Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 4. С. 296–313.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 4. P. 296–313.

УДК 517.929.2
MSC 34K37
Оригинальное исследование
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-296-313

Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности

Гринько А. П.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Барановичский государственный университет,
Беларусь, 225404, г. Барановичи, ул. Войкова, 21
agrinko_1999@yahoo.com

Аннотация. В статье рассматриваются локализованные производные типа Римана – Лиувилля, Маршо и локализованные интегралы типа Римана – Лиувилля функций с заданным модулем непрерывности. Для локализованного интеграла введён левый обратный оператор и доказана теорема о изоморфизме в гёльдеровских пространствах. Получены условия, связывающие модуль непрерывности функции, ограниченность винеровской p-вариации и выполнения условия гёльдеровости. Доказана возможность представления гёльдеровской функции в виде разности двух почти возрастающих гёльдеровской функции.

Ключевые слова: локализованная дробная производная, локальная дробная производная, модуль непрерывности функции, изоморфизм

Для цитирования: Гринько А. П. 2024. Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 296–313.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-296-313

Original Research

Localized and Local Derivatives of Fractional Order of Functions with a Given Modulus of Continuity

Alexander P. Grinko
(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Baranovichi State University,
21 Voikova St., Baranovichi 225404, Belarus
agrinko_1999@yahoo.com

Abstract. The article considers localized derivatives of the Riemann – Liouville, Marchaud type and localized integrals of the Riemann – Liouville type of functions with a given modulus of continuity. For the localized integral, a left inverse operator is introduced and a theorem on isomorphism in Holder spaces is proved. Conditions are obtained that connect the modulus of continuity of a function, the boundedness of the Wiener p-variation and the fulfillment of the Holder condition. The possibility of representing a Holder function as a difference of two almost increasing Holder functions is proved.

Keywords: Localized Fractional Derivative, Local Fractional Derivative, Modulus of Continuity of a function, Isomorphism

For citation: Grinko A.P. 2024. Localized and Local Derivatives of Fractional Order of Functions with a Given Modulus of Continuity. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 296–313. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-296-313

---

1. Введение. В настоящей статье исследуется действие правосторонних усечённых локализованных дробных производных ([1]) типа Маршо

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}f\right)(x)=\lim_{\delta\to 0}\left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{\delta}f\right)(x)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x-\delta}\frac{\phi(x)-\phi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha}}d\tau\right) \tag{1}$$

и правосторонних локализованных дробных интегралов ([2]) типа Римана – Лиувилля

$$\left(I^{\alpha,-\varepsilon}\phi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\phi(t)\,dt,\ -\infty<a\le x\le b<+\infty \tag{2}$$

в пространстве функций с заданным модулем непрерывности ([3]).

В работе получены условия, связывающие модуль непрерывности функции (3), ограниченность винеровской p-вариации (12) и выполнения условия гёльдеровости (4). Доказана возможность представления гёльдеровской функции порядка λ в виде разности двух почти возрастающих гёльдеровской функции порядка λ или возможность представления гёльдеровской функции в виде разности двух монотонных ломанных и гёльдеровской функции с модулем меньшим любого сколь угодно малого $\varepsilon, \varepsilon > 0$. Для локализованного интеграла (2) введён левый обратный оператор

$$D_{[a,b]}^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]}\left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x-\varepsilon k)\right)(x) = 0$$

и доказана теорема о изоморфизме фактор-пространства пространства $H^{\lambda}([a;b])$ по одномерному пространству, состоящему из констант и весового гёльдеровского пространства $H^{\lambda-\alpha}([a;b])$.

Целью данной работы является изучение свойств операторов локализованного дробного интегродифференцирования (1), (2) в пространнствах функций с заданным модулем непрерывности. Библиографию по аналогичным результатом для операторов дробного интегродифференцирования содержит [3]. В работе обобщается известный факт, что функции с ограниченным изменением могут быть представлены в виде разности двух неубывающих функций с ограниченным изменением. Среди близких к настоящей статье работ, описывающих структуру гёльдеровских пространств, отметим работу [4] и работу [5], в которой авторы показывают, что функция имеет ограниченную p-вариацию тогда и только тогда, когда она является композицией ограниченной неубывающей функции с функцией Гельдера. В работе [6] рассматривались пространства с модулем непрерывности, удовлетворяющим условию Дини. В качестве приближающих объектов применялись гармонические в стягивающихся к кривой областях функции. Мы рассматриваем более узкие пространства, пространства, в которых модуль непрерывности содержит ненулевую степенную составляющую. Полученные результаты дополняют исследования автора в этом направлении [1, 2, 7, 8].

2. Основные результаты. Рассмотрим класс непрерывных функций с заданными модулями непрерывности или характеристиками $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$, соответствующими разбиению $\pi = \{x_0; x_1; \ldots, x_n\}$, $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a;b]$ на конечное количество отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, $x_{k+1} - x_k < 1$, см.[3], §13.6:

$$\omega(f, [x_k; x_{k+1}], h) = \sup_{0<t<h}\ \sup_{\substack{x \\ x, x-t\in[x_k;x_{k+1}]}} |f(x) - f(x-t)| \leq \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(\pi, h) \equiv \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h), \tag{3}$$

$\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$ – заданные, непрерывные, неубывающие по h функции, для которых $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(0) = 0, k = \overline{0, n-1}$. Обозначим класс функций с заданными модулями непрерывности $H^{\omega(\pi,h)}([a,b])$. В классе функций с заданными модулями непрерывности, соответствующими разбиению π, можно ввести норму:

$$\|f\|_{H^{\omega(\pi,h)}} = \max_{x\in[a;b]}|f(x)| + \sup_{\pi,h,k}\frac{\omega(f, [x_k; x_{k+1}], h)}{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}.$$

Частным случаем класса функций с заданными модулями непрерывности является класс функций с переменным порядком гёльдеровости $\lambda(x)$ и множителем $\sigma(h)$. Пусть t_k произвольная точка отрезка $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, $0 < \lambda(t_k) \leq 1$. Функция $f(x) \in H^{\lambda(x),\sigma(h)}([a;b]) \equiv H^{\lambda,\sigma}([a;b])$, если существует $\sigma(h) : [0;1] \to R^{+}$, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^{\lambda}}{\sigma(h)} = 0$, что для всех $x_k, x_{k+1} \in [a, b]$ выполнено условие

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |\sigma(h)|\,|h|^{\lambda}, |h| < \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$C > 0$ – константа. В этом классе можно ввести норму:

$$\|f\|_{H^{\lambda,\sigma}} = \|f\| + \sup_{\substack{x, x+h\in[a;b] \\ |h|<0,5}}\frac{|f(x+h) - f(x)|}{|\sigma(h)|\,|h|^{\lambda}}.$$

В работах [7], [8] были получены следующие результаты.

Теорема 2.1. *Пусть $x \in [a+2\varepsilon, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство*

$$\left(I^{\alpha,-\varepsilon}D^{\alpha,-\varepsilon}f\right)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(I^{\alpha,-\varepsilon}D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon}f\right)(x) = \phi(x) - \int_0^1 K(s,\alpha)\, f(x-\varepsilon-\varepsilon s)\, ds,$$

где $\int_0^1 K(s,\alpha)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^1 s^{\alpha-1}ds + \int_0^1 \frac{s^{-\alpha}-s^{\alpha}}{s+1}ds\right) = 1$ *имеет место поточечно для* $\phi(x) \in H^{\lambda}[(a;b)]$, $0 < \alpha < \lambda < 1$ *и почти всюду для* $\phi(x) \in L_p(a,b)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = I^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x)$, тогда для любого $x \in [a+2\varepsilon, b]$, $-\infty \le a < b \le \infty$, равенство*

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}f\right)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon}f\right)(x) = \phi(x) - \phi(x-\varepsilon),\ 0<\delta<\varepsilon,$$

имеет место поточечно для $\phi(x) \in H^{\lambda}(a;b)$, $0<\alpha<\lambda<1$ и почти всюду для $\phi(x) \in L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Интегральное уравнение*

$$I^{\alpha,-\varepsilon}\left(D^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x)\right)(x) = \phi(x) - \int\limits_0^1 K(s,\alpha) f(x-\varepsilon-\varepsilon s)\,ds = 0$$

где

$$\int\limits_0^1 K(s,\alpha)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^1 s^{\alpha-1}ds + \int\limits_0^1 \frac{s^{\alpha}-s^{-\alpha}}{s+1}ds\right) = 1,$$

в пространстве $H^{\lambda}(a;b)$, для $a > -\infty$, имеет единственное решение $\phi(x) \in H^{\lambda}(a;b)$, заданное следующими рекурентными соотношениями:
1. $a < x < a+2\varepsilon$, $\phi(x) = \phi_0(x)$ – задана произвольно;
2. $a+2\varepsilon < x < a+3\varepsilon$,

$$\phi(x) = \phi_1 = \int\limits_0^1 \frac{\tau^{\alpha-1}\phi_0(x-\varepsilon-\varepsilon\tau)\,d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int\limits_0^1 \frac{\left(\tau^{\alpha}-\tau^{-\alpha}\right)\phi_0(x-\varepsilon-\varepsilon\tau)\,d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)};$$

