Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 4. С. 261–272.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 4. P. 261–272.

УДК 517.9
MSC 34G20, 35R11
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-261-272

Задача типа Коши для некоторых квазилинейных уравнений с производными Римана – Лиувилля и секториальным оператором

Федоров В. Е., **Авилович А. С.**,
Челябинский государственный университет,
Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129
kar@csu.ru, avilovich_aas@bk.ru

Аннотация. Исследованы вопросы разрешимости задачи типа Коши для квазилинейных уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной Римана – Лиувилля, оператор в линейной части при неизвестной функции в уравнении предполагается секториальным. При этом нелинейный оператор зависит от дробных производных младшего порядка с произвольной дробной частью. Получены теоремы о локальном и глобальном существовании единственного решения при условии локальной липшицевости и липшицевости нелинейного оператора соответственно в случае его непрерывности в норме графика секториального оператора. Задача типа Коши для квазилинейного уравнения сводится к интегро-дифференциальному уравнению в специально подобранном функциональном пространстве. Для доказательства существования единственного решения используется теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве. Полученный абстрактный результат использован при исследовании вопросов существования и единственности решения одного класса начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных с многочленами от самосопряженного эллиптического оператора по пространственным переменным и с дробными производными по времени.

Ключевые слова: производная Римана – Лиувилля, задача типа Коши, квазилинейное уравнение, теорема о сжимающем отображении, локальная разрешимость, глобальная разрешимость

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-00100, https://rscf.ru/project/24-71-00100/

Для цитирования: Федоров В. Е., Авилович А. С. 2024. Задача типа Коши для некоторых квазилинейных уравнений с производными Римана – Лиувилля и секториальным оператором. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 261–272.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-261-272

Original Research

Cauchy Type Problem for Some Quasilinear Equations with Riemann – Liouville Derivatives and a Sectorial Operator

Vladimir E. Fedorov, **Anna S. Avilovich**,
Chelyabinsk State University,
129 Bratyev Kashirinykh St., Chelyabinsk 454001, Russia
kar@csu.ru, avilovich_aas@bk.ru

Abstract. We studies the issues of solvability of the Cauchy type problem for quasi-linear equations solved with respect to the highest fractional Riemann – Liouville derivative, the operator in the linear part at an unknown function in the equation is assumed to be sectorial. In this case, the nonlinear operator depends on low-order fractional derivatives with an arbitrary fractional part. Theorems on the local and global existence of a unique solution are obtained under the condition of local Lipschitz continuity and Lipschitz continuity of a nonlinear operator, respectively, in the case of its continuity in the norm of the graph of the sectorial operator. The Cauchy type problem for a quasi-linear equation is reduced to an integro-differential equation in a specially selected functional space. To prove the existence of a unique solution, Banach Theorem on the fixed point of a compressive map in a complete metric space is used. The abstract result obtained is applied for the study of the existence and uniqueness of a solution of a class of initial boundary value problems for nonlinear partial differential equations with polynomials from a self-adjoint elliptic operator in spatial variables and with fractional derivatives in time.

Keywords: Riemann – Liouville Derivative, Cauchy Type Problem, Quasilinear Equation, Contraction Mapping Theorem, Local Solvability, Global Solvability

Acknowledgements: The study was supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 24-71-00100, https://rscf.ru/project/24-71-00100/

For citation: Fedorov V. E. , Avilovich A. S. 2024. Cauchy Type Problem for Some Quasilinear Equations with Riemann – Liouville Derivatives and a Sectorial Operator. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 261–272. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-261-272

1. Введение. Изучение функционально-аналитических аспектов интегро-дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка, в настоящее время является актуальной задачей в связи со все более широким использованием таких уравнений в качестве математических моделей различных процессов [1, 2, 3]. Задачи для уравнений с различными дробными производными в банаховых пространствах исследовались в работах J. Prüss [4] (в форме интегральных уравнений), Э. Г. Бажлековой [5, 6], А. В. Глушака (см. [7, 8]) и др.

В работе [9] введен в рассмотрение класс операторов $\mathcal{A}_\alpha$, для которых уравнение ${}^C D^\alpha z(t) = Az(t)$ в банаховом пространстве с дробной производной Герасимова — Капуто ${}^C D^\alpha z$ и оператором $A \in \mathcal{A}_\alpha$ имеет аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. В [10] получена теорема о существовании единственного решения неоднородного линейного уравнения, а в работах [11, 12, 13] исследованы вопросы однозначной разрешимости квазилинейных уравнений с оператором $A \in \mathcal{A}_\alpha$ в линейной части и производной Герасимова — Капуто.

Существование единственного решения для линейного уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля $D^\alpha z$ и оператором $A \in \mathcal{A}_\alpha$ доказано в [14, 15]. Соответствующие квазилинейные уравнения изучены в [16, 17], при этом нелинейный оператор предполагается зависящим только от производных порядков $\alpha - m, \alpha - m + 1, \dots, \alpha_1$, чтобы избежать появления дефекта задачи типа Коши, возникающего в случае нескольких дробных производных Римана — Лиувилля в уравнении (см. [18]). Локальная однозначная разрешимость задачи типа Коши для квазилинейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля произвольных порядков в линейной и нелинейной частях уравнения исследована в [19] с использованием непрерывности в норме графика нелинейного оператора и в [20] — с использованием его гельдеровости.

В данной работе исследуется квазилинейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ вида

$$D^\alpha z(t) = Az(t)+$$
$$+B(t, D^{\alpha-\varrho-m} z(t), D^{\alpha-\varrho-m+1} z(t), \dots, D^{\alpha-1} z(t), D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_q} z(t)), \quad t \in (0, T) \tag{1}$$

с линейным оператором $A \in \mathcal{A}_\alpha$, нелинейным отображением B и несколькими дробными производными Римана – Лиувилля $D^\delta z$ при $\delta > 0$ и дробными интегралами Римана – Лиувилля $D^\delta z$ при $\delta < 0$. Здесь $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \le n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \ne \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$. В предположении непрерывности нелинейного оператора B в норме графика оператора A будут исследованы вопросы локальной и глобальной разрешимости задачи типа Коши для уравнения (1). Заметим, что в используемом в [19] функциональном пространстве решений, включающем требование на старшую производную D^α, нет возможности доказать теорему о глобальной разрешимости, поэтому в данной работе для этой цели введено в рассмотрение другое функциональное пространство $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$. Для этого пространства сначала получен ряд вспомогательных результатов. С их помощью посредством теорем о неподвижной точке сначала доказано локальное существование единственного решения задачи типа Коши для уравнения (1), а затем и однозначная глобальная разрешимость (т. е. на любом заданном отрезке) для этой задачи. Полученные результаты проиллюстрированы на примере одного класса начально-краевых задач.

