено $v \not\preceq \tilde{v}$. Элемент $\tilde{v} \in X_0$ называют *наименьшим* в этом множестве, если для любого $v \in X_0$, $v \neq \tilde{v}$, выполнено $\tilde{v} \prec v$. Аналогично определяются максимальный и наибольший элементы множества $X_0 \subset X$.

Если во множестве $X_0 \subset X$ существует такой элемент $w \in X$, что $w \preceq x$ при любом $x \in X_0$, то это множество называют *ограниченным снизу*, а элемент w — его нижней границей. Нижнюю границу $\widetilde{w}$ множества X_0 называют *инфимумом*, если $\widetilde{w} \succeq w$ для любой его нижней границы w. Аналогично определяются понятия ограниченного сверху множества, его верхней границы, супремума. Частично упорядоченное пространство называется *нижней полурешеткой*, если его любое двухэлементное множество имеет инфимум, и *верхней полурешеткой*, если любое двухэлементное множество имеет супремум. Пространство, являющееся и нижней, и верхней полурешеткой, называют *решеткой*.

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $X \doteq (X, \preceq)$ и $Y \doteq (Y, \preceq)$. Для элементов $v, w \in X$ и множества $X_0 \subset X$ обозначим

$$\mathcal{O}_X(w) \doteq \{x \in X: \ x \preceq w\}, \ \ \mathcal{O}_X(X_0) \doteq \bigcup_{\forall w \in X_0} \mathcal{O}_X(w), \ \ [v, w]_X \doteq \{x \in X: \ v \preceq x \preceq w\}.$$

Рассмотрим многозначное отображение $F: X \rightrightarrows Y$, то есть отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ непустое множество $F(x) \subset Y$.

Напомним, что отображение $F: X \rightrightarrows Y$ называют *антитонным* (*изотонным*) на множестве $X_0 \subset X$, если для любых $v, w \in X_0$ таких, что $w \preceq v$, и для любого $y \in F(v)$ существует $z \in F(w)$, удовлетворяющий неравенству $z \succeq y$ (соответственно, $z \preceq y$). Антитонное (*изотонное*) на всем X отображение называют *антитонным* (*изотонным*).

Определение 1.1 [**13**]. *Отображение $F: X \rightrightarrows Y$ будем называть упорядоченно накрывающим множество $Y_0 \subset Y$, если для любого $v \in X$ выполнено*

$$\mathcal{O}_Y\big(F(v)\big) \cap Y_0 \subset F\big(\mathcal{O}_X(v)\big). \tag{1}$$

Заметим, что если Y_0 — одноэлементное множество, $Y_0 = \{y\}$, то включение (1) равносильно импликации

$$\forall v \in X \ \ y \in \mathcal{O}_Y\big(F(v)\big) \ \Rightarrow \ y \in F\big(\mathcal{O}_X(v)\big).$$

При заданном $\widehat{y} \in Y$ рассмотрим включение

$$\widehat{y} \in F(x) \tag{2}$$

относительно неизвестного $x \in X$. Будем предполагать, что $F: X \rightrightarrows Y$ представимо в виде

$$F(x) = \Phi(x, x), \ \ \forall x \in X,$$

где отображение $\Phi : X^2 \rightrightarrows Y$ по одному аргументу обладает свойством упорядоченного накрывания, а по другому – антитонности. По отображению $\Phi : X^2 \rightrightarrows Y$, элементу $\widehat{y} \in Y$ и произвольному множеству $X_0 \subset X$ определим множество $\mathcal{S}(\Phi, X_0, \widehat{y})$ всех цепей $S \subset X_0$ таких, что имеют место соотношения

$$\forall x \in S \ \ \exists y \in \Phi(x, x) \ \ y \geq \widehat{y},$$
$$\forall x, u \in S \ \ x \prec u \ \ \Rightarrow \ \ \exists \xi \in [x, u] \ \ \widehat{y} \in \Phi(\xi, u).$$

Теорема 2.1 (см. [14, теорема 1.2]). *Пусть существуют $u_0 \in X$ и $y_0 \in \Phi(u_0, u_0)$ такие, что $y_0 \geq \widehat{y}$, и выполнены условия:*

(A) *при любом $x \in O_X(u_0)$ отображение $\Phi(\cdot, x) : X \rightrightarrows Y$ упорядоченно накрывает множество $\{\widehat{y}\}$;*
(B) *при любом $x \in O_X(u_0)$ отображение $\Phi(x, \cdot) : X \rightrightarrows Y$ является антитонным на множестве $[x, u_0]_X$;*
(C) *любая бесконечная цепь $S \in \mathcal{S}\big(\Phi, O_X(u_0), \widehat{y}\big)$ ограничена снизу, и для некоторой ее нижней границы $\omega \in X$ существует $z \in \Phi(\omega, \omega)$, удовлетворяющий неравенству $z \geq \widehat{y}$.*

Тогда включение (2) *имеет решение, среди решений существует минимальный элемент, который принадлежит множеству $O_X(u_0)$.*

Из приведенной теоремы выводятся достаточные условия существования наименьшего элемента в множестве решений включения (2).

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и для любых $x, v \in O_X(u_0)$ выполнено:*

(D) *если $\widehat{y} \in F(x)$ и $\widehat{y} \in F(v)$, то существуют $\omega \in X$, $y \in F(\omega)$ такие, что $\omega \leq x$, $\omega \leq v$ и $y \geq \widehat{y}$.*

Тогда в множестве решений включения (2) *существует наименьший элемент, и он принадлежит $O_X(u_0)$.*

Доказательство. Покажем, что минимальный в множестве решений включения (2) элемент $\omega \in O_X(u_0)$ (существование которого устанавливает теорема 2.1) является наименьшим. Предположим, что это не верно, и найдется еще одно решение u такое, что $u \not\geq \omega$. Согласно предположению (D) существует $z \in X$, такой что $z \leq u$, $z \leq \omega$ и существует $y \in F(z)$ такой, что $y \geq \widehat{y}$. Если $z = \omega$, то $\omega \leq x$, а это не верно, следовательно $z \neq \omega$, то есть $z \prec \omega$. Согласно теореме 2.1 в множестве $O_X(z) \subset O_X(u_0)$ существует решение ξ включения (2) и $\xi \leq z \prec \omega$, а это противоречит тому, что ω минимальное решение.

3. Существование и оценка решений краевой задачи для дифференциального включения. Обозначим через W^n пространство измеримых (по Лебегу) функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с «естественным» покоординатным порядком.

Напомним, что множество $U \subset W^n$ называют *интегрально ограниченным снизу*, если существует такое $C \in \mathbb{R}$, что для любой функции $u \in U$ справедливо неравенство $\int_a^b u(t)dt \geq C$.

Для обозначения действия многозначного отображения, имеющего компактные в $\mathbb{R}^m$ значения, вместо символа $\rightrightarrows \mathbb{R}^m$ далее будем писать $\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, а в случае компактных связных значений будем писать $\to \mathrm{K}^{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^m)$.