...
n. $n>2$, $a+n\varepsilon < x < b$,

$$\phi(x) = \phi_{n-1}(x) = \int\limits_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{\tau^{\alpha-1}\phi_{n-3}(x-\varepsilon-\varepsilon\tau)\,d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int\limits_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{\left(\tau^{\alpha}-\tau^{-\alpha}\right)\phi_{n-3}(x-\varepsilon-\varepsilon\tau)\,d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)} +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{\tau^{\alpha-1}\phi_{n-2}(x-\varepsilon-\varepsilon\tau)\,d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int\limits_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{\left(\tau^{\alpha}-\tau^{-\alpha}\right)\phi_{n-2}(x-\varepsilon-\varepsilon\tau)\,d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)}.$$

Введём в пространстве функций с заданными модулями непрерывности порядок гёльдеровости. Если

$$\lim_{t\to x}\frac{|f(x)-f(t)|}{x-t} = \lim_{t\to x}\frac{|f(x)-f(t)|-|f(x)-f(x)|}{x-t} = 0,$$

для всех $x \in (x_k, x_{k+1})$, то производные по t функции $|f(x)-f(t)|$ равны нулю и, следовательно, $f(x) = const$, на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Если

$$\lim_{t\to x_+}\frac{|f(t)-f(x)|}{t-x} = \lim_{t\to x_-}\frac{|f(x)-f(t)|}{x-t} = const > 0,$$

для всех $x \in (x_k, x_{k+1})$, то односторонние производные по t функции $|f(x)-f(t)|$ в точке x равны константе, и следовательно, $|f(x)-f(t)| = const\,|x-t|$, т. е. липшицевы на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$. Если функция $f(x)$-непрерывна, но

$$\lim_{t\to x_+}\frac{|f(t)-f(x)|}{t-x} = \lim_{t\to x_-}\frac{|f(x)-f(t)|}{x-t} = +\infty.$$

Тогда существует $h<1, N>1$, такие, что для всех $|t-x|<h$ выполняется:

$$\frac{|f(t)-f(x)|}{t-x} > N, t > x \text{ или } \frac{|f(x)-f(t)|}{x-t} > N, t < x.$$

Поэтому имеем:

$$\log_{|t-x|}\frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|} < \log_{|t-x|}N, \varliminf_{t\to x}\log_{|t-x|}|f(t)-f(x)| \le 1.$$

По предположению $0 < |f(x)-f(t)| \le 1$, следовательно получаем:

$$0 \le \varliminf_{t\to x}\log_{|t-x|}|f(t)-f(x)| \le 1. \tag{5}$$

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция. В случае, если выполнено условие (5), в качестве порядка гёльдеровости $\lambda_a^b(x)$ в точке $x \in [a;b]$ можно взять

$$\lambda_a^b(x) = \varliminf_{t\to x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)|. \tag{6}$$

Определённый в (6) порядок гёльдеровости в точке x означает, что поскольку

$$|f(t) - f(x)| \le \frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)}(|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}} |t-x|^{\lambda_x^t(x)}, x, t \in [a;b],$$

множитель $\frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)}(|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}}$ может стремиться к бесконечности, но $\lim\limits_{t\to x} \frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)}(|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}} |t-x|^{\varepsilon} = 0$, для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\varliminf_{t\to x_+} \log_{t-x} |f(t) - f(x)| = \varliminf_{t\to x_+} \log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \ \varliminf_{t\to x_-} \log_{x-t} |f(x) - f(t)| = \varliminf_{t\to x_-} \log_{x-t} \omega_t^x(x-t),$$

то в качестве порядка гёльдеровости $\lambda_a^b(x)$, $x \in [a;b]$ можно взять

$$\lambda_a^b(x) = \min\left(\varliminf_{h\to 0, x+h\in[a;b]} \log_h \omega_x^{x+h}(h); \varliminf_{h\to 0, x-h\in[a;b]} \log_h \omega_{x-h}^x(h)\right). \tag{7}$$

По предположению $\omega_x^t(t-x) \le 1$, следовательно, получаем:

$$0 \le \min\left(\varliminf_{t\to x_-} \log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \varliminf_{t\to x_+} \log_{x-t} \omega_t^x(x-t)\right);$$

$$\log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \log_{x-t} \omega_t^x(x-t) \le 1, |t-x| < h. \tag{8}$$

Пусть на некотором отрезке $[x_k; x_{k+1}] \subset [a;b]$, $0 < c < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) \le 1, x \in [x_k; x_{k+1}]$. Из определения порядка гёльдеровости $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, имеющего множитель в точке (7), следует, что для любого выбора точек x_k, x_{k+1}, существует такое $\varepsilon, 0 < \varepsilon < c$, для которого можно ввести кусочно постоянный порядок гёльдеровости на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$:

$$\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon = \inf_{x\in[x_k;x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) - \varepsilon > 0.$$

Лемма 2.1. *Пуст* $\lambda_a^b = \inf\limits_{x\in[a;b]} \varliminf\limits_{t\to x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| > c > 0$. *Тогда класс* $H^{\omega(h)}([a,b]) \subset H^{\lambda_a^b-\varepsilon}([a,b])$, *для любого* $\varepsilon, 0 < \varepsilon < c$.

Доказательство. Действительно, если $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такой $x \in [x_k; x_{k+1}]$, что $\varliminf\limits_{t\to x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1$, т. е. существует такая последовательность $\{t_n\} \in [x_k; x_{k+1}]$, что $\lim\limits_{t_n\to x} \log_{|t_n-x|} |f(t_n) - f(x)| = \lambda, \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \le \lambda < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1$. Далее, для всех достаточно малых ε_2 таких, что $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon_2 > 0$ существует такое $n_0 \in N$, что для всех $n, n > n_0$ будет выполняться:

$$\left|\log_{|x-t_n|} |f(x) - f(t_n)| - \lambda\right| < \varepsilon_2;$$

$$|x-t_n|^{\lambda+\varepsilon_2} < |f(x) - f(t_n)| < |x-t_n|^{\lambda-\varepsilon_2}.$$

Если последнее неравенство выполнено для всех точек $t_n, n > n_0$, в которых график функции $f(x)$ приближается на минимальное расстояние к графикам функций $\pm|x-t|^{\lambda-\varepsilon_2}$, оставаясь внутри площади, ограниченной сверху $|x-t|^{\lambda-\varepsilon_2}$ и снизу $-|x-t|^{\lambda+\varepsilon_2}$, то и для всех $t, |x-t| < \delta, 0 < \delta < |x-t_{n_0}|$ будет иметь место:

$$|f(x) - f(t)| < |x-t|^{\lambda_k^{k+1}-\varepsilon_2}. \tag{9}$$

Класс $H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a,b])$ компактен в $H^{\omega(h)}([a,b])$. Действительно, по предположению класс $H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a,b])$ равномерно ограничен $0 \le |f(x)| \le 1, x \in [a;b]$ и равностепенно непрерывен. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $f(x) \in H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a,b])$, $|f(x_2) - f(x_1)| \le \omega_a^b(x_2 - x_1) < \varepsilon_1, x_1, x_2 \in [a;b]$, $|x_2 - x_1| < \delta$. Следовательно, по теореме Арцела класс $H^{\omega(h)}([a,b])$ предкомпактен в пространстве непрерывных функций, а значит полон и компактен (см.,[9] стр. 173) в $H^{\omega(h)}([a,b])$. Поэтому δ может быть выбрано независимо от $x \in [x_k; x_{k+1}]$. Следовательно, функция гёльдерова порядка $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_2$ с константой равной единице на отрезках $[x; x+\delta]$, $[x+\delta; x]$, а значит с константой $C_{x_k}^{x_{k+1}} \le \frac{x_{k+1}-x_k}{\delta}$ на всём $[x_k; x_{k+1}]$. Поэтому δ может быть выбрано независимо от $x \in [x_k; x_{k+1}]$. Следовательно, функция гёльдерова порядка $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_2$ с константой равной единице на отрезках $[x; x+\delta]$, $[x+\delta; x]$, а значит с константой $C_{x_k}^{x_{k+1}} \le \frac{x_{k+1}-x_k}{\delta}$ на всём $[x_k; x_{k+1}]$.