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — пространство линейных ограниченных операторов в $\mathcal{Z}$ и $Cl(\mathcal{Z})$ — множество линейных замкнутых плотно определённых в $\mathcal{Z}$ операторов. Для $h : (t_0, \infty) \to \mathcal{Z}$ определим интеграл Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_{t_0}^{t} (t - s)^{\beta - 1} h(s) ds, \quad t > 0,$$

J^0 будет означать тождественный оператор. Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, D^m — обычная производная порядка m, D^α — дробная производная Римана — Лиувилля порядка α, т. е. $D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} h(t)$. При $\beta < 0$ будем использовать обозначение $D^\beta h(t) := J^{-\beta} h(t)$.

Через D_A будем обозначать область определения оператора $A \in Cl(\mathcal{Z})$, снабженную его нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_\mathcal{Z} + \|A \cdot\|_\mathcal{Z}$. В силу замкнутости оператора A множество D_A с нормой графика является банаховым пространством. Обозначим также $\rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$, $R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1}$ при $\mu \in \rho(A)$.

Определение 2.1. *Пусть $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a_0 \ge 0$. Через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ обозначим класс операторов $A \in Cl(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия:*
(i) *для любого $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta, \mu \ne a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;*
(ii) *для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a \ge a_0$ найдется такое $K = K(\theta, a) > 0$, что*

$$\forall \lambda \in S_{\theta, a} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{K(\theta, a)}{|\lambda|^\alpha}. \tag{2}$$

Замечание 2.1. В предыдущих работах использовалось неравенство

$$\forall \lambda \in S_{\theta, a} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a| |\lambda|^{\alpha - 1}} \tag{3}$$

в условии (ii) определения 2.1. Покажем, что эти условия эквивалентны. Действительно, импликация из (2) в (3) очевидна. Обратно, в силу (3) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ имеем

$$\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, \frac{a+a_0}{2})}{|\lambda - \frac{a+a_0}{2}||\lambda|^{\alpha-1}},$$

так как $\frac{a+a_0}{2} > a_0$. При этом $|\lambda - \frac{a+a_0}{2}|^{-1} \leq C(\theta, a)|\lambda|^{-1}$ для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$, поэтому (2) выполняется с константой $K(\theta, a) = C(\theta, a)K(\theta, \frac{a+a_0}{2})$.

Лемма 2.1. [14]. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$Z_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta}R_{\mu^\alpha}(A)e^{\mu t}d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta},\ r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ *при* $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. *Тогда Z_β допускает аналитическое продолжение в сектор* $\Sigma_{\theta_0-\pi/2} := \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \theta_0 - \pi/2,\ \tau \neq 0\}$ *и при всех* $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ *существует такое* $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, *что для всех* $\tau \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a)e^{a\mathrm{Re}\tau}(|\tau|^{-1} + a)^\beta, \quad \beta \geq 0,$$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a)e^{a\mathrm{Re}\tau}|\tau|^{-\beta}, \quad \beta < 0.$$

Обозначим

$$\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\pi/2, \pi] \\ a_0 \geq 0}} \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$$

и сформулируем два варианта теоремы об однозначной разрешимости задачи типа Коши для неоднородного линейного уравнения, которые были доказаны в [14] и [15].

Теорема 2.1. [14]. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $f \in C([0, T]; D_A)$. Тогда при любых начальных данных $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in D_A$ функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)z_k + \int_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds \tag{4}$$

является единственным решением задачи типа Коши

$$D^{\alpha-m+k}z(0) = z_k, \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{5}$$

для уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T). \tag{6}$$

Теорема 2.2. [15]. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда при любых $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in D_A$ функция* (4) *является единственным решением задачи типа Коши* (5), (6).

3. Локальная разрешимость. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha-m-\varrho}z(t), D^{\alpha-m-\varrho+1}z(t), \ldots, D^{\alpha-1}z(t), D^{\gamma_1}z(t), \ldots, D^{\gamma_q}z(t)), \tag{7}$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\varrho \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Некоторые γ_i могут быть отрицательными. Пусть $i_0 := \min\{i \in \{1, 2, \ldots, q\} : \gamma_i > 0\}$, если $\{i \in \{1, 2, \ldots, q\} : \gamma_i > 0\}$ не пусто, при $\gamma_q \leq 0$ будем считать, что $i_0 := q + 1$.

Определим $\underline{\gamma} := \max\{\gamma_i : \gamma_i - m_i < \alpha - m,\ i = 1, 2, \ldots, q\}$, $\underline{n} := \lceil\underline{\gamma}\rceil$, $\overline{\gamma} := \max\{\gamma_i : \gamma_i - m_i > \alpha - m,\ i = 1, 2, \ldots, q\}$, $\overline{n} := \lceil\overline{\gamma}\rceil$, $n^* := \max\{\underline{n} - 1, \overline{n}\}$. В работе [18] n^* называется дефектом задачи типа Коши.

Для исследования уравнения (7) потребуется существование конечных пределов $\lim\limits_{t\to t_0} D^{\gamma_i}z(t) := D^{\gamma_i}z(t_0)$, $i = 1, 2, \ldots, q$, поэтому определим $\mu^* := \max\{n^* + 1, 0\}$. В итоге, с учетом следствий 1–4 [18] для уравнения (7) будем рассматривать задачу

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, \mu^* - 1, \quad D^{\alpha-m+k}z(t_0) = z_k,\ k = \mu^*, \mu^* + 1, \ldots, m-1. \tag{8}$$

Пусть Z — открытое подмножество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, отображение $B : Z \to \mathcal{Z}$ локально липшицево в норме D_A, т. е. для каждого $(t, z_1, z_2, \ldots, z_{m+\varrho+q}) \in Z$ существуют окрестность $V \subset Z$, $l > 0$, такие, что для всех $(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+\varrho+q})$, $(t, y_1, y_2, \ldots, y_{m+\varrho+q}) \in V$

$$\|B(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+\varrho+q}) - B(t, y_1, y_2, \ldots, y_{m+\varrho+q})\|_{D_A} \leq l\sum_{k=1}^{m+\varrho+q}\|x_k - y_k\|_{\mathcal{Z}}. \tag{9}$$

Решением задачи типа Коши (8) для уравнения (7) на отрезке $[t_0, t_1]$ будем называть функцию $z \in C((t_0, t_1]; D_A)$, такую, что $J^{m-\alpha}z \in C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\gamma_i}z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, q$, выполнены условия (8), включение

$$(t, D^{\alpha-m-\varrho}z(t), D^{\alpha-m-\varrho+1}z(t), \dots, D^{\alpha-1}z(t), D^{\gamma_1}z(t), D^{\gamma_2}z(t), \dots, D^{\gamma_q}z(t)) \in Z$$

при $t \in [t_0, t_1]$ и равенство (7) при $t \in (t_0, t_1]$.