По аналогии с «обычной» функцией, многозначное отображение $G : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ назовем *непрерывным справа в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$ (см. [15]), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ выполнено $H_{\mathbb{R}^m}\big(G(x_0), G(x)\big) < \varepsilon$. Здесь символом $H_{\mathbb{R}^m}$ обозначено расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве $\mathbb{R}^m$. Аналогично определяется свойство непрерывности слева многозначного отображения $G : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$.

Пусть заданы многозначные отображения $\mathbf{G} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, $B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ и диагональная $n \times n$ матрица $\lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\mathbf{G}(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0, \ \ t \in [a, b], \tag{3}$$

при дополнительном ограничении на искомую функцию

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - \lambda x(t) \in B(t), \ \ t \in [a, b]. \tag{4}$$

Обозначим $L^n \subset W^n$ — пространство суммируемых функций $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ с покоординатным порядком, AC^n — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in L^n$. Заметим, что для любой функции $x \in AC^n$ включения $\dot{x} \in L^n$ и $\mathcal{L}x \in L^n$ равносильны. Определим подмножество $L(B)$ пространства L^n, содержащее все суммируемые сечения многозначного отображения $B : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$, и подмножество $AC_{\mathcal{L}}(B)$ пространства AC^n таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, что $\mathcal{L}x \in L(B)$.

Решением системы включений (3),(4) будем называть всякую функцию $x \in AC_{\mathcal{L}}(B)$, удовлетворяющую включению (3) при п. в. $t \in [a, b]$.

Пусть заданы две диагональные $n \times n$ матрицы $\alpha = \mathrm{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\beta = \mathrm{diag}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ такие, что

$$\alpha_i > 0, \ \ \beta_i < 0, \ \ \lambda_i \neq \ln\left(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right), \ \ i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Для заданного вектора $\gamma \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим краевую задачу для системы (3),(4) с условием

$$\alpha x(a) + \beta x(b) = \gamma. \tag{6}$$

Будем обозначать множество ее решений через $\mathcal{R}$.

Для рассматриваемого отображения со значениями $\mathbf{G}(t,x,v,w)$ сделаем замену переменных

$$v = z + \lambda x, \quad w = y + \lambda x. \tag{7}$$

Тем самым по заданному отображению $\mathbf{G}$ определим отображение $\mathbf{G}^\lambda : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$,

$$\mathbf{G}^\lambda(t,x,z,y) = \mathbf{G}(t,x,z+\lambda x, y+\lambda x). \tag{8}$$

Будем предполагать, что многозначные отображения $\mathbf{G}^\lambda$ и B удовлетворяют следующим условиям:

• *при любых $x,z,y \in \mathbb{R}^n$ отображение $\mathbf{G}^\lambda(\cdot,x,z,y) : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ измеримо*;

• *при п. в. $t \in [a,b]$ и любых $y \in \mathbb{R}^n$ отображение $\mathbf{G}^\lambda(t,\cdot,\cdot,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно справа по каждому скалярному аргументу $x_1,\dots,x_n$ и $z_1,\dots,z_n$*;

• *при п. в. $t \in [a,b]$ и любых $x,z \in \mathbb{R}^n$ отображение $\mathbf{G}^\lambda(t,x,z,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно*;

• *множество измеримых сечений многозначного отображения $B : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ не пусто и интегрально ограничено снизу.*

Отметим, что для многозначного отображения $\mathbf{G}^\lambda$ не предполагается выполнение условий Каратеодори. Тем не менее приведенные условия обеспечивают его суперпозиционную измеримость (см. [15, теорема 2.1]).

При произвольных $q = (q_1,\dots,q_n) \in L^n$, $c = (c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу

$$\mathcal{L}x = q, \quad \alpha x(a) + \beta x(b) = c. \tag{9}$$

В силу неравенств (5) эта задача при любых $q \in L^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ имеет единственное решение $x = (x_1,\dots,x_n) \in AC^n$, определяемое формулой

$$x = \mathsf{W}(q,c),$$

где отображение $\mathsf{W} : L^n \times \mathbb{R}^n \to AC^n$ – это интегральный оператор

$$\mathsf{W}(q,c) = (\mathsf{W}_1(q_1,c_1),\dots,\mathsf{W}_n(q_n,c_n)), \tag{10}$$

компоненты которого определяются соотношениями

$$(\mathsf{W}_i(q_i,c_i))(t) = X_i(t)c_i + \int_a^b \mathcal{W}_i(t,s)q_i(s)ds, \quad t \in [a,b], \tag{11}$$

$$X_i(t) = \frac{e^{\lambda_i t}}{\alpha_i + \beta_i e^{\lambda_i}}, \quad \mathcal{W}_i(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i e^{\lambda_i(t-s)}}{\alpha_i + \beta_i e^{\lambda_i}}, & a \le s \le t \le b, \\ \dfrac{-\beta_i e^{\lambda_i(t-s+1)}}{\alpha_i + \beta_i e^{\lambda_i}}, & a \le t < s \le b, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Обозначим

$$D(t) \doteq \big\{ \big(\mathsf{W}(q,\gamma)\big)(t) : q \in W(B) \big\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in [a,b],$$

$$\Omega \doteq \big\{ (t,x,z,y) : t \in [a,b], \ x \in D(t), \ z \in B(t), \ y \in B(t) \big\}$$

и определим сужение $\mathbf{G}^\lambda_\Omega : \Omega \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ многозначного отображения $\mathbf{G}^\lambda$ на множество Ω.

Теорема 3.1 (см. [7, теорема 2.1]). *Пусть задана функция $\eta_0 \in AC_{\mathcal{L}}(B)$ такая, что*

$$\mathbf{G}(t,\eta_0(t),\dot\eta_0(t),\dot\eta_0(t)) \cap \mathbb{R}^m_+ \ne \emptyset, \quad t \in [a,b], \tag{13}$$

$$\alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b) \ge \gamma. \tag{14}$$

Пусть также выполнены следующие условия:

(A) *при п. в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in D(t)$, $z \in B(t)$ отображение $\mathbf{G}^\lambda_\Omega(t,x,z,\cdot) : B(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$*;

(B) *для п. в. $t \in [a,b]$ и любых $z,y \in \mathbb{R}^n$, при $i = \overline{1,n}$ таких, что $\lambda_i > \ln\left(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)$, отображение $\mathbf{G}^\lambda(t,x_1,\dots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\dots,z,y) : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ изотонно, а при $i = \overline{1,n}$ таких, что $\lambda_i < \ln\left(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)$, отображение $\mathbf{G}^\lambda(t,x_1,\dots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\dots,z,y) : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ антитонно;*

(C) *при п. в. $t \in [a,b]$ и любых $x,y \in \mathbb{R}^n$ отображение $\mathbf{G}^\lambda(t,x,\cdot,y) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ антитонно.*

Тогда задача (3),(4),(6) *разрешима, то есть множество* $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$ *ее решений не пусто, а в множестве* $\mathcal{LR} \subset L(B)$ *существует минимальный элемент* $\mathcal{L}x$, $x \in \mathcal{R}$, *и для него при п. в.* $t \in [a, b]$ *выполнено* $(\mathcal{L}x)(t) \le (\mathcal{L}\eta_0)(t)$.