Оценка (9) имеет место и для $\omega_x^t(t-x), \omega_t^x(x-t)$. Если $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ вычисляется по формуле (7), то для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $x \in [x_k; x_{k+1}]$ такой, что

$$\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \le \min\left(\varliminf_{h\to 0, x, x+h\in[x_k;x_{k+1}]} \log_h \omega_x^{x+h}(h); \varliminf_{h\to 0, x, x-h\in[x_k;x_{k+1}]} \log_h \omega_{x-h}^{x}(h)\right) < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1.$$

Т. е. всегда существует такая последовательность $\{h_n\} \in [0; x_{k+1} - x_k]$, что $\min\left(\lim\limits_{h_n\to 0, x, x+h_n\in[x_k;x_{k+1}]} \log_{h_n} \omega_x^{x+h_n}(h_n); \lim\limits_{h_n\to 0, x, x-h_n\in[x_k;x_{k+1}]} \log_{h_n} \omega_{x-h_n}^{x}(h_n)\right) = \lambda_k, \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \le \lambda_k < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1$. Далее, для всех достаточно малых ε_2 таких, что $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon_2 > 0$, существует такое $n_0 \in N$, что для всех $n, n > n_0$ будет выполнятся:

$$\left|\min\left(\log_{h_n} \omega_x^{x+h_n}(h_n); \log_{h_n} \omega_{x-h_n}^{x}(h_n)\right) - \lambda_k\right| < \varepsilon_2;$$

$$h_n^{\lambda_k+\varepsilon_2} < \max\left(\omega_x^{x+h_n}(h_n); \omega_{x-h_n}^{x}(h_n)\right) < h_n^{\lambda_k-\varepsilon_2}.$$

Если последние неравенства выполнены для всех точек $h_n, n > n_0$, в которых график функций $\omega_x^{x+t}(t), \omega_{x-t}^{x}(t)$ приближается на минимальное расстояние к графикам функций $\pm t^{\lambda_k-\varepsilon_2}$, оставаясь внутри площади, ограниченной сверху $t^{\lambda_k-\varepsilon_2}$ и снизу $-t^{\lambda_k+\varepsilon_2}$, то и для всех $t, |x-t| < \delta, 0 < \delta < |x - t_{n_0}|$ будет иметь место:

$$\max\left(\omega_x^{x+h_n}(h_n); \omega_{x-h_n}^{x}(h_n)\right) < h_n^{\lambda_k-\varepsilon_2}.$$

Следовательно, на отрезках $[x_k; x_{k+1}] \subset [a; b]$ функции $\frac{\omega_x^{x+t}(t)}{t^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}-\varepsilon_k}}, \frac{\omega_{x-t}^{x}(t)}{t^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}-\varepsilon_k}}, k = \overline{1; n-1}$ непрерывны и равномерно ограничены. Имеет место следующее свойство:

$$|f(t_{k+1}) - f(t_k)| \le \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) \le \max_{h\in[0;t_{k+1}-t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}-\varepsilon}} \right\} h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}-\varepsilon}$$

$$\le \sup_{x\in[x_k;x_{k+1}]} \left(\max_{h\in[0;t_{k+1}-t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}-\varepsilon}} \right\} \right) |t_{k+1} - t_k|^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}-\varepsilon} = C_{x_k}^{x_{k+1}} |t_{k+1} - t_k|^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}-\varepsilon},$$

$$C_{x_k}^{x_{k+1}} = \sup_{x\in[x_k;x_{k+1}]} \left(\max_{h\in[0;t_{k+1}-t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}-\varepsilon}} \right\} \right) < \infty, t_k, t_{k+1} \in [x_k; x_{k+1}], \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Рассмотрим винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x)$, введённую в работе [10].

Определение 2.1. *Пусть $f(x) : [a; b] \to R$, $p(x) : [a; b] \to [1, \infty)$, π – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ точками $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ вместе с произвольным выбором точек $t_k, x_k \le t_k \le x_{k+1}, k = \overline{1, N}$. Функция $f(x)$ называется функцией с ограниченным винеровским изменением с переменным показателем степени $p(x)$ на отрезке $[a; b]$, если существует такая константа $C > 0$, что выполнено неравенство:*

$$\sum_{k=0}^{N} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)} \le C. \tag{11}$$

Определение 2.2. *Пусть $f(x) : [a; b] \to R$, $p(x) : [a; b] \to [1, \infty)$, π – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ точками $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ вместе с произвольным выбором точек $t_k, x_k \le t_k \le x_{k+1}, k = \overline{1, N}$. Точная верхняя грань сумм* (12) *по всевозможным конечным разбиениям π отрезка $[a; b]$ называется полным винеровским изменением с переменным показателем степени $p(x)$ (винеровской вариацией с переменной экспонентой $p(x)$) и обозначается*

$$V_a^{b,p(x)}[f] = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_{k+1})|^{p(t_k)} \right). \tag{12}$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что функции равномерно ограничены, т. е. $0 \le f(x) \le 1$ и $|b - a| \le 1$. Если $f(x) = const$ такие условия не выполняются, то можно рассмотреть функцию $\overline{f}(x)$, где $\overline{f}(t) = f^*(t) - \min\limits_t f^*(t)$, $f^*(t) = \frac{f(t)}{\max\limits_t f(t) - \min\limits_t f(t)}$, $t = \frac{x}{b-a}$, поскольку в неравенстве Гёльдера (4) для преобразованных функций значение множителя $\sigma(h)$ изменится на константу.

Для полной вариация порядка $p(x)$ имеют место следующие свойства:

$$1) V_a^{b,p(x)}[f - const] = V_a^{b,p(x)}[f], \tag{13}$$

$$2) V_a^{b,p(x)}[Af] \leq \begin{cases} A^{\sup\limits_{x\in[a,b]} p(x)} V_a^{b,p(x)}[f], A \geq 1, \\ A^{\inf\limits_{x\in[a,b]} p(x)} V_a^{b,p(x)}[f], A < 1. \end{cases} \tag{14}$$

$$3) \text{ Если } f(x) \in V_a^{b,p(x)}, \text{ то } V_a^{b,p_1(x)}[f] \leq V_a^{b,p(x)}[f], 1 \leq p(x) \leq p_1(x). \tag{15}$$

$$4) \text{ Если } V_a^{b,p(x)}[f^{p_0}] < +\infty, 1 \leq p(x) < +\infty, \text{ то } V_a^{b,p(x)}[f^{p_1}] \leq V_a^{b,p(x)}[f^{p_0}], 0 \leq f(x) \leq 1, 1 \leq p_0 \leq p_1. \tag{16}$$

$$5) \text{ Если } V_a^{b,p(x)}[f^{p_0}] < +\infty, 1 \leq p(x), p_0 < +\infty, \text{ то } V_a^{b,p_0 p(x)}[f] < +\infty. \tag{17}$$

$$6) V_a^{b,p(x)}[f_1 + f_2] \geq V_a^{b,p(x)}[f_1] + V_a^{b,p(x)}[f_2], V_a^{b,p(x)}[f_1 - f_2] \leq V_a^{b,p(x)}[f_1] + V_a^{b,p(x)}[f_2]. \tag{18}$$

7) Если $f(x)$ – непрерывная и кусочно монотонная функция на $[a;b]$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_N = b$ – не более чем счётное число всех точек локальных экстремумов, $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 1, k = \overline{0; N-1}, N \leq +\infty$, то

$$V_a^{b,p(x)}[f] = \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} p(x)}, 1 \leq p(x). \tag{19}$$

Также в работе [5] были получены свойства:

$$8) V_a^{b,p(x)}[f] \text{– неотрицательная неубывающая функция;}$$

$$9) |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x)} \leq V_a^{b,p(x)}[f], x_{k+1}, x_k \in [a,b], x \in [x_k, x_{k+1}];$$

$$10) V_a^{b,p(x)}[f] + V_b^{c,p(x)}[f] \leq V_a^{c,p(x)}[f], a \leq b \leq c.$$

Обозначим $p(t_k) = p(x_k; x_{k+1}), t_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Имеют место неравенства:

$$\left|a^p - b^p\right| \geq |a - b|^p, b, a \geq 0, p \geq 1; \tag{20}$$

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p, b, a \geq 0, p \geq 1; \tag{21}$$

$$|a|^p + |b|^p \geq |a - b|^p, ab \geq 0, p \geq 1. \tag{22}$$

Доказательство свойства (15):

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p_1(x_k;x_{k+1})} \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k;x_{k+1})}.$$

Доказательство (16):

$$\left|f(x_{k+1})^{p_0} - f(x_k)^{p_0}\right| = \left|\int\limits_0^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt - \int\limits_0^{f(x_k)} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt\right| = \left|\int\limits_{f(x_k)}^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt\right| \geq \left|\int\limits_{f(x_k)}^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_1-1}}{p_1} dt\right| =$$

$$= \left|f(x_{k+1})^{p_1} - f(x_k)^{p_1}\right|, 0 \leq f(x_k), f(x_{k+1}) \leq 1, 1 \leq p_0 \leq p_1.$$

Доказательство (17). Из неравенства (21) следует, что

$$\left|\overline{f}^{p_0}(x_{k+1}) - \overline{f}^{p_0}(x_k)\right|^{p(x_1,x_2)} \geq \left|\overline{f}(x_{k+1}) - \overline{f}(x_k)\right|^{p_0 p(x_1,x_2)}.$$

Доказательство (18). Из неравенства (21) следует, что

$$|(f_1(x_{k+1}) + f_2(x_{k+1})) - (f_1(x_k) + f_2(x_k))|^{p(x_k;x_{k+1})} = ((f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)) +$$

$$+ (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)))^{p(x_k;x_{k+1})} \geq (f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^{p(x_k;x_{k+1})} + (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k))^{p(x_k;x_{k+1})}.$$

т. е. $V_a^{b,p(x)}[f_1 + f_2] \geq V_a^{b,p(x)}[f_1] + V_a^{b,p(x)}[f_2]$. Из неравенства (22) следует, что

$$|(f_1(x_{k+1}) - f_2(x_{k+1})) - (f_1(x_k) - f_2(x_k))|^{p(x_k;x_{k+1})} = ((f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)) -$$

$$- (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)))^{p(x_k;x_{k+1})} \leq (f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^{p(x_k;x_{k+1})} + (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k))^{p(x_k;x_{k+1})}.$$

т. е. $V_a^{b,p(x)}[f_1 - f_2] \le V_a^{b,p(x)}[f_1] + V_a^{b,p(x)}[f_2]$.