Лемма 3.1. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда линейное пространство*

$$C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : (t - t_0)^{m-\alpha}x(t) \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), J^{m-\alpha}x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} := \|J^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} + \|(t - t_0)^{m-\alpha}x(t)\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$ является банаховым.

Доказательство. Аксиомы нормы могут быть проверены непосредственно. Пусть последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна в $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, тогда существуют пределы $y := \lim\limits_{k\to\infty}(t - t_0)^{m-\alpha}x_k \in C([t_0, t_1]; Z)$, $y_1(t) := \lim\limits_{k\to\infty} J^{m-\alpha}x_k \in C^{m-1}([t_0, t_1]; Z)$. Положим при $t \in (t_0, t_1]$ $x(t) := (t - t_0)^{\alpha-m}y(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(t)$ в пространстве $\mathcal{Z}$. Ограниченность последовательности $\{x_k\}$ в $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ влечет неравенство $\|x_k(t)\|_{\mathcal{Z}} \le C(t - t_0)^{\alpha-m}$ при $t \in (t_0, t_1]$, $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\left\|\int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}x_k(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le C\int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}(s-t_0)^{\alpha-m}ds = C\Gamma(\alpha - m + 1).$$

По теореме Лебега существует $J^{m-\alpha}x = J^{m-\alpha} \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} J^{m-\alpha}x_k = y_1 \in C^{m-1}([t_0, t_1]; Z)$.

Лемма 3.2. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $k \in \mathbb{Z}$, $k < m - 1$ существует такое $C > 0$, что при всех $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $s, t \in [t_0, t_1]$*

$$\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \le C\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}|s - t|.$$

Доказательство. При $k \in \mathbb{Z}$, $k < -1$, $s, t \in [t_0, t_1]$, $s < t$ в силу определения дробного интеграла Римана — Лиувилля и теоремы Лагранжа

$$D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t) = (s - t)D^{\alpha-m+k+1}x(\xi) = (s - t)J^{-k-1}J^{m-\alpha}x(\xi) =$$

$$= (s-t)\int_{t_0}^{\xi} \frac{(\xi-\tau)^{-k-2}}{\Gamma(-k-1)}J^{m-\alpha}x(\tau)d\tau$$

при некотором ξ, расположенном между точками s и t. Поэтому

$$\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \le (s - t)\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}\frac{(t_1 - t_0)^{-k-1}}{\Gamma(-k)}.$$

Для $k \in \{-1, 0, \dots, m - 2\}$

$$\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \le (s - t)\max_{\tau\in[s,t]}\|D^{\alpha-m+k+1}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \le \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(s - t).$$

Замечание 3.1. В условиях леммы 3.2 легко получить, что при любом $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$

$$\|D^{\alpha-m+k}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} \le \frac{(t_1 - t_0)^{-k}}{\Gamma(1-k)}\|J^{m-\alpha}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}.$$

Лемма 3.3. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $n - 1 < \beta \le n \in \mathbb{Z}$, $\beta < \alpha - 1$, $\alpha - m \ne \beta - n$. Тогда $D^\beta x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.*

Доказательство. Если $\beta - n < \alpha - m$, то $n \le m - 1$, при $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ $J^{n-\beta}x = J^{n-\beta+\alpha-m}J^{m-\alpha}x$. Поэтому при $k = 0, 1, \dots, m - 1$

$$D^kJ^{n-\beta+\alpha-m}J^{m-\alpha}x(t) = \sum_{l=0}^{k-1}\frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l}D^{\alpha-m+l}x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m)}D^{\alpha-m+k}x(s)ds, \tag{10}$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m)} D^{\alpha-m+k} x(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le \frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m+1)}.$$

В случае $\beta - n > \alpha - m$ имеем $n \le m-2$ согласно условию $\beta < \alpha - 1$. Следовательно, для $k = 0, 1, \ldots, m-2$

$$D^k J^{n-\beta} x(t) = D^k J^{n-\beta} D^{m-\alpha} J^{m-\alpha} x(t) = D^k J^{n-\beta} D^1 J^{\alpha-m+1} J^{m-\alpha} x(t) =$$

$$= D^k J^{n-\beta} \left(\frac{(t-t_0)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} J^{m-\alpha} x(t_0) + J^{\alpha-m+1} D^{\alpha-m+1} x(t) \right) =$$

$$= \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k} J^{m-\alpha} x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+1)} + D^k J^{n-\beta+\alpha-m+1} D^1 J^{m-\alpha} x(t) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l} D^{\alpha-m+l} x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m+1)} D^{\alpha-m+k+1} x(s) ds. \quad (11)$$

При получении последнего равенства используется (10) и сдвиг нумерации в сумме. Как и в предыдущем абзаце, получим неравенства для интегралов при значениях $k = 0, \ldots, m-2$, поэтому $D^\beta x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Введем в рассмотрение также пространство $C_{\alpha;\mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : D^{\alpha-m+k} x(t_0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, \mu^* - 1\}$.

Замечание 3.2. По построению μ^* для $x \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ имеем равенства (см. [18]) $D^{\gamma_i - n_i + k} x(t_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, q$.

Лемма 3.4. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\gamma_q < \alpha - 1$. Тогда $D^{\gamma_i} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, и существует такое $C > 0$, что для всех $x \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, q$*

$$\|D^{\gamma_i} x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} \le C \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}. \quad (12)$$

Доказательство. Из замечания 3.2 и леммы 3.3 следует, что для $x \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ выполняются включения $D^{\gamma_i} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Из (10) и равенств $D^{\alpha-m+k} x(t_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, q$, получаем при $\gamma_i - n_i < \alpha - m$

$$D^{\gamma_i} x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)} D^{n_i} J^{m-\alpha} x(s) ds, \quad (13)$$

а при $\gamma_i - n_i > \alpha - m$ в соответствии с (11) имеем

$$D^{\gamma_i} x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)} D^{n_i+1} J^{m-\alpha} x(s) ds.$$

В обоих случаях приходим к (12). Лемма доказана.