Замечание 3.1. *Утверждение теоремы 3.1, очевидно, остается верным, если в условии* (5) *заменить знаки неравенства на противоположные, то есть*

$$\alpha_i < 0, \ \ \beta_i > 0, \ \ i = \overline{1, n}.$$

При этом в условии (14) в неравенстве для краевого условия также необходимо заменить знак, то есть

$$\alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b) \le \gamma.$$

Действительно, при таких предположениях, для эквивалентного краевого условия $-\alpha x(a) - \beta x(b) = -\gamma$ *будут выполнены предположения теоремы 3.1.*

Приведем дополнительные условия к условиям теоремы 3.1, при выполнении которых для краевой задачи (3),(4),(6) во множестве $\mathcal{LR}$ существует не только минимальный, но и наименьший элемент.

Будем предполагать, что $m = n$ и каждая i-я компонента $\mathbf{G}_i$, $i = \overline{1, n}$, многозначного отображения $\mathbf{G}$ может быть записана в виде

$$\mathbf{G}_i(t, x, v, w_i), \ \text{где} \ \mathbf{G}_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$$

($\mathbf{G}_i$ не зависит от переменных $w_1, \dots w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n$). В этом случае включение (3) представляет собой систему

$$\mathbf{G}_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) \ni 0, \ \ t \in [a, b], \ \ i = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Следствие 3.1. *Пусть для задачи* (15),(4),(6) *выполнены предположения теоремы 3.1, а множество* $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ *при п. в.* $t \in [a, b]$ *является нижней полурешеткой. Тогда во множестве* $\mathcal{LR} \subset L(B)$ *существует наименьший элемент.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что в множестве $\mathcal{LR} \subset L(B)$ существует минимальный элемент $\mathcal{L}x$, $x \in \mathcal{R}$. Докажем, что этот элемент будет наименьшим в $\mathcal{LR}$.

Предположим, что это не верно, а значит существует также решение $\underline{x} \in \mathcal{R}$ такое, что функция $\mathcal{L}\underline{x}$ не сравнима с $\mathcal{L}x$. Определим измеримую функцию $z = (z_1, \dots, z_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами

$$z_i(t) = \min\left\{\dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t),\, \underline{\dot{x}}_i(t) - \lambda_i \underline{x}_i(t)\right\}, \ \ t \in [a, b], \ \ i = \overline{1, n}.$$

Так как при п. в. $t \in [a, b]$ выполнено $z(t) = \min\left\{(\mathcal{L}x)(t), (\mathcal{L}\underline{x})(t)\right\}$, где $(\mathcal{L}x)(t), (\mathcal{L}\underline{x})(t) \in B(t)$, а множество $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ является нижней полурешеткой, то $z(t) \in B(t)$. Очевидно, функция z суммируема, следовательно, $z \in L(B)$. Определим функцию $\varsigma = (\varsigma_1, \dots, \varsigma_n) \in AC(B)$ соотношением $\varsigma \doteq \mathsf{W}(z, \gamma)$, где отображение $\mathsf{W} : L^n \times \mathbb{R}^n \to AC^n$ задано выше формулами (10),(11),(12).

Для любого $i = \overline{1, n}$ определим множества

$$E_i = \left\{t \in [a, b] : z_i(t) = \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t)\right\}, \ \ \underline{E}_i = [a, b] \setminus E_i.$$

Вследствие этого определения $z_i(t) = \underline{\dot{x}}_i(t) - \lambda_i \underline{x}_i(t)$ при п. в. $t \in \underline{E}_i$. При п. в. $t \in E_i$ выполнено $\mathbf{G}_i^{\lambda}(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t)) = \mathbf{G}_i^{\lambda}(t, \varsigma(t), z(t), \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t))$. А поскольку на $[a, b]$ имеет место включение $0 \in \mathbf{G}_i^{\lambda}(t, x(t), (\mathcal{L}x)(t), \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t))$, то в силу антитонности отображения $\mathbf{G}_i^{\lambda}(t, \cdot, \cdot, \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t))$ при п. в. $t \in E_i \subset [a, b]$ существует $y \ge 0$ такой, что выполнено $y \in \mathbf{G}_i^{\lambda}(t, \varsigma(t), z(t), \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t)) = \mathbf{G}_i^{\lambda}(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t))$.

Аналогично доказывается, что при п. в. $t \in \underline{E}_i$ существует $y \ge 0$, удовлетворяющий включению $y \in \mathbf{G}_i(t, \varsigma(t), z(t), \underline{\dot{x}}_i(t) - \lambda_i \underline{x}_i(t)) = \mathbf{G}_i(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t)) = \mathbf{G}_i(t, \varsigma(t), (\mathcal{L}\varsigma)(t), \dot{\varsigma}_i(t) - \lambda_i \varsigma_i(t))$. Таким образом, при любом i почти всюду на $[a, b]$ имеет место $\mathbf{G}_i(t, \varsigma(t), (\mathcal{L}\varsigma)(t), \dot{\varsigma}_i(t) - \lambda_i \varsigma_i(t)) \cap \mathbb{R}_+ \ne \emptyset$. Итак, $\mathbf{G}(t, \varsigma(t), (\mathcal{L}\varsigma)(t), (\mathcal{L}\varsigma)(t)) \cap \mathbb{R}_+^n \ne \emptyset$, $t \in [a, b]$. Из этого соотношения согласно теореме 3.1 следует существование решения ζ краевой задачи (15),(4),(6) такого, что $\mathcal{L}\zeta \le z < \mathcal{L}x$. Но это неравенство противоречит тому, что $\mathcal{L}x$ является минимальным элементом в множестве $\mathcal{LR}$.

Следствие доказано.

Для задачи Коши близкое утверждение о существовании решения с наименьшей производной получено в [16, теорема 3].

Сформулируем утверждение, в котором условие (A) теоремы 3.1 заменим на легче проверяемое, при этом, как и в следствии 3.1, будет гарантировано существование во множестве $\mathcal{LR}$ наименьшего элемента.

Пусть снова $m = n$. Будем предполагать, что компонентами функции $\mathbf{G}$ являются функции $\mathbf{G}_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}^{\mathrm{C}}(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, n}$, (имеющие значениями связные компактные множества в $\mathbb{R}$, то есть конечные отрезки). Соответственно (3) — это система (15).

Для рассматриваемого здесь отображения $\mathbf{G}$ отображение $\mathbf{G}^{\lambda}$, определяемое соотношением (8), будет иметь компонентами функции

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}_i^{\lambda} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}^{\mathrm{C}}(\mathbb{R}), \\ &\mathbf{G}_i^{\lambda}(t,x,z,y_i) = \mathbf{G}_i(t,x,z+\lambda x, y_i + \lambda_i x_i), \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее, пусть заданы функции $\omega_0, \eta_0 \in AC^n$ такие, что $\mathcal{L}\omega_0 \le \mathcal{L}\eta_0$. Зададим многозначное отображение $B : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$B(t) \doteq \big[(\mathcal{L}\omega_0)(t), (\mathcal{L}\eta_0)(t)\big]_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [a,b]. \tag{17}$$

Сформулируем условия разрешимости рассматриваемой краевой задачи с ограничением (4), задаваемым многозначным отображением (17).