Доказательство (19). Покажем, что если функция непрерывная и кусочно монотонна на отрезках $[x_k; x_{k+1}]$, то винеровская вариация по всему отрезку $[a; b]$ равна сумме винеровских вариаций по отрезкам $[x_k; x_{k+1}]$. Пусть в точке $c \in [a; b]$ функция $f(x)$ имеет единственный локальный экстремум на отрезке $f(x)$, тогда $|f(c) - f(a)|^p + |f(c) - f(b)|^p \ge |f(x) - f(a)|^p$, т. к. либо $|f(c) - f(a)|^p \ge |f(x) - f(a)|^p$, либо $|f(c) - f(b)|^p \ge |f(x) - f(a)|^p$. Следовательно, разбиение π всегда содержит точки локальных экстремумов и наоборот внутри промежутков монотонности разбиение π не содержит точек. Поскольку если $f(x)$–монотонная на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, $d \in [x_k; x_{k+1}]$, то из свойства (21) следует

$$|f(d) - f(x_k)|^{p(x_k;d)} + |f(x_{k+1}) - f(d)|^{p(d;x_{k+1})} \le$$

$$\le |f(d) - f(x_k)|^{\inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} + |f(x_{k+1}) - f(d)|^{\inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} \le$$

$$\le \left||f(d) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(d)|\right|^{\inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} \le |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})}.$$

Значит разбиение π не будет содержать точек монотонности. Следовательно $\pi = \left\{x_k, k = \overline{0; N-1}\right\}$.

Для функций $f(x)$ из пространства $H^{\omega(x)}([a; b])$ с $\lambda_a^b > c > \varepsilon > 0$ рассмотрим винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x) \ge 1$. Пусть $\pi : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$- произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Учитывая (8) и свойство $\frac{1}{\log_h \omega(h) - \varepsilon} = \frac{\log_h h}{\log_h \omega(h) h^{-\varepsilon}} = \log_{\omega(h)h^{-\varepsilon}} h$, введём переменную экспоненту:

$$p(x) = \max\left(\varlimsup_{t\to x_-} \log_{\omega_x^t(t-x)(t-x)^{-\varepsilon}}(t - x), \varlimsup_{t\to x_+} \log_{\omega_t^x(x-t)(x-t)^{-\varepsilon}}(x - t)\right), 1 \le p(x) < \infty, x \in [a; b].$$

Из свойства (13) следует, что $V_a^{b,p(x)}[const] = 0$. Если $f(x) = const$, то $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) = 0$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, и $p(x_k) = \log_{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x_k)}(x_{k+1} - x_k)$ не определено. В тоже время $|f(x_k) - f(x_{k-1})|^{p_k(x)} = 0$, для любого $p(x) > 0$. Поскольку для константы $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) \le |x_{k+1} - x_k|$, то $\log_{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x_k)}(x_{k+1} - x_k) \le \log_{(x_{k+1}-x_k)}(x_{k+1} - x_k) = 1$ и $p(x)$ примем равным единице. Можно также при вычислении $V_a^{b,p(x)}[f(x)]$ вместо функции $f(x)$ рассматривать функцию $\overline{f}(x)$ с уменьшенной областью определения на интервалы $[x_k, x_{k+1}]$, для которых $f(x) = const$.

Лемма 2.2. *Пусть для произвольного разбиения* $\pi : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ $f(x) \in H^{\omega(x)}([a; b])$ *с заданными модулями непрерывности* $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$ *и с* $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) = \min\limits_{x+h,x-h\in[x_k;x_{k+1}]}\left(\varliminf\limits_{h\to 0}\log_h \omega_x^{x+h}(h); \varliminf\limits_{h\to 0}\log_h \omega_{x-h}^x(h)\right)$, $h > 0$, $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, $0 < c \le \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}$. *Тогда, для всех* ε*, удовлетворяющих условиям* $0 < \varepsilon < c$*, функции* $f(x)$ *имеют ограниченную винеровскую вариацию кусочно переменного порядка* $p(t_k) = p_{x_k}^{x_{k+1}}(t_k) = p_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}$, $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$ *вида:*

$$V_a^{b,p(x)}[f] = \sup_\pi\left(\sum_{k=0}^{N}|f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)}\right) = \sup_\pi\left(\sum_{k=0}^{N}|f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}}\right), t_k \in [x_k; x_{k+1}].$$

Доказательство. Из оценки (10) имеем:

$$V_a^{b,p(x)}[f] = \sup_\pi\left(\sum_{k=0}^{N}|f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)}\right) \le \sup_\pi\left(\sum_{k=0}^{N}\left(C_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}\right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}}\right) =$$

$$= (b - a)\sup_\pi\left(\max_{k=\overline{1,n-1}}\left(C_{x_k}^{x_{k+1}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}}\right) = (b - a)\sup_\pi\left(\max_{k=\overline{1,n-1}}\left(\max_{h\in[0;x_{k+1}-x_k]}\left\{\frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}}\right\}\right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}}\right) \le$$

$$\le (b - a)\sup_\pi\left(\max_{k=\overline{1,n-1}} C^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}}\right) < \infty, \varepsilon < c. \tag{23}$$

Следующая лемма показывает, что для непрерывных функций ограниченность винеровской вариации с переменным порядком $p(x) \ge 1$ совпадает с принадлежностью пространству $H^\omega([a; b])$ с характеристиками $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) = V_{x_k}^{x_{k+1},p(x)}[f]^{\frac{1}{p(x)}}$ и кусочно постоянным порядком вариации $p(x) = p_{x_k}^{x_{k+1}} = \sup\limits_{t\in[x_k;x_{k+1}]}(p(t))$.

Лемма 2.3. *Если непрерывная функция* $f(x)$ *имеет ограниченную винеровскую вариацию с переменным непрерывным порядком* $p(x)$, $1 \le p(x) \le P < \infty$, *то* $f(x) \in H^\omega([a; b])$. *Для любых* $x_{k+1}, x_k \in [a, b]$ *непрерывные, монотонные характеристики* $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)$ *на отрезках* $[x_k; x_{k+1}]$ *могут быть вычислены* *по формуле* $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x_k)=V_{x_k}^{x_{k+1},p(x)}[f]^{\frac{1}{p(z)}}$. *Переменный порядок гёльдеровости функции* $f(x)$ *в точке* x *равен* $\frac{1}{p(x)}$.

Доказательство. Покажем, что из непрерывности $f(x)$ следует непрерывность винеровской вариации $\phi(x)=V_a^{x,p(x)}[f]$ на $[a,b]$. Предположим противное, $f(x)$ имеет разрыв в точке x. В силу ограниченности $f(x)$ это разрыв первого рода. Для определённости будем считать, что $V_a^{y,p(x)}[f]=T$, тогда имеем:

$$\lim_{x\to y_-} V_a^{x,p(x)}[f]=M>0, M<T.$$

Т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для всех $x, y-\delta<x<y$ одновременно будет выполняться

$$V_a^{x,p(x)}[f]\le M, f(y)-f(x)<\varepsilon.$$

Тогда можем записать:

$$V_a^{y,p(x)}[f]-V_a^{x,p(x)}[f]\ge T-M>\varepsilon. \tag{24}$$

С другой стороны, если $V_a^{y,p(x)}[f]=T$, то для $\varepsilon>0$, существует такое конечное разбиение $\pi=\{x_i\}, i=\overline{1,N}, a=x_1<x_2<\ldots<x_N=y$ и такой выбор $t_k, x_k\le t\le x_{k+1}, p(t_k)=p(x_k;x_{k+1})$, что

$$V_a^{y,p(x)}[f]\le\sum_{k=0}^{N-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|^{p(x_k;x_{k+1})}+\varepsilon\le \mathrm{T}+\varepsilon.$$

В случае, если $x_{N-1}>y-\delta$, возьмём $x=x_{N-1}$, имеем:

$$V_a^{y,p(x)}[f]-V_a^{x_{N-1},p(x)}[f]\le\varepsilon+\sum_{k=0}^{N-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|^{p(x_k;x_{k+1})}-V_a^{x_{N-1},p(x)}[f]=$$

$$=\varepsilon+\sum_{k=0}^{N-2}|f(x_{k+1})-f(x_k)|^{p(x_k;x_{k+1})}+|f(y)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};y)}-V_a^{x_{N-1},p(x)}\le\varepsilon+V_a^{x_{N-1},p(x)}[f]+$$

$$+|f(y)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};y)}-V_a^{x_{N-1},p(x)}[f]=\varepsilon+|f(y)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};y)}\le\varepsilon+\varepsilon^{\min\limits_{x\in[a,b]}p(x)}\le 2\varepsilon. \tag{25}$$

Пусть $x_{N-1}<y-\delta$. Тогда учитывая, что $V_a^{y,p(x)}[f]-V_a^{x,p(x)}[f]\ge 0, ||a|-|b||\le|a-b|$, существует $\delta>0$, такое, что если $y-x<\delta$, то $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, $\max\limits_{x\in[x_{N-1},x],y\in[x_{N-1},y]}|p(x_{N-1};y)-p(x_{N-1};x)|<\varepsilon$. Тогда имеем:

$$V_a^{y,p(x)}[f]-V_a^{x,p(x)}[f]\le$$

$$V_a^{y,p(x)}[f]-V_a^{x,p(x)}[f]\le\varepsilon+\sum_{k=0}^{N-2}|f(x_{k+1})-f(x_k)|^{p(x_k;x_{k+1})}+|f(x)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};x)}+$$

$$+|f(y)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};y)}-|f(x)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};y)}+|f(x)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};y)}-$$

$$-|f(x)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};x)}-V_a^{x,p(x)}[f]\le\varepsilon+V_a^{x,p(x)}[f]-V_a^{x,p(x)}[f]+p(x_{N-1};y)|f(y)-f(x)|\times$$

$$\times(|f(x)-f(x_{N-1})|+\theta_1(|f(y)-f(x_{N-1})|-|f(x)-f(x_{N-1})|))^{p(x_{N-1};y)-1}+$$

$$+|p(x_{N-1};y)-p(x_{N-1};x)|\,|f(x)-f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1};x)+\theta_1(p(x_{N-1};y)-p(x_{N-1};x))}\le\varepsilon+\varepsilon P2^{P-1}+\varepsilon 1^1. \tag{26}$$

Полученные противоречия в неравенствах (24), (25) или (24), (26) показывают, что функция $\phi(x)=V_a^{x,p(x)}[f]$ непрерывна.