Возьмем в качестве $\underline{\gamma} \in (0,1)$ минимальное из положительных чисел $n_i - \gamma_i + \alpha - m$ и $\overline{\gamma} \in (0,1)$ — минимальное из чисел $n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1$, таких, что $n_i - \gamma_i + \alpha - m < 0$. Определим $\gamma^* := \min\{\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\} \in (0,1)$.

Замечание 3.3. Из доказательства леммы 3.4 следует, что в ее условиях существует $C > 0$, такое, что при всех $x \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, q$

$$\|D^{\gamma_i} x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} \le C \|J^{m-\alpha} x\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} (t-t_0)^{\gamma^*}.$$

Лемма 3.5. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $\gamma_q < \alpha - 1$. Тогда существует $C > 0$, такое, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, q$ при всех $s, t \in [t_0, t_1]$*

$$\|D^{\gamma_i} x(s) - D^{\gamma_i} x(t)\|_{\mathcal{Z}} \le C \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} |s-t|^{\gamma^*}.$$

Доказательство. При $s, t \in [t_0, t_1]$, $s < t$, $\gamma_i - n_i < \alpha - m$ в силу (13) имеем

$$D^{\gamma_i} x(t) - D^{\gamma_i} x(s) = \int_{s}^{t} \frac{(t-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)} D^{n_i} J^{m-\alpha} x(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{s} \frac{(t-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1} - (s-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)} D^{n_i} J^{m-\alpha} x(\tau) d\tau,$$

отсюда

$$\|D^{\gamma_i}x(t) - D^{\gamma_i}x(s)\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}+$$

$$+\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}\left|\int_{t_0}^{s}\int_{s}^{t}\frac{(u-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-2}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m-1)}dud\tau\right| = \frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}+$$

$$+\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}\left|\int_{s}^{t}\frac{(u-t_0)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}-(u-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)}du\right| \leq$$

$$\leq \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}\left(\frac{(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}+2\int_{s}^{t}\frac{(u-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)}du\right) \leq$$

$$\leq \frac{3\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m} = C_i\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-s)^{\delta_i}, \quad \delta_i = n_i-\gamma_i+\alpha-m \in (0,1).$$

Аналогично при $\gamma_i - n_i > \alpha - m$ получим $\|D^{\gamma_i}x(t) - D^{\gamma_i}x(s)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_i\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-s)^{\delta_i}$ с $\delta_i = n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1 \in (0,1)$, $C_i = 3/\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m + 2) > 0$. Взяв максимальное из C_i и минимальное из δ_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, завершим доказательство.

Замечание 3.4. Функция, удовлетворяющая условиям задачи типа Коши (8), с точностью до $o(t-t_0)^{\alpha-1}$ при $t \to t_0+$ ведет себя как функция

$$\widetilde{z}(t) = \frac{(t-t_0)^{\alpha-m+\mu^*}z_{\mu^*}}{\Gamma(\alpha-m+\mu^*+1)} + \frac{(t-t_0)^{\alpha-m+\mu^*+1}z_{\mu^*+1}}{\Gamma(\alpha-m+\mu^*+2)} + \cdots + \frac{(t-t_0)^{\alpha-1}z_{m-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

По построению μ^* $D^{\alpha-m-\varrho}\widetilde{z}(t_0) = D^{\alpha-m-\varrho+1}\widetilde{z}(t_0) = \cdots = D^{\alpha-m+\mu^*-1}\widetilde{z}(t_0) = 0$, $D^{\gamma_1}\widetilde{z}(t_0) = D^{\gamma_2}\widetilde{z}(t_0) = \cdots = D^{\gamma_q}\widetilde{z}(t_0) = 0$. Поэтому при $t = t_0$ аргумент нелинейного оператора в уравнении (7) имеет вид $(t_0, 0, 0, \ldots, 0, z_{\mu^*}, z_{\mu^*+1}, \ldots, z_{m-1}, 0, 0, \ldots, 0)$.

Лемма 3.6. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \ldots, q$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = \mu^*, \mu^* + 1, \ldots, m-1$, Z *открыто в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \ldots, 0, z_{\mu^*}, z_{\mu^*+1}, \ldots, z_{m-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in Z$, $B \in C(Z; D_A)$. *Тогда функция* $z \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ *является решением задачи* (7), (8) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 > t_0$ *в том и только в том случае, когда при* $t \in [t_0, t_1]$

$$z(t) = \sum_{k=\mu^*}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)B^z(s)ds, \tag{14}$$

где $B^z(s) = B(s, D^{\alpha-m-\varrho}z(s), D^{\alpha-m-\varrho+1}z(s), \ldots, D^{\alpha-1}z(s), D^{\gamma_1}z(s), \ldots, D^{\gamma_q}z(s))ds$.

Доказательство. Если $z \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, то в силу леммы 3.5 и с учетом условий на оператор B отображение, $t \to B^z(t)$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в D_A, а значит, удовлетворяет условиям теоремы 2.1. В силу этой теоремы z является решением задачи (7), (8) на отрезке $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда на нем выполняется равенство (14).

Теорема 3.1. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \ldots, q$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = \mu^*, \mu^* + 1, \ldots, m-1$, Z *открыто в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \ldots, 0, z_{\mu^*}, z_{\mu^*+1}, \ldots, z_{m-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in Z$, *отображение* $B \in C(Z; D_A)$ *локально липшицево в норме* D_A. *Тогда существует такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (7), (8) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Возьмём $t_1 > t_0$, $\varepsilon > 0$, такие, что в окрестности

$$\begin{gathered} V := \{(t, y_1, y_2, \ldots, y_{m+\varrho+q}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q} : t \in [t_0, t_1], \|y_k\| \leq \varepsilon, \\ k = 1, 2, \ldots, \varrho + \mu^*, \varrho + m + 1, \varrho + m + 2, \ldots, \varrho + m + q, \\ \|y_j - z_{j-\varrho-1}\| \leq \varepsilon,\ j = \varrho + \mu^* + 1, \varrho + \mu^* + 2, \ldots, \varrho + m\} \end{gathered}$$

неравенство (9) выполняется при некотором $l > 0$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{M}_{t_1} := \{y \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : \|D^{\alpha-m+k}y(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon,\ k = -\varrho, -\varrho+1, \ldots, \mu^* - 1,$$

$$\|D^{\alpha-m+k}y(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon,\ k = \mu^*, \mu^* + 1, \ldots, m-1,\ t \in [t_0, t_1]\},$$

которое в силу леммы 3.1 является полным метрическим пространством с метрикой, задаваемой как норма разности в $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$. Определим в $\mathcal{M}_{t_1}$ оператор

$$G(y)(t) := \sum_{k=\mu^*}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)B^y(s)\,ds$$

при $t \in (t_0, t_1]$. Имеем для $y \in \mathcal{M}_{t_1}$ в силу леммы 2.1 $(t-t_0)^{m-\alpha}G(y)(t) \in C([t_0; t_1]; \mathcal{Z})$. С учетом доказательства предыдущей леммы и теоремы 2.1 получим, что $G(y) \in \mathcal{M}_{t_1}$ для любого $y \in \mathcal{M}_{t_1}$ при $t_1 > t_0$, достаточно близком к t_0.