Следствие 3.2. *Пусть для многозначной функции* $\mathbf{G}^{\lambda} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}^{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ *с компонентами* (16) *выполнены условия* (B), (C) *теоремы 3.1, а для функций* $\eta_0, \omega_0 \in AC^n$ *выполнено*

$$\begin{gathered} \alpha\omega_0(a) + \beta\omega_0(b) \le \gamma \le \alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b), \quad \mathcal{L}\omega_0 \le \mathcal{L}\eta_0, \\ \mathbf{G}\big(t, \eta_0(t), \dot\eta_0(t), \dot\eta_0(t)\big) \cap \mathbb{R}_+^n \ne \emptyset \ \text{ при п. в. } t \in [a,b], \\ -\mathbf{G}\big(t, \omega_0(t), \dot\omega_0(t), \dot\omega_0(t)\big) \cap \mathbb{R}_+^n \ne \emptyset \ \text{ при п. в. } t \in [a,b]. \end{gathered}$$

Тогда задача (15),(4),(6) *разрешима, то есть множество* $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$ *ее решений не пусто, а в множестве* $\mathcal{L}\mathcal{R} \subset L(B)$ *существует наименьший элемент.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения прямо следует из следствия 3.1. Надо лишь показать, что для отображения $\mathbf{G}_{\Omega}^{\lambda}$ выполнено условие (A) теоремы 3.1.

Обозначим через B_i, $i = \overline{1,n}$, компоненты многозначного отображения $B : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$, то есть $B_i : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}), B_i(t) \doteq \big[\omega_{0i}(t) - \lambda_i\omega_{0i}(t), \eta_{0i}(t) - \lambda_i\eta_{0i}(t)\big], t \in [a,b]$. Для каждого i определим множество $T_i \subset [a,b]$ таких $t \in [a,b]$, что при любых $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in B(t)$ отображение $\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,\cdot) : B_i(t) \to \mathrm{K}^{\mathrm{C}}(\mathbb{R})$ непрерывно и выполнено $-\infty < \mathcal{L}\omega_0(t), \mathcal{L}\eta_0(t) < +\infty$. Мера этого множества равна $b - a$, и при всех $t \in T_i$ множество $B_i(t)$ есть конечный отрезок. Проверим выполнение условия (A) теоремы 3.1. Пусть для произвольного $i = \overline{1,n}$, при некотором $t \in T_i$ существуют такие $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in B(t)$, что i-ая компонента отображения $\mathbf{G}_{\Omega}^{\lambda}(t,x,z,\cdot)$, то есть отображение $\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,\cdot) : B_i(t) \to \mathrm{K}^{\mathrm{C}}(\mathbb{R})$ не является упорядоченно накрывающим множество $\{0\} \subset \mathbb{R}$. Тогда существует такое $\underline{y} \in \mathbb{R}$, что множество $\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,\underline{y})$ содержит некоторое положительное число, а при любом значении $y \in [\omega_{0i}(t) - \lambda_i\omega_{0i}(t), \underline{y}]$ ноль не принадлежит множеству $\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,y)$. Покажем, что существует такое $\delta > 0$, что при любом $y \in [\omega_{0i}(t) - \lambda_i\omega_{0i}(t), \underline{y}]$ выполнено

$$\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,y) \cap (-\delta, \delta) = \emptyset. \tag{18}$$

В противном случае существует последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [\omega_{0i}(t) - \lambda_i\omega_{0i}(t), \underline{y}]$ такая, что при любом k найдется $\varsigma_k \in \mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,y_k)$, $|\varsigma_k| < 2^{-k}$. Последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ компактна, поэтому содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\overline{y} \in [\omega_{0i}(t) - \lambda_i\omega_{0i}(t), \underline{y}]$. Вследствие непрерывности отображения $\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,\cdot)$ в точке $\overline{y}$ будет выполнено включение $0 \in \mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,\overline{y})$, которое противоречит принятым предположениям.

Из (18) в силу связности значений $\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,y)$ следует, что отрезок $E \doteq [\omega_{0i}(t) - \lambda_i\omega_{0i}(t), \underline{y}]$ является объединением двух множеств

$$E_+ \doteq \{y \in U : \mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,y) \subset [\delta, +\infty)\}, \quad E_- \doteq \{y \in U : \mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,y) \subset (-\infty, -\delta]\}.$$

Оба эти множества должны быть замкнутыми, так как отображение $\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,\cdot)$ непрерывно. Однако это невозможно вследствие связности отрезка $E\Sigma$. Итак, доказано, что при любом $t \in T_i$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $z \in B(t)$ отображение $\mathbf{G}_{\Omega i}^{\lambda}(t,x,z,\cdot) : B_i(t) \to \mathrm{K}^{\mathrm{C}}(\mathbb{R})$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}$. А так как мера множества T_i равна $b - a$, условие (A) действительно выполнено.

Остается заметить, что определяемое равенством (17) множество $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п. в. $t \in [a,b]$ является нижней полурешеткой. Тогда из следствия 3.1 следует существование решения задачи (15),(4),(6) с наименьшей производной.

Следствие доказано.

4. Краевая задача для управляемой системы. Применим приведенные выше в пункте 3 результаты к исследованию краевой задачи для управляемой системы неявных дифференциальных уравнений.

Пусть заданы функция $\mathbf{g} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ и многозначное отображение $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- *при п. в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *функция* $\mathbf{g}(t,x,v,\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *непрерывна*;

• *при любом* $u \in \mathbb{R}^m$ *функция* $\mathrm{g}(\cdot,\cdot,\cdot,u) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *суперпозиционно измерима (то есть для любых измеримых функций* $x(\cdot), v(\cdot)$ *функция* $\mathrm{g}(\cdot, x(\cdot), v(\cdot), u)$ *измерима)*;

• *многозначное отображение* $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^m)$ *суперпозиционно измеримо.*

Рассмотрим на $[a,b]$ управляемую систему

$$\mathrm{g}(t,x,\dot{x},u) = 0 \tag{19}$$

с обратной связью

$$u(t) \in U(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{20}$$

Решением системы (19),(20) будем называть пару функций, удовлетворяющих при п. в. $t \in [a,b]$ обоим соотношениям (19),(20), из которых первая, называемая *траекторией* — это абсолютно непрерывная функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, а вторая, называемая *управлением* — измеримая функция $u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$.

Определим дифференциальное включение, ассоциированное с управляемой системой (19),(20). Зададим многозначное отображение $G : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ формулой

$$G(t,x,v) \doteq \mathrm{g}\big(t,x,v,U(t,x,v)\big), \quad (t,x,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

Заметим, что из непрерывности функции $\mathrm{g}(t,x,v,\cdot)$ и компактности множества $U(t,x,v)$ следует, что отображение G имеет компактные значения. Кроме того, легко проверить, что G суперпозиционно измеримо. Рассмотрим включение

$$0 \in G(t,x,\dot{x}), \quad t \in [a,b]. \tag{21}$$

Приведем утверждение, позволяющее «переходить» от рассматриваемой здесь «неявной» управляемой системы (19),(20) к дифференциальному включению (21).