Из леммы 2 работы [5] следует, что $|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le V_{x_k}^{x_{k+1},p(x)}[f]^{\frac{1}{p(x_{k+1},x_k)}}$ для любого порядка $p(x_{k+1},x_k)=p(z), t\in[x_k,x_{k+1}]$. В качестве характеристики, т. е. непрерывной по $h>0$, неотрицательной, монотонной на отрезке $[x_k,x_{k+1}]$ функции возьмём $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)\equiv V_{x_k}^{x_k+h,p(x)}[f]^{\frac{1}{p(x_{k+1},x_k)}}$. Из леммы 4.2 [5] следует, что $f(x)=g(\phi(x))$, где $\phi(x)=V_{x_k}^{x,p(x)}[f]$ ограниченная неотрицательная неубывающая функция, а $g(y)\in H^{\frac{1}{p(x_{k+1},x_k)}}([\phi(x_k),\phi(x_{k+1})])$. Поскольку $\phi(x)$ непрерывна, т. е. гёльдерова порядка $\theta(x), 0\le\theta(x)\le 1$, а $g(y)$ гёльдерова порядка $\frac{1}{p(x_{k+1},x_k)}$, то из [9] следует, что порядок гёльдеровости композиции $g(\phi(x))=f(x)$ равен произведению $\frac{1}{p(x_k;x_{k+1})}\theta(x)\le\frac{1}{p(x_k;x_{k+1})}$. С другой стороны, поскольку мы показали, что $V_x^{y,p(x)}[f]^{\frac{1}{p(x;y)}}$ – характеристика, то из леммы 2.2 оценка (23) следует, что для полного винеровского изменения имеет место оценка:

$$V_x^{y,p(x)}[f]\le G(y-x),$$

а значит
$$V_x^{y,p(x)}[f]^{\frac{1}{p(x;y)}} \le G^{\frac{1}{p(x;y)}}(y-x)^{\frac{1}{p(x;y)}} \le C\,|y-x|^{\frac{1}{p(x;y)}}.$$
Т. е. переменный порядок гёльдеровости больше либо равен $\frac{1}{p(x;y)}$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет порядок гёльдеровости $\frac{1}{p(x;y)}$. Лемма доказана.

Поскольку неограниченное изменение даёт осцилляция функции с модулем меньшим любого наперёд заданного числа, то введём понятие почти монотонной функции.

Определение 2.3. *Функция $f(x,\varepsilon)$ с $D(f), E(f) \subset R$ называется почти возрастающей (почти убывающей) с показателем ε, если $f(x_1,\varepsilon) - f(x_2,\varepsilon) \le \varepsilon$, $(f(x_2,\varepsilon) - f(x_1,\varepsilon) \le \varepsilon)$ для $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D(f)$.*

Лемма 2.4. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x), 1 \le p(x)$ на отрезке $[a;b]$, то функцию $f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ можно представить в виде разности двух почти неубывающих функций с показателем ε.*

Доказательство. Построим для любой функции с ограниченным винеровским изменением $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ почти возрастающие функции $f_1(x,\varepsilon) = f_1(x), f_2(x,\varepsilon) = f_2(x)$, для которых $V_a^{x,p(x)}[f_1], V_a^{x,p(x)}[f_2] < \infty$ и $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. По определению, если функция имеет ограниченну винеровскую вариацию, то для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое конечное разбиение $\pi : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$ и такой выбор точек $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$, что
$$V_a^{x,p(x)}[f] - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|^{p(t_i)} \le V_a^{x,p(x)}[f]. \tag{27}$$
Для того, чтобы при переходе к соседнему интервалу знаки $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и $f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})$ были различны, объединим соседние интервалы, если $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и $f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})$ имеют одинаковый знак. В силу свойства (21), новая сумма $\sum\limits_{i=1}^{M-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|^{p(t_i)}$ не уменьшится и неравенство (27) будет иметь место. Полученное разбиение обозначим $\pi' : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_M = b, M \le N$. Для определённости будем считать, что $f(x_2) - f(x_1) \le 0$. Рассмотрим последовательность функций
$$\overline{f_1}(x) = f(x_1) - (f(x) - f(x_1)) = 2f(x_1) - f(x), x \in [a;b];$$
$$\overline{f_2}(x) = \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1;x_2], \\ 2\overline{f_1}(x_2) - \overline{f_1}(x), x \in [x_2;b]; \end{cases} = \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1;x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2;b]; \end{cases}$$
$$\overline{f_3}(x) = \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1;x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2;x_3], \\ 2(2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)) - 2f(x_1) + 2f(x_2) - f(x), x \in [x_3;b]; \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1;x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2;x_3], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + 2f(x_3) - f(x), x \in [x_3;b]; \end{cases}$$
и т. д.
$$\overline{f}_k(x) = \begin{cases} \overline{f}_{k-1}(x), x \in [x_1;x_k], \\ 2\sum\limits_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} f(x_j) + (-1)^k f(x), x \in [x_k;b]; \end{cases}$$
и т. д.
$$\overline{f}_{M-1}(x) = \begin{cases} \overline{f}_{M-2}(x), x \in [x_1;x_{M-1}], \\ 2\sum\limits_{j=1}^{M-1} (-1)^{j+1} f(x_j) - (-1)^{M-1} f(x), x \in [x_{M-1};b]. \end{cases} \tag{28}$$
Покажем, что $\overline{f}_{M-1}(x)$ – почти возрастающая. На частичных отрезках разбиения π' не может быть локального максимума в точке $t_k \in [x_k;x_{k+1}]$, для которого $f(t_k) > \max(f(x_k); f(x_{k+1})) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf\limits_{t\in[x_k;x_{k+1}]} p(t)}}$, или локального минимума, для которого $f(t_k) < \min(f(x_k); f(x_{k+1})) - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf\limits_{t\in[x_k;x_{k+1}]} p(t)}}$. В противном случае добавляя точку t_k к разбиению π мы увеличим $V_a^{b,p(x)}[\overline{f_{N-1}}]$ более чем на ε. Действительно, пусть t_k локальный максимум на отрезке $[x_k;x_{k+1}]$ и $\max(f(x_k); f(x_{k+1})) = f(x_{k+1})$, тогда, используя оценку (21) и учитывая то, что $0 < |f(x)| < 1$, можем записать:
$$|f(t_k) - f(x_k)|^{\inf\limits_{t\in[x_k;t_k]} p(t)} + |f(t_k) - f(x_{k+1})|^{\inf\limits_{t\in[t_k;x_{k+1}]} p(t)} - |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\inf\limits_{t\in[x_k;x_{k+1}]} p(t)} =$$
$$= (f(t_k) - f(x_{k+1}) + f(x_{k+1}) - f(x_k))^{\inf\limits_{t\in[x_k;t_k]} p(t)} + (f(t_k) - f(x_{k+1}))^{\inf\limits_{t\in[t_k;x_{k+1}]} p(t)} -$$

$$-\left(f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_k\right)\right)^{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}\geq\left(f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_k\right)\right)^{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}+\left(f\left(t_k\right)-f\left(x_{k+1}\right)\right)^{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}+$$

$$+\left(f\left(t_k\right)-f\left(x_{k+1}\right)\right)^{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}-\left(f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_k\right)\right)^{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}=2\left(f\left(t_k\right)-f\left(x_{k+1}\right)\right)^{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}>\varepsilon.$$

Доказательство для минимума аналогично. Мы доказали, что $\overline{f}_{N-1}(x)$ – почти возрастающая с показателем $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}$. Покажем, что $f_1(x)=\overline{f}_{N-1}(x)-f(x)$ – почти возрастающая с показателем $2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}>0$. Используя представление (28), для $t_1<t_2, t_1,t_2\in\left[x_k;x_{k+1}\right]$. имеем:

$$f_1\left(t_1\right)-f_1\left(t_2\right)=\overline{f}_k\left(t_1\right)-f\left(t_1\right)-\overline{f}_k\left(t_2\right)+f\left(t_2\right)=2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}f\left(x_j\right)+(-1)^k f\left(t_1\right)-$$

$$-2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}f\left(x_j\right)-(-1)^k f\left(t_2\right)-f\left(t_1\right)+f\left(t_2\right)=\left(f\left(t_2\right)-f\left(t_1\right)\right)\left(1-(-1)^k\right).$$