В [14, 15] показано, что

$$D^{\alpha-m+k}\int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)B^y(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} Z_{k+1-m}(t-s)B^y(s)\,ds.$$

Поэтому для $x, y \in \mathcal{M}_{t_1}$ в силу лемм 2.1 и 3.4 при $k = 0, 1+1, \dots, m-1$,

$$\|D^{\alpha-m+k}G(x)(t) - D^{\alpha-m+k}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|\int_{t_0}^{t} Z_{k+1-m}(t-s)(B^x(s) - B^y(s))\,ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le lC_{k+1-m}(t-t_0)e^{a(t-t_0)}\left(\sum_{j=-\varrho}^{m-1}\max_{t\in[t_0,t_1]}\left\|D^{\alpha-m+j}x(t) - D^{\alpha-m+j}y(t)\right\|_{\mathcal{Z}} + \right.$$

$$\left. + \max_{t\in[t_0,t_1]}\sum_{i=1}^{q}\|D^{\gamma_i}x(t) - D^{\gamma_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}}\right) \le c_1(t_1-t_0)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})},$$

где $c_1 > 0$ не зависит от x, y. Кроме того,

$$\|(t-t_0)^{m-\alpha}(G(x)(t) - G(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} = \left\|(t-t_0)^{m-\alpha}\int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)(B^x(s) - B^y(s))\,ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=-\varrho}^{m-1}\max_{t\in[t_0,t_1]}\left\|D^{\alpha-m+j}x(t) - D^{\alpha-m+j}y(t)\right\|_{\mathcal{Z}} + \max_{t\in[t_0,t_1]}\sum_{i=1}^{q}\|D^{\gamma_i}x(t) - D^{\gamma_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}}\right)\times$$

$$\times lC_{1-\alpha}e^{a(t_1-t_0)}(t_1-t_0)^m \le c_1(t_1-t_0)^m\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}.$$

Таким образом, оператор G отображает метрическое пространство $\mathcal{M}_{t_1}$ в себя и является оператором сжатия на нем, если $t_1 - t_0$ достаточно мало. Поэтому существует его единственная неподвижная точка $z \in \mathcal{M}_{t_1}$. Согласно лемме 3.6 z — решение задачи (7), (8) на отрезке $[t_0, t_1]$.

Единственность решения следует из единственности неподвижной точки в силу леммы 3.6.

4. Глобальная разрешимость. Обозначим $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{m+\varrho+q}) \in \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$. Отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q} \to \mathcal{Z}$ называется липшицевым по $\overline{x}$, если существует такое $L > 0$, что для всех $(t, \overline{x})$, $(t, \overline{y}) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$ выполняется

$$\|B(t, \overline{x}) - B(t, \overline{y})\|_{\mathcal{Z}} \le L\sum_{k=1}^{m+\varrho+q}\|x_k - y_k\|_{\mathcal{Z}}.$$

Теорема 4.1. *Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \le n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \ne \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = \mu^*, \mu^*+1, \dots, m-1$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}; D_A)$ липшицево по $\overline{x}$ в норме D_A. Тогда задача* (7), (8) *имеет единственное решение на* $[t_0, T]$.

Доказательство. По лемме 3.6 достаточно показать, что уравнение (7) имеет единственное решение в банаховом пространстве

$$C_{\alpha;\mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z}) := \{x \in C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z}) : D^{\alpha-m+k}x(t_0) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \mu^*-1\}.$$

Определим для $y \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$ оператор

$$G(y)(t) := \sum_{k=\mu^*}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)B^y(s)\,ds, \quad t \in [t_0, T].$$

Как при доказательстве теоремы 3.1 получаем, что $G(y) \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$ для любой функции $y \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$. При этом используется тот факт, что

$$D_t^{\alpha-m+k} \int\limits_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)B^z(s)\,ds|_{t=t_0} = \int\limits_{t_0}^{t} Z_{k+1-m}(t-s)B^z(s)\,ds|_{t=t_0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Обозначим j-ю степень оператора G как G^j, $T_1 := \max\{1, T-t_0\}$. Для $x, y \in C_{\alpha;\mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$ в силу леммы 2.1 при $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$\|D^{\alpha-m+k}G(x)(t) - D^{\alpha-m+k}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} Z_{k+1-m}(t-s)(B^x(s) - B^y(s))\,ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C_{k+1-m}e^{a(T-t_0)} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{m-k-1} L \sum_{j=-\varrho}^{m-1} \left\|D^{\alpha-m+j}x(s) - D^{\alpha-m+j}y(s)\right\|_{\mathcal{Z}} ds +$$

$$+ C_{k+1-m}e^{a(T-t_0)} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{m-k-1} L \sum_{i=1}^{q} \|D^{\gamma_i}x(s) - D^{\gamma_i}y(s)\|_{\mathcal{Z}}\,ds \le$$

$$\le LC_{k+1-m}T_1^{m-k-1}e^{a(T-t_0)}(t-t_0)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \le c_1(t-t_0)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

где $c_1 := Le^{a(T-t_0)} \max\left\{\alpha^{-1}C_{1-\alpha}T_1^{m-1},\, C_{k+1-m}T_1^{m-k-1} : k = 0, 1, \dots, m-1\right\}$. Кроме того,

$$\|(t-t_0)^{m-\alpha}(G(x)(t) - G(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} = \left\|(t-t_0)^{m-\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)(B^x(s) - B^y(s))\,ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le \frac{LC_{1-\alpha}}{\alpha}e^{a(T-t_0)}(t-t_0)^m\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,T;\mathcal{Z})} \le c_1(t-t_0)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})}.$$

Таким образом, верна следующая оценка

$$\|G(x) - G(y)\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \le (m+1)c_1(t-t_0)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})}.$$