Лемма 4.1 (см. [16, лемма 1]). *Управляемая система* (19),(20) *равносильна включению* (21)*, то есть если пара* $(x,u) \in AC^n \times W^m$ *— решение управляемой системы* (19),(20)*, то* $x \in AC^n$ *является решением включения* (21)*, и обратно, если* $x \in AC^n$ *— решение включения* (21)*, то существует функция* $u \in W^m$ *такая, что пара* (x,u) *является решением системы* (19),(20).

Приведенное утверждение аналогично известной теореме о равносильности управляемой дифференциальной системы, разрешенной относительно производной, соответствующему дифференциальному включению (см, например [4, теорема 3.4.1]).

Теперь применим лемму 4.1 к исследованию существования решений краевой задачи для управляемой системы. Для удобства формулировок систему (19),(20) запишем в несколько ином виде.

Пусть заданы функция $\mathfrak{g} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, многозначные отображения $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ и $B : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Пусть также заданы диагональные $n \times n$ матрицы $\alpha \doteq \operatorname{diag}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, $\beta \doteq \operatorname{diag}\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$, $\lambda \doteq \operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ такие, что выполнены соотношения (5). Рассмотрим краевую задачу для управляемой системы

$$\mathfrak{g}(t,x,\dot{x},\dot{x},u) = 0, \quad t \in [a,b], \tag{22}$$

с обратной связью (20) при краевом условии (6) и дополнительном ограничении (4). Множество решений этой задачи обозначим через $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B)$. Согласно определению решения управляемой системы $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B) \subset AC(B) \times W^m$. Будем рассматривать также множество $\mathcal{L}\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B) \subset L(B) \times W^m$ пар $(\mathcal{L}x, u)$ таких, что $(x,u) \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B)$. Определим операторы проектирования $\pi_1 : AC(B) \times W^m \to AC(B)$ и $\pi_2 : AC(B) \times W^m \to W^m$ соотношениями

$$\forall \vartheta = (x,u) \in AC(B) \times W^m \ \ \pi_1\vartheta = x, \quad \pi_2\vartheta = u.$$

Для порождающих рассматриваемую управляемую систему отображений

$$[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (t,x,v,w,u) \mapsto \mathfrak{g}(t,x,v,w,u) \in \mathbb{R}^k,$$
$$[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (t,x,v) \mapsto U(t,x,v) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$$

сделаем замену переменных (7). Тем самым определим функцию $\mathfrak{g}^\lambda : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ и многозначное отображение $U^\lambda : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ соотношениями

$$\mathfrak{g}^\lambda(t,x,z,y,u) = \mathfrak{g}(t,x,z+\lambda x, y+\lambda x, u), \quad U^\lambda(t,x,z) = U(t,x,z+\lambda x). \tag{23}$$

Будем предполагать, что функция $\mathfrak{g}^\lambda$ и многозначные отображения U^λ, B удовлетворяют следующим условиям:

• *при любых* $x,z,y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ *функция* $\mathfrak{g}^\lambda(\cdot,x,z,y,u) : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *измерима*;

• *при п. в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ *функция* $\mathfrak{g}^\lambda(t,\cdot,\cdot,y,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *непрерывна справа по каждому скалярному аргументу* $x_1,\dots,x_n$ *и* $z_1,\dots,z_n$;

• *при п. в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x, z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ *функция* $\mathfrak{g}^\lambda(t,x,z,\cdot,u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *непрерывна;*
• *при п. в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x, z, y \in \mathbb{R}^n$ *функция* $\mathfrak{g}^\lambda(t,x,z,y,\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *непрерывна;*
• *при любых* $x, z \in \mathbb{R}^n$ *отображение* $U^\lambda(\cdot,x,z) : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *измеримо;*
• *при п. в.* $t \in [a,b]$ *отображение* $U^\lambda(t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *непрерывно справа по каждой компоненте* $x_1, \ldots, x_n$ *и* $z_1, \ldots, z_n$ *векторных аргументов* $x, z \in \mathbb{R}^n$;
• *множество измеримых сечений многозначного отображения* $B : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *не пусто и интегрально ограничено снизу.*

В силу принятых здесь предположений, согласно [15, теорема 2.1], функция $\mathfrak{g}^\lambda$ и многозначное отображение U^λ являются суперпозиционно измеримыми (несмотря на то, что они не удовлетворяют условиям Каратеодори).

При произвольных $q = (q_1, \ldots, q_n) \in L^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу (9). В силу условия (5) эта задача при любых $q \in L^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ имеет единственное решение $x = (x_1, \ldots, x_n) \in AC^n$, определяемое формулой $x = \mathsf{W}(q,c)$, где интегральный оператор $\mathsf{W} : L^n \times \mathbb{R}^n \to AC^n$ определяется соотношениями (10),(11),(12).

Для каждого $t \in [a,b]$ определим множества

$$D(t) \doteq \big\{ \big(\mathsf{W}(q,\gamma)\big)(t) :\ q \in W(B) \big\} \subset \mathbb{R}^n, \ \ \mathcal{U}^\lambda(t) \doteq U^\lambda(t, D(t), B(t)) \subset \mathbb{R}^m.$$

Далее определим множества

$$\Omega \doteq \big\{ (t,x,z,y,u) :\ t \in [a,b],\ x \in D(t),\ z \in B(t),\ y \in B(t),\ u \in \mathcal{U}^\lambda(t) \big\},$$
$$\Theta \doteq \big\{ (t,x,z) :\ t \in [a,b],\ x \in D(t),\ z \in B(t) \big\}$$

и зададим сужение $\mathfrak{g}^\lambda_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}^k$ функции $\mathfrak{g}^\lambda$ на множество Ω и сужение $U^\lambda_\Theta : \Theta \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ многозначного отображения U^λ на множество Θ.

Теорема 4.1. *Пусть заданы функции* $\eta_0 \in AC_{\mathcal{L}}(B)$ *и* $u_0 \in W^m$ *такие, что* $u_0(t) \in U(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t))$, $t \in [a,b]$, *и справедливы неравенства*

$$\mathfrak{g}\big(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t), u_0(t)\big) \geq 0 \ \ \textit{при п. в.}\ \ t \in [a,b], \quad \alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b) \geq \gamma. \tag{24}$$

Пусть далее выполнены следующие условия:

(A) *при п. в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x \in D(t), z \in B(t), u \in \mathcal{U}^\lambda(t)$ *функция* $\mathfrak{g}^\lambda_\Omega(t,x,z,\cdot,u) : B(t) \to \mathbb{R}^k$ *упорядоченно накрывает множество* $\{0\} \subset \mathbb{R}^k$;

(B) *при п. в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $z, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ *для всех* $i = \overline{1,n}$ *таких, что* $\lambda_i > \ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$, *функция* $\mathfrak{g}^\lambda(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, z, y, u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ *возрастает, а для* $i = \overline{1,n}$ *таких, что* $\lambda_i < \ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$, *функция* $\mathfrak{g}^\lambda(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, z, y, u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ *убывает;*

(C) *при п. в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ *функция* $\mathfrak{g}^\lambda(t,x,\cdot,y,u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *убывает;*

(D) *при п. в.* $t \in [a,b]$ *отображение* $U^\lambda_\Theta(t,\cdot,\cdot) : D(t) \times B(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *изотонно.*

Тогда для управляемой системы (22) *с обратной связью* (20) *и ограничением* (4) *существует решение* (x,u) *краевой задачи с условием* (6) *такое, что* $\mathcal{L}x \leq \mathcal{L}\eta_0$ *и* $u \leq u_0$. *Более того, в множестве* $\mathcal{L}\mathrm{Sol}^U_{\mathfrak{g}}(B)$ *существует пара* $(\mathcal{L}\underline{x}, \underline{u})$ *такая, что* $\mathcal{L}\underline{x}$ *— минимальный элемент в* $\pi_1\big(\mathcal{L}\mathrm{Sol}^U_{\mathfrak{g}}(B)\big)$ *и выполнено* $\mathcal{L}\underline{x} \leq \mathcal{L}\eta_0$ *и* $\underline{u} \leq u_0$.