Следовательно, $f_1(t_1)-f_1(t_2)=0$, для промежутков $[x_k;x_{k+1}]$, где $f(t)$ почти возрастает и $f_1(t_1)-f_1(t_2)=2\left(f(t_2)-f(t_1)\right)\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}$, для промежутков, где $f(t)$ почти убывает. Окончательно, $f_1(t_1)-f_1(t_2)\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}$, т. е. $f_1(t)$ – почти возрастающая с показателем $2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}$. Пусть $t_1<t_2, t_1\in\left[x_s;x_{s+1}\right], t_2\in\left[x_k;x_{k+1}\right], s<k$, тогда можем записать:

$$f_1\left(t_1\right)-f_1\left(t_2\right)=\overline{f}_s\left(t_1\right)-f\left(t_1\right)-\overline{f}_k\left(t_2\right)+f\left(t_2\right)=-2\sum_{j=s+1}^{k}(-1)^{j+1}f\left(x_j\right)+$$

$$+(-1)^s f\left(t_1\right)-(-1)^k f\left(t_2\right)-f\left(t_1\right)+f\left(t_2\right).$$

Если s,k – чётные, то, по предположению, для чётных j $f\left(x_j\right)-f\left(x_{j+1}\right)\leq 0, -f\left(x_{s+1}\right)\leq 0$, имеем:

$$f_1\left(t_1\right)-f_1\left(t_2\right)=2\left(-f\left(x_{s+1}\right)+f\left(x_{s+2}\right)-f\left(x_{s+3}\right)+f\left(x_{s+4}\right)-f\left(x_{s+5}\right)+\ldots+f\left(x_{k-1}\right)-f\left(x_k\right)\right)\leq 0.$$

Если s – нечётная, k – чётная, то поскольку для чётных k функция $f(x)$ – почти возрастающая, то $f(x_k)-f(t_2)\leq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}$ и можем записать:

$$f_1\left(t_1\right)-f_1\left(t_2\right)=$$

$$=2\left(f\left(x_{s+1}\right)-f\left(x_{s+2}\right)+\ldots+f\left(x_{k-2}\right)-f\left(x_{k-1}\right)+f\left(x_k\right)-f\left(t_1\right)\right)\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}.$$

Если s – чётная, k – нечётная, по предположению $-f(x_{s+1})\leq 0$, то функция $f(x)$ – почти убывающая и $-f(x_k)+f(t_2)\leq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}$, имеем:

$$f_1\left(t_1\right)-f_1\left(t_2\right)=$$

$$=2\left(-f\left(x_{s+1}\right)+f\left(x_{s+2}\right)-\ldots-f\left(x_{k-2}\right)+f\left(x_{k-1}\right)-f\left(x_k\right)+f\left(t_2\right)\right)\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}.$$

Если s – нечётная, k – нечётная, то можем записать:

$$f_1\left(t_1\right)-f_1\left(t_2\right)=2\left(-f\left(t_1\right)+f\left(x_{s+1}\right)-f\left(x_{s+2}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(x_{s+3}\right)-f\left(x_{s+4}\right)+\ldots+f\left(x_{k-3}\right)-f\left(x_{k-2}\right)+f\left(x_{k-1}\right)-f\left(x_k\right)+f\left(t_2\right)\right)\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}.$$

Мы доказали, что функция $f_1(x)$ – почти возрастающая с показателем $2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\overline{\inf\limits_{t\in\left[x_k;x_{k+1}\right]}p(t)}^{\,1}}$. Лемма доказана.

Из леммы 2.4 следует, что каждую функцию $f(x)$ с ограниченным винеровским изменением, для любого $\varepsilon>0$, можно представить в виде

$$f(x)=\omega[f](x)-\left(\omega[f](x)-f(x)+\psi(x)\right)+\psi(x),$$

где $\omega[f](x)$ – монотонно неубывающая ломанная, проходящая через точки $\left(x_k; 2\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}f(x_j)+(-1)^k f(x_k)\right), k=\overline{1, M-1}$, $(\omega[f](x)-f(x)+\psi(x))$ – монотонно неубывающая функция, $\psi(x)$ – функция с ограниченным винеровским изменением, для которой $|\psi(x)|<\varepsilon$. В случае, если $f(x)\in H^{w(x)}([a,b])$, тогда $\omega[f](x), \psi(x)\in H^{w(x)}([a,b]), |\psi(x)|<\varepsilon$.

Лемма 2.5. *Пусть $0<\varepsilon$, $0<\alpha<\lambda<1$, функция $f(x)\in H^{\lambda}([a;b])$ продлена нулём вне отрезка $[a,b]$, тогда оператор локализованного дифференцирования $D^{\alpha,-\varepsilon}$ ограниченно действует из пространства $H^{\lambda}([a;b])$ в пространство $H^{\lambda-\alpha}([a;b])$ и*

$$D^{\alpha,-\varepsilon}f(a)=\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}.$$

Для любого $\delta>0$ существует такое ε_0, что для любых $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}-\delta\le D^{\alpha,-\varepsilon}f(x)\le\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\delta. \tag{29}$$

Доказательство. Из леммы 2.4 следует, что для любого $\delta>0, f(x)$ может быть представлена в виде:

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)+\psi(x),$$

где $f_1(x), f_2(x), \psi(x)\in H^{\lambda}[a;b], |\psi(x)|<\delta$ и $f_1(x), f_2(x)$ неубывающие. Обозначим $f_1(x)-f_2(x)=\phi(x)$. Тогда можем записать:

$$D^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x)=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{c(x-t)\,dt}{(x-t)^{1+\alpha}}=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha c\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}=$$

$$=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha(\phi(x)-\phi(x-\varepsilon))}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}=\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}. \tag{30}$$

Для функции $\psi(x)$ можем записать:

$$|D^{\alpha,-\varepsilon}\psi(x)|\le\frac{2\delta}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\delta}^{x}\frac{cdt}{(x-t)^{\alpha+1-\lambda}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x-\delta}\frac{2\delta dt}{(x-t)^{\alpha+1}}=$$

$$=\frac{\alpha\delta^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda-\alpha)}+\frac{2\delta^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}=\frac{\delta^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}+2\delta^{1-\lambda}\right)\to 0, \delta\to 0. \tag{31}$$

Из оценок (30), (31) следует утверждение леммы (29).

Поскольку

$$\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}}\in H^{\lambda-\alpha}([a;b])\subset H^{\lambda-\alpha}([a;b]),$$

то докажем, что

$$\psi_1(x)=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}dt=\int\limits_{0}^{\varepsilon}\frac{f(x)-f(x-s)}{s^{\alpha+1}}ds\in H^{\lambda-\alpha}([a;b]).$$

Используя подстановку $t|_0^{\varepsilon}=h+s|_{-h}^{\varepsilon-h}$ в $\psi_1(x+h)$, можем записать:

$$\psi_1(x+h)-\psi_1(x)=\int\limits_{-h}^{\varepsilon-h}\frac{f(x+h)-f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}}dt+\int\limits_{0}^{\varepsilon}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{\alpha+1}}dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{\varepsilon}(f(x)-f(x-t))\left((t+h)^{-\alpha-1}-t^{-\alpha-1}\right)dt+\int\limits_{-h}^{0}(f(x+h)-f(x-t))(t+h)^{-\alpha-1}dt+$$

$$+\int\limits_{0}^{\varepsilon}(f(x+h)-f(x))(t+h)^{-\alpha-1}dt-\int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}\frac{f(x+h)-f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}}dt=J_1+J_2+J_3+J_4.$$

В случае, если $x-a<\varepsilon$ $D^{\alpha,-\varepsilon}f(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}+\int\limits_{a}^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}dt$ и $|\psi_1(x)|\le c\int\limits_{0}^{x-a}t^{\lambda-\alpha-1}dt<\infty$. Поэтому $|\psi_1(a)|=0$ и $D^{\alpha,-\varepsilon}f(a)=\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha}}$. Результат действия оператора $D^{\alpha,-\varepsilon}f(x)$ следует из леммы 13.1 ([3]).

Пусть $x-a \geq \varepsilon$, тогда, используя лемму 13.1 ([3]), можем записать:

$$|J_1| \leq \int_0^{x-a} |f(x)-f(x-t)| \left(t^{-\alpha-1}-(t+h)^{-\alpha-1}\right) dt \leq c_1 h^{\lambda-\alpha};$$

$$|J_2| \leq c_2 h^{\lambda-\alpha};$$

$$|J_3| \leq \int_0^{x-a} |f(x+h)-f(x)| (t+h)^{-\alpha-1} dt \leq c_3 h^{\lambda-\alpha},$$

где $c_1, c_2, c_3 < \infty$. Оценим J_4. Используя (3.8) из [3], имеем:

$$|J_4| \leq c_4 \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} (t+h)^{\lambda-\alpha-1} dt = \frac{c_4}{\lambda-\alpha}\left((\varepsilon+h)^{\lambda-\alpha}-\varepsilon^{\lambda-\alpha}\right) \leq c_5 h (\varepsilon+h)^{\lambda-\alpha-1} \leq c_5 h^{\lambda-\alpha}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть* $0<\alpha<1,\ 0<\lambda\leq 1,\ 0<\varepsilon$, *тогда оператор локализованного дробного интегрирования* $I^{\alpha,-\varepsilon}$ *для* $\alpha+\lambda<1$ *ограничен из* $H^{\lambda}[a;b]$, *в* $H^{\alpha+\lambda}[a;b]$ *и для* $\alpha+\lambda\leq 1$ *ограничен из* $H^{\lambda,1}[a;b]$ *в* $H^{\alpha+\lambda,1}[a;b]$.