Для $k = 0, 1, \dots, m-1$ имеем

$$\|D^{\alpha-m+k}G^2(x)(t) - D^{\alpha-m+k}G^2(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} Z_{k+1-m}(t-s)(B^{G(x)}(s) - B^{G(y)}(s))\,ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le LC_{k+1-m}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-k-1} \int\limits_{t_0}^{t} \|G(x) - G(y)\|_{C_\alpha(t_0,s;\mathcal{Z})}\,ds \le$$

$$\le (m+1)c_1^2 \int\limits_{t_0}^{t} (s-t_0)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,s;\mathcal{Z})}\,ds \le \frac{(m+1)c_1^2}{2}(t-t_0)^2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|(t-t_0)^{m-\alpha}(G^2(x)(t) - G^2(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} = \left\|(t-t_0)^{m-\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)(B^{G(x)}(s) - B^{G(y)}(s))\,ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le LC_{1-\alpha}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\|G(x) - G(y)\|_{C_\alpha(t_0,s;\mathcal{Z})}\,ds \le$$

$$\le (m+1)c_1LC_{1-\alpha}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1}(s-t_0)ds\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} =$$

$$= (m+1)c_1LC_{1-\alpha}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-\alpha} \int\limits_{0}^{t-t_0} \tau^{\alpha-1}(t-t_0-\tau)d\tau\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \le$$

$$\leq (m+1)c_1LC_{1-\alpha}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-1}(t-t_0)^2\mathcal{B}(\alpha,2)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)c_1}{\alpha+1}\frac{LC_{1-\alpha}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-1}}{\alpha}(t-t_0)^2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)c_1^2}{\alpha+1}(t-t_0)^2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq (m+1)c_1^2(t-t_0)^2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|G^2(x)-G^2(y)\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq (m+1)^2c_1^2(t-t_0)^2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})}.$$

Здесь $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$ — бета-функция Эйлера. Продолжая аналогичным образом, получим

$$\|D^{\alpha-m+k}G^3(x)(t)-D^{\alpha-m+k}G^3(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq (m+1)^2c_1^3\int\limits_{t_0}^{t}(s-t_0)^2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,s;\mathcal{Z})}\,ds \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)^2c_1^3}{3}(t-t_0)^3\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|(t-t_0)^{m-\alpha}(G^3(x)(t)-G^3(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq LC_{1-\alpha}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-\alpha}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\|G^2(x)-G^2(y)\|_{C_\alpha(t_0,s;\mathcal{Z})}\,ds \leq$$

$$\leq (m+1)^2c_1^2LC_{1-\alpha}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-\alpha}\int\limits_0^{t-t_0}\tau^{\alpha-1}(t-t_0-\tau)^2d\tau\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq (m+1)^2c_1^2LC_{1-\alpha}e^{a(T-t_0)}T_1^{m-1}(t-t_0)^3\mathcal{B}(\alpha,3)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)^2c_1^3}{(\alpha+1)(\alpha+2)}(t-t_0)^3\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)^2c_1^3(t-t_0)^3}{2}\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|G^3(x)-G^3(y)\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)^3c_1^3(t-t_0)^3}{2}\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|D^{\alpha-m+k}G^4(x)(t)-D^{\alpha-m+k}G^4(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{(m+1)^3c_1^4}{2\cdot 4}(t-t_0)^4\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|(t-t_0)^{m-\alpha}(G^4(x)(t)-G^4(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)^3c_1^4}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}(t-t_0)^4\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)^3c_1^4(t-t_0)^4}{3!}\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|G^4(x)-G^4(y)\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)^4c_1^4(t-t_0)^4}{3!}\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

и т. д. Следовательно, для всех $t\in[t_0,T]$, $j\in\mathbb{N}$, $x,y\in C_{\alpha,\mu^*}(t_0,T;\mathcal{Z})$ выполняется оценка

$$\|G^j(x)-G^j(y)\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)^jc_1^jT_1^j}{(j-1)!}\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t;\mathcal{Z})}.$$

Отсюда следует, что при достаточно большом значении $j\in\mathbb{N}$ G^j является оператором сжатия и поэтому существует его единственная неподвижная точка $z\in C_{\alpha,\mu^*}(t_0,T;\mathcal{Z})$, которая также является единственной неподвижной точкой оператора G в пространстве $C_{\alpha,\mu^*}(t_0,T;\mathcal{Z})$. Согласно лемме 3.6, z — решение задачи (7), (8) на отрезке $[t_0,T]$. Его единственность следует из единственности неподвижной точки.

Замечание 4.1. В данном и предыдущем параграфах квазилинейные уравнения исследованы с использованием результата теоремы 2.1 о неоднородном линейном уравнении. Аналогичное исследование на основе теоремы 2.2 планируется провести авторами в ближайшее время.

5. Уравнения с многочленами от самосопряженного оператора. Пусть $\varrho,\varsigma,d,r\in\mathbb{N}$, $P_\varrho(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{\varrho}c_i\lambda^i$, $Q_\varsigma(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{\varsigma}d_j\lambda^j$, $c_i,d_j\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\ldots,\varrho$, $j=0,1,\ldots,\varsigma$, $c_\varrho\neq 0$, $d_\varsigma\neq 0$, $\varrho<\varsigma$. Рассмотрим ограниченную область $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, операторный пучок $\Lambda,B_1,B_2,\ldots,B_r$ предполагается регулярно эллиптическим [21], где

$$(\Lambda y)(s)=\sum_{|q|\leq 2r}\frac{a_q(s)\partial^{|q|}y(s)}{\partial^{q_1}s_1\partial^{q_2}s_2\ldots\partial^{q_d}s_d},\quad a_q\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l y)(s) = \sum_{|q|\le r_l} \frac{b_{lq}(s)\partial^{|q|}y(s)}{\partial^{q_1}s_1\partial^{q_2}s_2\dots\partial^{q_d}s_d}, \quad b_{lq}\in C^\infty(\partial\Omega),\ l=1,2,\dots,r,$$

$q=(q_1,q_2,\dots,q_d)\in\mathbb{N}_0^d$, $|q|=q_1+q_2+\dots+q_d$.