Доказательство. Определим многозначное отображение $\mathbf{G} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ при $(t,x,v,w) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ формулой

$$\mathbf{G}(t,x,v,w) \doteq \mathfrak{g}\big(t,x,v,w,U(t,x,v)\big). \tag{25}$$

Рассмотрим включение

$$\mathbf{G}(t,x,\dot{x},\dot{x}) \ni 0, \quad t \in [a,b]. \tag{26}$$

В силу леммы 4.1 управляемая система (22),(20) равносильна включению (26), то есть если пара $(x,u) \in AC^n \times W^m$ — решение управляемой системы (22),(20), то $x \in AC^n$ является решением включения (26), и обратно, если $x \in AC^n$ — решение включения (26), то существует функция $u \in W^m$ такая, что пара (x,u) является решением системы (22),(20).

Обозначим множество решений включения (26) при ограничении (4) с краевым условием (6) через $\mathcal{R}$, соответственно, обозначим $\mathcal{L}\mathcal{R} \doteq \{\mathcal{L}x,\ x \in \mathcal{R}\}$. Согласно (4) выполнено $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$.

Для рассматриваемого отображения со значениями $\mathbf{G}(t,x,v,w)$ сделаем замену переменных (7), тем самым по заданному отображению $\mathbf{G}$ определим отображение $\mathbf{G}^\lambda : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$,

$$\mathbf{G}^\lambda(t,x,z,y) = \mathbf{G}(t,x,z+\lambda x, y+\lambda x).$$

Заметим, что

$$\mathbf{G}^\lambda(t,x,z,y) = \mathfrak{g}^\lambda\big(t,x,z,y,U^\lambda(t,x,z)\big). \tag{27}$$

Для дифференциального включения (26) при ограничении (4) с краевым условием (6) выполнены все предположения теоремы 3.1 (то есть отображения $B, \mathbf{G}$ и, соответственно, $\mathbf{G}^\lambda$ удовлетворяют условиям

(A)–(C) этой теоремы и неравенствам (13),(14)). Следовательно, множество $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$ решений краевой задачи (26),(4),(6) не пусто, а в множестве $\mathcal{LR} \subset L(B)$ существует минимальный элемент $\underline{x}$, и для него выполнено $\mathcal{L}\underline{x} \le \mathcal{L}\eta_0$. Поэтому, множество $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B)$ решений управляемой системы (22),(20) при условиях (6),(4) не пусто и существует пара $(\underline{x}, u) \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B)$ такая, что $\mathcal{L}\underline{x}$ — минимальный элемент в $\pi_1\big(\mathcal{L}\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B)\big)$ и выполнено $\mathcal{L}\underline{x} \le \mathcal{L}\eta_0$.

Управление, соответствующее траектории $\underline{x}$, удовлетворяет включению $u(t) \in U(t, \underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))$ при п. в. $t \in [a, b]$. Вследствие изотонности отображения $U_{\Theta}^{\lambda}(t, \cdot, \cdot) : D(t) \times B(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ при п. в. $t \in [a, b]$ множество $\underline{U}(t) = U^{\lambda}\big(t, \underline{x}(t), (\mathcal{L}\underline{x})(t)\big) \cap O_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$ не пусто, соответствующее многозначное отображение $\underline{U} : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ является пересечением измеримых отображений, поэтому само измеримо. Для любого измеримого сечения $\underline{u}$ отображения $\underline{U}$ пара $(\underline{x}, \underline{u})$ — решение рассматриваемой задачи управления и, очевидно, $\underline{u} \le u_0$.

Теорема доказана.

Замечание 4.1. *Утверждение теоремы 4.1, очевидно, остается верным, если в условии* (5) *заменить знаки неравенства на противоположные, то есть $\alpha_i < 0$, $\beta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. При этом в условии* (24) *в неравенстве для краевого условия также необходимо заменить знак, то есть $\alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b) \le \gamma$. Действительно, при таких предположениях для эквивалентного краевого условия $-\alpha x(a) - \beta x(b) = -\gamma$ будут выполнены предположения теоремы 4.1.*

Получим дополнительные условия к условиям теоремы 4.1, которые обеспечат существование наименьшей траектории и наименьшего допустимого управления.

Пусть $k = n$. Будем предполагать, что каждая i-я компонента $\mathfrak{g}_i$, $i = \overline{1, n}$, функции $\mathfrak{g}$ может быть записана в виде

$$\mathfrak{g}_i(t, x, v, w_i, u), \text{ где } \mathfrak{g}_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

($\mathfrak{g}_i$ не зависит от переменных $w_1, \dots w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n$). В этом случае уравнение (22) представляет собой систему

$$\mathfrak{g}_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i, u) = 0, \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}. \tag{28}$$

Следствие 4.1. *Пусть для системы* (28),(20),(6),(4) *выполнены предположения теоремы 4.1, а множество $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п. в. $t \in [a, b]$ является нижней полурешеткой. Тогда существует траектория $\underline{x} \in AC_{\mathcal{L}}(B)$ такая, что $\mathcal{L}\underline{x}$ — наименьший элемент в $\pi_1(\mathcal{L}\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B))$. Если кроме перечисленных условий при п. в. $t \in [a, b]$ и любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ множество $U(t, x, v) \subset \mathbb{R}^m$ является нижней полурешеткой, то в множестве $\mathcal{L}\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B)$ существует наименьший элемент, то есть такая пара $(\mathcal{L}\underline{x}, \underline{u})$, что ее первая компонента $\mathcal{L}\underline{x}$ — это наименьший элемент в множестве $\pi_1(\mathcal{L}\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B))$, а вторая компонента $\underline{u}$ — наименьший элемент в $\pi_2\big(\mathcal{L}\mathrm{Sol}_{\mathfrak{g}}^{U}(B)\big)$.*

Доказательство. Дифференциальное включение (26), равносильное рассматриваемой управляемой системе, порождается многозначным отображением (25), компоненты которого здесь могут быть представлены в виде

$$\mathbf{G}_i(t, x, v, w_i) \doteq \mathfrak{g}_i\big(t, x, v, w_i, U(t, x, v)\big), \quad i = \overline{1, n}.$$

Итак, включение (26) в рассматриваемом случае — это система

$$\mathbf{G}_i(t, x, v, w_i) \ni 0, \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}.$$

Краевая задача для этого включения с условиями (6),(4) удовлетворяет предположениям теоремы 4.1. А так как еще и $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п. в. t является нижней полурешеткой, то согласно следствию 3.1, в множестве $\mathcal{R}$ решений этой краевой задачи (то есть траекторий управляемой системы) имеется функция $\underline{x} \in AC_{\mathcal{L}}(B)$ такая, что $\mathcal{L}\underline{x}$ — наименьший элемент в $\mathcal{LR}$.