Доказательство. Представим оператор локализованного дробного интегрирования в виде:

$$I^{\alpha,-\varepsilon} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\varepsilon}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\varepsilon}^{x} (x-t)^{\alpha-1}(f(t)-f(a))\, dt + \frac{f(a)\varepsilon^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1}(f(t)-f(a))\, dt - \int_{a}^{x-\varepsilon} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(t)-f(a))\, dt + \frac{f(a)\varepsilon^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} = M + N(x).$$

Воспользуемся подстановками $x-t|_a^{x-\varepsilon} = s|_{x-a}^{\varepsilon}$ и $g(x)=f(x)-f(a)$, тогда можем записать:

$$N(x+h)-N(x) = \int_{\varepsilon}^{x-a} \left((s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1}\right)\frac{g(x-s)-g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds + \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} (s+h)^{\alpha-1}\frac{g(x-s)-g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds +$$

$$+\frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_{\varepsilon}^{x-a}\left((s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1}\right) ds + \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} (s+h)^{\alpha-1}\frac{g(x-s)-g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{x-a} \frac{\left((s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1}\right)}{\Gamma(\alpha)}(g(x-s)-g(x))\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}(s+h)^{\alpha-1}(g(x-s)-g(x))\, ds +$$

$$+\frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)}\left((x-a+h)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}-(\varepsilon+h)^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha}+(\varepsilon+h)^{\alpha}-\varepsilon^{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\varepsilon}^{x-a}\left((s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1}\right)(g(x-s)-g(x))\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}(s+h)^{\alpha-1}(g(x-s)-g(x))\, ds +$$

$$+\frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)}\left((x-a+h)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}\right) = N_1+N_2+N_3.$$

Для слагаемых N_1 и N_3 известны оценки (см. [3], теорема 3.1.):

$$|N_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}\left((s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1}\right)(g(x-s)-g(x))\, ds \leq \begin{cases} ch^{\lambda+\alpha}, \lambda+\alpha<1; \\ ch\ln\frac{1}{h}, \lambda+\alpha=1; \end{cases} \tag{32}$$

$$|N_3| \leq ch^{\lambda+\alpha}. \tag{33}$$

Оценим слагаемое N_2 . Для этого вычислим максимум подынтегрального выражения:

$$\left((s+h)^{\alpha-1}s^{\lambda}\right)' = 0, s = \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}.$$

Поскольку знак производной положителен для $s \in \left(0, \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}\right)$ и отрицателен для $s > \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}$, то $s = \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}$ точка максимум. Тогда можем записать:

$$|N_2| \leq \frac{Ah}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}+h\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}\right)^{\lambda} = \frac{Ah^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\lambda}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}\right)^{\lambda}. \tag{34}$$

Собирая оценки (32) – (34), получаем доказательство леммы.

Докажем, что $I^{\alpha,-\varepsilon}$ ограничен из $H^{\lambda,1}[a;b]$ в $H^{\alpha+\lambda,1}[a;b]$, для $\alpha+\lambda \leq 1$. Воспользуемся подстановками

$$x-t|_{x+h-\varepsilon}^{x+h} = s|_{\varepsilon-h}^{-h}, \quad x-t|_{x-\varepsilon}^{x} = s|_{\varepsilon}^{0}$$

и обозначая $g(x) = f(x) - f(a)$, можем записать:

$$I^{\alpha,-\varepsilon}f(x+h) - I^{\alpha,-\varepsilon}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\varepsilon}\left((s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1}\right)(g(x-s)-g(x))\,ds+$$

$$-\int\limits_{-h}^{0}\frac{g(x-s)-g(x)}{\Gamma(\alpha)(s+h)^{1-\alpha}}ds - \int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}\frac{g(x-s)-g(x)}{\Gamma(\alpha)(s+h)^{1-\alpha}}ds = N_1+N_2+N_3.$$

Рассмотрим слагаемое $N_2(x)$. Воспользуемся свойством $g(x-s)-g(x) \leq A|s|^{\lambda}\ln\left|\frac{1}{s}\right|$, тогда проинтегрируем по частям:

$$\left[\begin{array}{cc} \ln\frac{1}{t} = u, & -\frac{1}{t}dt = du, \\ h^{\alpha+\lambda-1+1}\left(1-\frac{t}{h}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda}d\frac{t}{h} = dv, & h^{\alpha+\lambda}\int(1-z)^{\alpha-1}z^{\lambda}dz = h^{\alpha+\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_k}{k!}\int z^{k+\lambda}dz = \\ & = \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\lambda+1}\left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1}{}_2F_1\left(1-\alpha,\lambda+1;\lambda+2;\frac{t}{h}\right) = v; \end{array}\right]$$

$$|N_2| \leq c\int\limits_0^h\frac{(h-t)^{\alpha-1}t^{\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\ln\frac{1}{t}dt = c\frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)}\left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1}{}_2F_1\left(1-\alpha,\lambda+1;\lambda+2;\frac{t}{h}\right)\ln\left(\frac{1}{t}\right)\Bigg|_0^h+$$

$$+c\frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)}\int\limits_0^h\frac{1}{t}\left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1}{}_2F_1\left(1-\alpha,\lambda+1;\lambda+2;\frac{t}{h}\right)dt \leq c_1h^{\alpha+\lambda}\ln\left(\frac{1}{h}\right)+$$

$$+c\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)\Gamma(\lambda+\alpha+1)}h^{\alpha+\lambda}\int\limits_0^1 s^{\lambda}ds \leq c_2h^{\alpha+\lambda}\ln\left(\frac{1}{h}\right). \tag{35}$$

В случае, если $\frac{1}{2} \geq \varepsilon \geq h, \lambda+\alpha \leq 1$, с учётом оценок

$$\left(x^{\lambda}\ln\frac{1}{x}\right)' = x^{\lambda-1}\left(\lambda\ln\frac{1}{x}-1\right) > 0, \ln\frac{1}{x^{\lambda}} > \ln e, 0 < x < \frac{1}{e^{\frac{1}{\lambda}}}, \tag{36}$$

и того, что

$$\left(x^{\lambda+\alpha-1}\ln\frac{1}{x}\right)' = x^{\lambda+\alpha-2}\left((\lambda+\alpha-1)\ln\frac{1}{x}-1\right) < 0, 0 < x < 1, \tag{37}$$

имеем:

$$|N_3| \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}(s+h)^{\alpha-1}(s+h)^{\lambda}\ln\frac{1}{s+h}ds \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\varepsilon-h}^{\varepsilon}h^{\alpha+\lambda-1}\ln\frac{1}{h}ds \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)}h^{\alpha+\lambda}\ln\frac{1}{h}. \tag{38}$$

В случае, если $\frac{1}{2} \geq h \geq \varepsilon > 0, \lambda+\alpha \leq 1$, с учётом того, что

$$\left(z^{a}\ln\frac{1}{z}+\frac{z^{a}}{a}\right)' = az^{a-1}\ln\frac{1}{z}, 0 \leq a \leq 1, 0 < z < 1, \tag{39}$$

имеем:

$$N_3 \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\varepsilon}(s+h)^{\alpha-1}s^{\lambda}\ln\frac{1}{s}ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\varepsilon-h}^{0}(s+h)^{\alpha-1}(-s)^{\lambda}\ln\frac{1}{-s}ds \leq$$

$$= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\varepsilon} s^{\lambda} \ln \frac{1}{s} ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{h-\varepsilon} (h-t)^{\alpha-1} t^{\lambda} \ln \frac{1}{t} dt =$$

$$= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{s^{\lambda+1}}{\lambda+1} \ln \frac{1}{s} \Big|_0^{\varepsilon} + \int_0^{\varepsilon} \frac{s^{\lambda+1}}{\lambda+1} \frac{1}{s} ds \right) + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n}{h^n n!} \int_0^{h-\varepsilon} t^{\lambda+n} \ln \frac{1}{t} dt =$$

$$= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\varepsilon^{\lambda+1}}{\lambda+1} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2} \right) + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n}{h^n n!} \left(\frac{(h-\varepsilon)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} \ln \frac{1}{h-\varepsilon} + \frac{(h-\varepsilon)^{\lambda+n+1}}{(\lambda+n+1)^2} \right) \le$$

$$\le \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{\alpha-1}(1-\alpha)_n}{\Gamma(\alpha) h^n (\lambda+n+1) n!} \left(h^{\lambda+n+1} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} \right) \le$$

$$\le \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n (\lambda+1)_n h^n}{(\lambda+1)(\lambda+2)_n n!} \left(\ln \frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \le$$

$$\le \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \left(\ln \frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(1+\lambda+\alpha)} \le c h^{\alpha+\lambda} \ln \frac{1}{h}. \tag{40}$$