Определим оператор $\Lambda_1\in Cl(L_2(\Omega))$ равенством $\Lambda_1 y=\Lambda y$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1}=H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega):=\{y\in H^{2r}(\Omega): B_l y(s)=0,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\Omega\}.$$

Пусть Λ_1 является самосопряженным оператором с ограниченным справа спектром, который в таком случае является вещественным, дискретным и сгущается только на $-\infty$. Пусть $0\notin\sigma(\Lambda_1)$, $\{\varphi_k : k\in\mathbb{N}\}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системой собственных функций оператора Λ_1, занумерованной в порядке неубывания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k\in\mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Для $\alpha\in(1,2)$ определим дефект $\mu^*\in\{0,1,2\}$ и рассмотрим уравнение при $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha-1$, $n_i-1<\gamma_i\le n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\ne\alpha-2$, $i=1,2,\dots,q$,

$$\begin{gathered} D_t^\alpha P_\varrho(\Lambda)v(s,t)=Q_\varsigma(\Lambda)v(s,t)+\\ +F\left(s,D^{\alpha-m-\rho}v(t),\dots,D^{\alpha-1}v(t),D^{\gamma_1}v(s,t),D^{\gamma_2}v(s,t),\dots,D^{\gamma_q}v(s,t)\right)\ \ (s,t)\in\Omega\times(t_0,T), \end{gathered} \tag{15}$$

с начальными условиями, которые при $\mu^*=0$ имеют вид

$$D_t^{\alpha-2+k}v(s,0)=v_k(s),\quad s\in\Omega,\quad k=0,1, \tag{16}$$

при $\mu^*=1$ —

$$D_t^{\alpha-2}v(s,0)=0,\quad D_t^{\alpha-1}v(s,0)=v_1(s),\quad s\in\Omega, \tag{17}$$

при $\mu^*=2$ —

$$D_t^{\alpha-2+k}v(s,0)=0,\quad s\in\Omega,\quad k=0,1, \tag{18}$$

а также краевыми условиями

$$B_l\Lambda^k v(s,t)=0,\ k=0,1,\dots,\varsigma-1,\ l=1,2,\dots,r,\ (s,t)\in\partial\Omega\times(t_0,T), \tag{19}$$

где $v_k:\Omega\to\mathbb{R}$ заданы, функция $v:\Omega\times(t_0,T)\to\mathbb{R}$ неизвестна. Здесь и далее D_t^α — оператор дробной производной Римана — Лиувилля по переменной t.

Пусть $r_0\in\mathbb{N}$, $\mathcal{Z}=\{y\in H^{2r\varrho+r_0}(\Omega): B_l\Lambda^k y(s)=0,\ k=0,1,\dots,\varrho-1,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$ и оператор $P_\varrho(\Lambda_1):\mathcal{Z}\to H^{r_0}(\Omega)$ непрерывно обратим, что выполняется, если и только если множество нулей многочлена $P_\varrho(\lambda)$ не пересекается со спектром $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1. Тогда определим оператор $Ay:=[P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1}Q_\varsigma(\Lambda)y$ с областью определения $D_A=\{y\in H^{2r\varsigma+r_0}(\Omega): B_l\Lambda^k y(s)=0,\ k=0,1,\dots,\varsigma-1,\ l=1,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$.

Теорема 5.1. *Пусть $\varsigma>\varrho$, $(-1)^{\varsigma-\varrho}(d_\varsigma/c_\varrho)<0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей полинома $P_\varrho(\lambda)$, $0\notin\sigma(\Lambda_1)$, оператор $Az:=[P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1}Q_\varsigma(\Lambda)z$ с областью определения $D_A=\{y\in H^{2r\varsigma+r_0}(\Omega): B_l\Lambda^k y(s)=0,\ k=0,1,\dots,\varsigma-1,\ l=1,\dots,r,\ s\in\Omega\}$ действует в пространстве $\mathcal{Z}=\{z\in H^{2r\varrho+r_0}(\Omega): B_l\Lambda^k z(s)=0,\ k=0,1,\dots,\varrho-1,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$. Тогда при $\alpha\in[1,2)$ существуют такие $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$, $a_0\ge 0$, что $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$. Если, кроме того,*

$$\max_{k\in\mathbb{N}}\frac{Q_\varsigma(\lambda_k)}{P_\varrho(\lambda_k)}<1, \tag{20}$$

то $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$ при $\alpha\in(0,1)$. В обоих случаях $\sigma(A)=\{\mu\in\mathbb{C}:\ \mu=Q_\varsigma(\lambda_k)/P_\varrho(\lambda_k)\}$.

Доказательство для $r_0=0$ проведено в [10]. В случае $r_0\in\mathbb{N}$ его можно повторить дословно.

Теорема 5.2. *Пусть $\alpha\in(1,2)$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha-1$, $n_i-1<\gamma_i\le n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\ne\alpha-2$, $i=1,2,\dots,q$, $\varrho<\varsigma\le 2\varrho$, $4r\varrho+2r_0>d$, $(-1)^{\varsigma-\varrho}(d_\varsigma/c_\varrho)<0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей многочлена $P_\varrho(\lambda)$, $0\notin\sigma(\Lambda_1)$, $v_k\in D_A$ при $k=0,1$, $F\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^{\rho+m+q};\mathbb{R})$. Тогда задача* (15), (16), (19) (*или* (15), (17), (19), *или* (15), (18), (19)) *имеет единственное решение на* $[t_0,T]$.

Доказательство. Нелинейный оператор $h(y_1,y_2,\dots,y_{\rho+m+q}):=F(\cdot,y_2(\cdot),\dots,y_{\rho+m+q}(\cdot))$ не зависит явно от t и в силу условия $d<4r\varrho+2r_0$, по предложению 1 из [22, дополнение Б] получим включение $h\in C^\infty((H^{2r\varrho+r_0}(\Omega))^{\rho+m+q};H^{2r\varrho+r_0}(\Omega))$. При редукции исследуемой начально-краевой задачи к (7), (8) получим $B(y_1,y_2,\dots,y_{\rho+m+q})=[P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1}h(y_1,y_2,\dots,y_{\rho+m+q})\in\mathcal{Z}$, так как $h(y_1,y_2,\dots,y_{\rho+m+q})\in H^{r_0}(\Omega)$. Поэтому выполняется включение $B\in C^\infty(\mathcal{Z}^{\rho+m+q};\mathcal{Z})$. Кроме того,

$$\begin{gathered} \|AB(x_1,\dots,x_{\rho+m+q})-AB(y_1,\dots,y_{\rho+m+q})\|_{\mathcal{Z}}=\\ =\|[P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1}Q_\varsigma(\Lambda_1)[P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1}(h(x_1,\dots,x_{\rho+m+q})-h(y_1,\dots,y_{\rho+m+q}))\|_{\mathcal{Z}}\le\\ \le C\|h'\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z}^{\rho+m+q};\mathcal{Z})}\sum_{j=1}^{\rho+m+q}\|x_j-y_j\|_{\mathcal{Z}}, \end{gathered}$$

так как $\varsigma \leq 2\varrho$. Здесь h' — производная Фреше отображения $h : \mathcal{Z}^{\rho+m+q} \to \mathcal{Z}$. Таким образом, по теореме 4.1 и теореме 5.1 существует единственное решение начально-краевой задачи на $[t_0, T]$.