Пусть теперь в дополнение к рассмотренным условиям при п. в. $t \in [a, b]$ и любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ множество $U(t, x, v) \subset \mathbb{R}^m$ является нижней полурешеткой. Определим многозначное отображение $\underline{U} : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, $\underline{U}(t) \doteq U\big(t, \underline{x}(t), (\mathcal{L}\underline{x})(t)\big) \cap O_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$. Это отображение измеримо. Докажем, что в множестве его измеримых сечений имеется наименьший элемент.

Для $j = \overline{1, m}$ определим оператор проектирования $Pr_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $Pr_j(u_1, \dots, u_j, \dots, u_m) \doteq u_j$. Положим $\underline{U}_j(t) \doteq Pr_j(\underline{U}(t)) = \{u_j = Pr_j u, \ u \in \underline{U}(t)\}$, $t \in [a, b]$. В компактном непустом множестве $\underline{U}_j(t)$ имеется наименьший элемент $\underline{u}_j(t)$. Так как значение $u_{0j}(t) - \underline{u}_j(t)$ есть расстояние по Хаусдорфу между множествами $\{u_{0j}(t)\}$ и $\underline{U}_j(t)$, то согласно [4, Следствие 1.5.9] функция $u_{0j}(\cdot) - \underline{u}_j(\cdot)$ измерима. Поэтому функция $\underline{u}_j(\cdot)$ также измерима. Так как при п. в. $t \in [a, b]$ множество $\underline{U}(t)$ является нижней решеткой, то $\underline{u}(t) = (\underline{u}_j(t))_{j=\overline{1,m}} \in \underline{U}(t)$, $t \in [a, b]$. Итак, функция $\underline{u}(\cdot)$ является наименьшей среди измеримых сечений отображения $\underline{U}(\cdot)$. Доказано, что в множестве измеримых управлений, соответствующих траектории $\underline{x}(\cdot)$, существует наименьшее управление.

Для произвольной траектории x выполнены неравенства $\mathcal{L}\underline{x} \le \mathcal{L}x$ и $\underline{x} \le x$. Поэтому, вследствие изотонности отображения $U(t, \cdot, \cdot)$, для любого измеримого сечения u многозначного отображения $U\big(\cdot, x(\cdot), (\mathcal{L}x)(\cdot)\big)$ существует измеримое сечение u_* многозначного отображения $U\big(\cdot, \underline{x}(\cdot), (\mathcal{L}\underline{x})(\cdot)\big)$ такое, что $u_* \leq u$. А так как $\underline{u} \leq u_*$, получаем неравенство $\underline{u} \leq u$. Таким образом, пара $(\mathcal{L}\underline{x}, \underline{u})$ является наименьшей в множестве $\mathrm{DSol}^U_{\mathfrak{g}}(B)$.

Следствие доказано.

Сформулируем утверждение, в котором условие (A) теоремы 4.1 заменим на легче проверяемое, при этом будет гарантировано существование решения $(\underline{x}, \underline{u})$ краевой задачи для неявной управляемой системы такого, что пара $(\mathcal{L}\underline{x}, \underline{u})$ будет наименьшей в множестве $\mathcal{L}\mathrm{Sol}^U_{\mathfrak{g}}(B)$.

Пусть $k = n$. Снова будем предполагать, что компонентами функции $\mathfrak{g}$ являются функции

$$\mathfrak{g}_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Соответственно (22) — это система (28).

Для рассматриваемой здесь функции $\mathfrak{g}$ функция $\mathfrak{g}^\lambda$, определяемая первым из соотношений (23), будет иметь компонентами функции

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}^\lambda_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \\ &\mathfrak{g}^\lambda_i(t, x, z, y_i, u) = \mathfrak{g}_i(t, x, z + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i, u), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{29}$$

Далее, пусть заданы функции $\omega_0, \eta_0 \in AC^n$ такие, что $\mathcal{L}\omega_0 \leq \mathcal{L}\eta_0$. Зададим многозначное отображение $B : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$B(t) \doteq \big[(\mathcal{L}\omega_0)(t), (\mathcal{L}\eta_0)(t)\big]_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [a, b]. \tag{30}$$

Следствие 4.2. *Пусть для функции* $\mathfrak{g}^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *с компонентами* (29) *и многозначного отображения* $U^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *выполнены условия* (B)–(D) *теоремы 4.1. Пусть заданы функции* $\eta_0, \omega_0 \in AC^n$ *и* $\overline{u}_0, \underline{u}_0 \in W^m$ *такие, что*

$$\overline{u}_0(t) \in U(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)), \quad \underline{u}_0(t) \in U(t, \omega_0(t), \dot{\omega}_0(t)) \ \text{ при п. в. } t \in [a, b]$$

и выполнены неравенства

$$\mathfrak{g}\big(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t), \overline{u}_0(t)\big) \geq 0, \quad \mathfrak{g}\big(t, \omega_0(t), \dot{\omega}_0(t), \dot{\omega}_0(t), \underline{u}_0(t)\big) \leq 0 \ \text{ при п. в. } t \in [a, b], \tag{31}$$

и

$$\alpha\omega_0(a) + \beta\omega_0(b) \leq \gamma \leq \alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b), \quad \mathcal{L}\omega_0 \leq \mathcal{L}\eta_0.$$

Тогда существует решение (x, u) *краевой задачи с условием* (6) *для управляемой системы* (28) *с обратной связью* (20) *и ограничением* (4),(30). *Кроме того, существует траектория* $\underline{x} \in AC_{\mathcal{L}}(B)$ *такая, что* $\mathcal{L}\underline{x}$ *— наименьший элемент в* $\pi_1(\mathcal{L}\mathrm{Sol}^U_{\mathfrak{g}}(B))$. *Если кроме перечисленных условий при п. в.* $t \in [a, b]$ *и любых* $x \in D(t)$, $v \in B(t)$ *множество* $U(t, x, v) \subset \mathbb{R}^m$ *является нижней полурешеткой, то в множестве* $\mathcal{L}\mathrm{Sol}^U_{\mathfrak{g}}(B)$ *существует наименьший элемент, то есть такая пара* $(\mathcal{L}\underline{x}, \underline{u})$, *что ее первая компонента* $\mathcal{L}\underline{x}$ *— это наименьший элемент в множестве* $\pi_1(\mathcal{L}\mathrm{Sol}^U_{\mathfrak{g}}(B))$, *а вторая компонента* $\underline{u}$ *— наименьший элемент в* $\pi_2\big(\mathcal{L}\mathrm{Sol}^U_{\mathfrak{g}}(B)\big)$.

Доказательство. Покажем, что справедливо условие (A) теоремы 4.1. Пусть при фиксированных t, x, z, u для некоторого $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \big[(\mathcal{L}\omega_0)(t), (\mathcal{L}\eta_0)(t)\big]_{\mathbb{R}^n}$ при всех $i = \overline{1, n}$ выполнено $\mathfrak{g}^\lambda_{\Omega\, i}(t, x, z, y_i, u) \geq 0$. А так как в силу (31) имеет место еще и неравенство

$$\mathfrak{g}^\lambda_{\Omega\, i}(t, x, z, \dot{\omega}_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), u) \leq 0,$$

то в силу непрерывности функции $\mathfrak{g}^\lambda_{\Omega\, i}(t, x, z, \cdot, u)$, найдется такое $\varsigma_i \in [\dot{\omega}_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t)), y]$, что $\mathfrak{g}^\lambda_{\Omega\, i}(t, x, z, \varsigma_i, u) = 0$. Соответственно, для $\varsigma = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)$ имеем $\mathfrak{g}^\lambda_{\Omega}(t, x, z, \varsigma, u) = 0$, и таким образом, условие (A) теоремы 4.1 выполнено.

Определяемое равенством (30) множество $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п. в. $t \in [a, b]$ является нижней полурешеткой. Итак, доказано, что выполнены все условия следствия 4.1. Таким образом, справедливость доказываемого утверждения прямо вытекает из следствия 4.1. Следствие доказано.

5. Заключение. Основными результатами работы являются условия существования и оценки решений двухточечной краевой задачи для системы неявных дифференциальных включений и для неявной дифференциальной управляемой системы. Полученные утверждения имеют вид теорем, аналогичных классической теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Также показано, что в условиях доказанных утверждений в множествах решений рассматриваемых задач существуют минимальные элементы, и получены дополнительные условия существования наименьших решений.

Список литературы

1. Закалюкин И.В. Управляемость механических систем вблизи подмножества вырождения неголономных связей. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления.* 2010;6:23–31.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы; 1959. 916 с.
3. Пилия А.Д., Федоров В.И. Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью *ЖЭТФ.* 1971;60(1):389–399.
4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. стереотип. – М.: ЛИБРОКОМ; 2016. 224 с.
5. Жуковская Т.В., Серова И.Д. Оценка решения неявного дифференциального включения второго порядка. *Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции. Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 27 января – 01 февраля 2023 года.* 2023;149–151.
6. Гельман Б.Д. О локальных решениях вырожденных дифференциальных включений. *Функциональный анализ и его приложения.* 2012;46(1):79–83.
7. Серова И.Д. Исследование краевой задачи для дифференциального включения. *Вестник российских университетов. Математика.* 2023;28(144):395–405.
8. Чаплыгин С.А. Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М.: Наука; 1950. 106 с.
9. Walter W. Differential and Integral Inequalities. *Springer Verlag. Berlin.* 1970;710–713.
10. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах. *Дифференциальные уравнения.* 2016;52(12):1610–1627.
11. Бенараб С., Жуковская З.Т., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления. *Дифференциальные уравнения.* 2020;56(11):1471–1482.
12. Бенараб С. О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка. *Вестник российских университетов. Математика.* 2021;26(135):225–233.
13. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications.* 2015;179(1):13–33.
14. Burlakov E.O., Serova I.D., Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A. On Order Covering Set-Valued Mappings and Their Applications to the Investigation of Implicit Differential Inclusions and Dynamic Models of Economic Processes. *Advances in Systems Science and Applications.* 2022;22(1):176–191.
15. Серова И.Д. Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори. *Вестник российских университетов. Математика.* 2021;26(135):305–314.
16. Жуковский Е.С., Серова И.Д. О задаче управления для системы неявных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения.* 2023;59(9): 1283–1296.

References

1. Zakalyukin IV. Upravlyaemost' mekhanicheskikh sistem vblizi podmnozhestva vyrozhdeniya negolonomnykh svyazei [Controllability of mechanical systems near the degeneracy subset of nonholonomic couplings]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya.* 2010;6:23–31.
2. Andronov AA., Vitt AA., Khaikin SE. Teoriya kolebanii [Vibration theory]. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. literatury; 1959. 916 p.
3. Piliya AD., Fedorov VI. Osobennosti polya elektromagnitnoi volny v kholodnoi anizotropnoi plazme s dvumernoi neodnorodnost'yu [Peculiarities of electromagnetic wave field in cold anisotropic plasma with two-dimensional inhomogeneity] *ZhETF.* 1971;60(1):389–399.
4. Borisovich YuG., Gel'man BD., Myshkis AD., Obukhovskii VV. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii. [Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions] Izd. stereotip. – M.: LIBROKOM; 2016. 224 p.
5. Zhukovskaya TV., Serova ID. Otsenka resheniya neyavnogo differentsial'nogo vklyucheniya vtorogo poryadka[Solution evaluation of the implicit second-order differential inclusion]. *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy : Materialy Mezhdunarodnoi konferentsii. Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola, Voronezh, 27 yanvarya – 01 fevralya 2023 goda.* 2023;149–151.
6. Gel'man BD. On local solutions of degenerate differential inclusions. *Functional analysis and its applications.* 2012;46(1):66–68. (In Russian)
7. Serova ID. Study of the boundary value problem for a differential inclusion. *Russian Universities Reports. Mathematics.* 2023;28(144):395–405.(In Russian)
8. Chaplygin SA. Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii. M.: Nauka; 1950. 106 p.
9. Walter W. Differential and Integral Inequalities. *Springer Verlag. Berlin.* 1970;710–713.

10. Zhukovskiy ES. On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities. *Differential equations.* 2016;52(12): 1610–1627. (In Russian)
11. Benarab S., Zhukovskaya ZT., Zhukovskiy ES., Zhukovskiy SE. Functional and differential inequalities and their applications to control problems. *Differential equations.* 2020;56(11):1471–1482. (In Russian)
12. Бенараб С. On chaplygin's theorem for an implicit differential equation of order n. *Russian Universities Reports. Mathematics.* 2021;26(135):225–233. (In Russian)
13. Arutyunov AV., Zhukovskiy ES., Zhukovskiy SE. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications.* 2015;179(1):13–33.
14. Burlakov EO., Serova ID., Zhukovskiy ES., Panasenko EA. On Order Covering Set-Valued Mappings and Their Applications to the Investigation of Implicit Differential Inclusions and Dynamic Models of Economic Processes. *Advances in Systems Science and Applications.* 2022;22(1):176–191.
15. Serova ID. Superpositional measurability of a multivalued function under generalized caratheodory conditions. *Russian Universities Reports. Mathematics.* 2021;26(135):305–314. (In Russian)
16. Zhukovskiy ES., Serova ID. On a control problem for a system of implicit differential equations *Differential equations.* 2023;59(9):1283–1296. (In Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.07.2024
Поступила после рецензирования 16.08.2024
Принята к публикации 20.08.2024

Received July 4, 2024
Revised August 16, 2024
Accepted August 20, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Серова Ирина Дмитриевна – аспирант кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, г. Тамбов, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Irina D. Serova – Graduate Student of the Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

К содержанию