Замечание 5.1. При $\alpha \in (0, 1)$ аналогичный теореме 5.2 результат справедлив при дополнительном условии (20).

Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника; 1987. 688 с.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing; 2006. 541 p.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит; 2003. 272 с.
4. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer; 1993. 366 p.
5. Bazhlekova E.G. Subordination principle for fractional evolution equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis.* 2000;3(3):213–230.
6. Bazhlekova E.G. Subordination in a class of generalized time-fractional diffusion-wave equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis.* 2018;21(4):869–900.
7. Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика, математика.* 2001;2:74–77.
8. Глушак А.В., Манаенкова Т.А. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара. *Дифференциальные уравнения.* 2011;(47)9:1294–1304.
9. Bajlekova E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology; 2001. 107 p.
10. Fedorov V.E., Romanova E.A. Inhomogeneous fractional evolutionary equation in the sectorial. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020;250(3):819–829.
11. Fedorov V.E., Avilovich A.S., Borel L.V. Initial Problems for Semilinear Degenerate Evolution Equations of Fractional Order in the Sectorial Case. *Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems.* NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7. Ed. by I.Area, A.Cabada, J.A.Cid etc. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.* 2019;292:41–62.
12. Fedorov V.E., Zakharova T.A. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov – Caputo derivatives. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2023;44(2):595–606.
13. Fedorov V.E., Kostic M., Zakharova T.A. Quasilinear fractional order equations and fractional powers of sectorial operators. *Fractal and Fractional.* 2023;7(5)385.
14. Федоров В.Е., Авилович А.С. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае. *Сибирский математический журнал.* 2019;60(2):461–477.
15. Авилович А.С., Гордиевских Д.М., Федоров В.Е. Вопросы однозначной разрешимости и приближённой управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гёльдеровой правой частью. *Челябинский физико-математический журнал.* 2020;(5)1:5–21.
16. Fedorov V.E., Avilovich A.S. Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2021;66(6–7):1108–1121.
17. Fedorov V.E., Turov M.M. Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2022;(43)6:1502–1512.
18. Федоров В.Е., Туров М.М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана – Лиувилля. *Сибирский математический журнал.* 2021;62(5):1143–1162.
19. Туров М.М. Квазилинейные уравнения с несколькими производными Римана – Лиувилля произвольных порядков. *Челябинский физико-математический журнал.* 2022;(7)4:434–446.
20. Fedorov V.E., Turov M.M.. Multi-term equations with Riemann – Liouville derivatives and Hölder type function spaces. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* 2023;29:42.
21. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир; 1980. 664 с.
22. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир; 1985. 280 с.

References

1. Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and applications, Yverdon, Gordon and Breach Publ.; 1993. 976 p. (in Russian)
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing; 2006. 541 p.
3. Nakhushev AM. Fractional Calculus and its Applications. Moscow: Fizmatlit; 2003. 272 p. (in Russian)

4. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer; 1993. 366 p.
5. Bazhlekova E.G. Subordination principle for fractional evolution equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis.* 2000;3(3):213–230.
6. Bazhlekova E.G. Subordination in a class of generalized time-fractional diffusion-wave equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis.* 2018;21(4):869–900.
7. Glushak AV. On the cauchy type problem for an abstract differential equation with frcational derivative. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Fizika, matematika.* 2001;2:74–77. (in Russian)
8. Glushak AV, Manaenkova TA. Direct and inverse problems for an abstract differential equation containing Hadamard fractional derivatives. *Differential Equations.* 2011;(47)9:1294–1304. (in Russian)
9. Bajlekova E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology; 2001. 107 p.
10. Fedorov V.E., Romanova E.A. Inhomogeneous fractional evolutionary equation in the sectorial. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020;250(3):819–829.
11. Fedorov V.E., Avilovich A.S., Borel L.V. Initial Problems for Semilinear Degenerate Evolution Equations of Fractional Order in the Sectorial Case. *Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems.* NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7. Ed. by I.Area, A.Cabada, J.A.Cid etc. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.* 2019;292:41–62.
12. Fedorov V.E., Zakharova T.A. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov – Caputo derivatives. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2023;44(2):595–606.
13. Fedorov V.E., Kostic M., Zakharova T.A. Quasilinear fractional order equations and fractional powers of sectorial operators. *Fractal and Fractional.* 2023;7(5)385.
14. Fedorov VE, Avilovich AS. A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann — Liouville derivative in the sectorial case. *Siberian Mathematical Journal.* 2019; (60)2:359–372. (in Russian)
15. Avilovich AS, Gordievskikh DM, Fedorov VE. Issues of unique solvability and approximate controllability for linear fractional order equations with a Hölderian right-hand side. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal.* 2020;(5)1:5–21. (in Russian)
16. Fedorov V.E., Avilovich A.S. Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2021;66(6–7):1108–1121.
17. Fedorov V.E., Turov M.M. Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2022;(43)6:1502–1512.
18. Fedorov VE, Turov MM. The defect of a Cauchy type problem for linear equations with several Riemann — Liouville derivatives. *Siberian Mathematical Journal.* 2021; (62)5:925–942. (in Russian)
19. Turov MM. Quasilinear multi-term equations with Riemann — Liouville derivatives of arbitrary orders. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal.* 2022;(7)4:434–446. (in Russian)
20. Fedorov V.E., Turov M.M.. Multi-term equations with Riemann – Liouville derivatives and Hölder type function spaces. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* 2023;29:42.
21. Triebel H. Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators. Amsterdam: North-Holland Publ.; 1978. 528 p.
22. Hassard BD, Kazarinoff ND, Wan Y-H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge University Press; 1981. 311 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.09.2024 Received September 18, 2024
Поступила после рецензирования 01.11.2024 Revised November 1, 2024
Принята к публикации 05.11.2024 Accepted November 5, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Федоров Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Авилович Анна Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной механики и информационных технологий, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir E. Fedorov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

Anna S. Avilovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Associate Professor of Department of Computational Mechanics and Information Technology, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

К содержанию