Для $|N_1|$ после подстановки $s|_0^{\varepsilon} = h\, t|_0^{\frac{\varepsilon}{h}}$ можем записать:

$$|N_1| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\varepsilon} \left(s^{\alpha-1} - (s+h)^{\alpha-1} \right) |g(x-s) - g(x)|\, ds \le \frac{c h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} \left(t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1} \right) t^{\lambda} \ln \frac{1}{ht} dt.$$

Пусть $\varepsilon \le h \le \frac{1}{2}, \alpha + \lambda \le 1$. С учётом (39) и подстановки

$$\begin{bmatrix} \ln \frac{1}{ht} = u, & -\frac{1}{t} dt = du, \\ t^{\alpha+\lambda-1} dt = dv, & \frac{t^{\alpha+\lambda}}{\alpha+\lambda} = v; \end{bmatrix}$$

можем записать:

$$|N_1| \le \frac{c h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} t^{\alpha-1} t^{\lambda} \ln \frac{1}{ht} dt = \frac{c h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h\frac{\varepsilon}{h}} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^{\lambda+\alpha} - \lim_{A \to 0} \ln \frac{1}{hA} A^{\lambda+\alpha} + \frac{1}{\lambda+\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^{\alpha+\lambda} \right) \le$$

$$= \frac{c}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^{\lambda+\alpha} + \varepsilon^{\alpha+\lambda} \frac{1}{\lambda+\alpha} \right) \le \frac{c}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} h^{\lambda+\alpha} + h^{\alpha+\lambda} \frac{1}{\lambda+\alpha} \right) \le c_1 h^{\lambda+\alpha} \ln \frac{1}{h}.$$

Пусть $1 > \varepsilon > h, \lambda + \alpha < 1$. С учётом знака производной в (39), имеем:

$$|N_1| \le \frac{c h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1} \right) t^{\lambda} \left| \ln \frac{1}{ht} \right| dt + \frac{c h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \left(t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1} \right) t^{\lambda} \left| \ln \frac{1}{ht} \right| dt \le$$

$$\le \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (ht)^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} d(ht) + \frac{c h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\alpha-1} \right) t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt \le \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h s^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{s} ds +$$

$$+ \frac{c h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} (1-\alpha) \frac{1}{t} t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{s} \frac{s^{\lambda+\alpha}}{\lambda+\alpha} \Big|_0^h + \int_0^h \frac{s^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha} ds \right) +$$

$$+ \frac{c h^{\alpha+\lambda}(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{ht} \frac{t^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha-1} \Big|_1^{\frac{\varepsilon}{h}} + \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \frac{t^{\lambda+\alpha-2}}{\lambda+\alpha-1} dt \right) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} \frac{h^{\lambda+\alpha}}{\lambda+\alpha} + \frac{h^{\lambda+\alpha}}{(\lambda+\alpha)^2} \right) +$$

$$+ \frac{c h^{\alpha+\lambda}(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h\frac{\varepsilon}{h}} \frac{\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha-1} - \ln \frac{1}{h} \frac{1}{\lambda+\alpha-1} + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^{\lambda+\alpha-1}}{(\lambda+\alpha-1)^2} - \frac{1^{\lambda+\alpha-1}}{(\lambda+\alpha-1)^2} \right) \le c_2 h^{\lambda+\alpha} \ln \frac{1}{h}.$$

Пусть $x-a>\varepsilon\geq h, \lambda+\alpha=1$. Воспользуемся неравенством $1-\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\leq|\alpha-1|\,\frac{1}{t}$, которое следует из [3], отрицательностью производной

$$\left((\varepsilon-h)\,(h+\theta\,(\varepsilon-h))^{-1}\ln\frac{1}{h+\theta\,(\varepsilon-h)}\right)'=-\,(h+\theta\,(\varepsilon-h))^{-1}\ln\frac{1}{h+\theta\,(\varepsilon-h)}-$$

$$-\frac{(\varepsilon-h)\,(1-\theta)}{(h+\theta\,(\varepsilon-h))^2}\ln\frac{1}{h+\theta\,(\varepsilon-h)}-(h+\theta\,(\varepsilon-h))^{-1}\frac{(\varepsilon-h)\,(1-\theta)}{h+\theta\,(\varepsilon-h)}<0, 0<h\leq\varepsilon, 0<\theta<1$$

и свойствами (37), для $\lambda+\alpha=1$ и (36), для $\lambda=1$, тогда можем записать:

$$|N_1|\leq\frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1\left(1-\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\right)t^{\lambda+\alpha-1}\ln\frac{1}{ht}dt+\frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_1^{\frac{\varepsilon}{h}}\left(1-\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\right)t^{\lambda+\alpha-1}\ln\frac{1}{ht}dt\leq$$

$$\leq\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^h\ln\frac{1}{s}ds+c_3h\int\limits_1^{\frac{\varepsilon}{h}}\frac{1}{ht}\ln\frac{1}{ht}d\,(ht)=c_1h\ln\frac{1}{h}-c_4h\int\limits_h^{\varepsilon}\ln\frac{1}{s}d\left(\ln\frac{1}{s}\right)=$$

$$=c_1h\ln\frac{1}{h}+\frac{c_4}{2}h\left(\ln^2\frac{1}{h}-\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right)\leq c_1h\ln\frac{1}{h}+\frac{c_4}{2}\frac{h\,(\varepsilon-h)}{h+\theta\,(\varepsilon-h)}\ln\frac{1}{h+\theta\,(\varepsilon-h)}\leq c_1h\ln\frac{1}{h}+$$

$$+\frac{c_4h}{2}\frac{\varepsilon}{\theta\varepsilon}\ln\frac{1}{\theta\varepsilon}\leq c_1h\ln\frac{1}{h}+\frac{c_4h}{2\theta}\left(\ln\frac{1}{\theta\varepsilon}\right)\leq c_1h\ln\frac{1}{h}+\frac{c_4h}{2\theta}\ln\frac{1}{\theta h}\leq c_1h\ln\frac{1}{h}+\frac{c_4}{2\theta^2}\left(\theta h\ln\frac{1}{\theta h}\right)\leq$$

$$\leq c_1h\ln\frac{1}{h}+\frac{c_4}{2\theta^2}h\ln\frac{1}{h}\leq c_5h\ln\frac{1}{h}. \tag{41}$$

Собирая оценки (35), (38)–(41), получаем доказательство леммы.

Рассмотрим фактор-пространство пространства $H^{\lambda}([a;b])$ по одномерному пространству, состоящему из констант.

Определение 2.4. *Классом функций $f_{const}(x)\equiv f(x)\equiv H^{\lambda}_{const}([a;b])$, назовём множество функций, получаемых из функций $f(x)\in H^{\lambda}([a;b])$ добавлением констант*

$$H^{\lambda}_{const}([a;b])=\left\{\phi(x)\mid\phi(x)=f(x)+const,\phi(x),f(x)\in H^{\lambda}([a;b]),const\in R\right\}.$$

Доказательство. Аналогично пространству суммируемых функций, в случае, если это не вызывает затруднений, мы будем использовать одинаковые обозначения $f(x)$ для класса и представителя класса. Поскольку отношение принадлежать классу есть отношением эквивалентности, то классы разбивают пространства $H^{\lambda}([a;b])$ на систему непересекающихся множеств. Для пространства классов $H^{\lambda}_{const}([a;b])$ с обычными операциями для классов, как операции для произвольных представителей классов, введём норму:

$$\left\|f^{\lambda}_{const}(x)\right\|_{H^{\lambda}_{const}([a;b])}=\left\|f^{\lambda}_{const}(x)\right\|=\max_{x\in[a;b]}(f(x))-\min_{x\in[a;b]}(f(x))+\sup_{x_1,x_2\in[a;b]}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|^{\lambda}}.$$

Действительно, поскольку $f^{\lambda}_{const}(x)=const$ – это класс, для которого $f(x)$ константа, то для любой функции $\left\|f^{\lambda}_{const}(x)\right\|\geq0$ и $\left\|f^{\lambda}_{const}(x)\right\|=0\Leftrightarrow f^{\lambda}_{const}(x)=const$;

$$\left\|f^{\lambda}_{const}(x)+g^{\lambda}_{const}(x)\right\|=\max_{x\in[a;b]}(f(x)+g(x))+\max_{x\in[a;b]}(-f(x)-g(x))+$$

$$+\sup_{x_1,x_2\in[a;b]}\frac{|f(x_1)+g(x_1)-f(x_2)-g(x_2)|}{|x_1-x_2|}\leq\max_{x\in[a;b]}(f(x))+\max_{x\in[a;b]}(g(x))+\max_{x\in[a;b]}(-f(x))+$$

$$+\max_{x\in[a;b]}(-g(x))+\sup_{x_1,x_2\in[a;b]}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}+\sup_{x_1,x_2\in[a;b]}\frac{|g(x_1)-g(x_2)|}{|x_1-x_2|}=\left\|f^{\lambda}_{const}(x)\right\|+\left\|g^{\lambda}_{const}(x)\right\|;$$

$$\left\|af^{\lambda}_{const}(x)\right\|=|a|\left\|f^{\lambda}_{const}(x)\right\|, a\in R.$$

Рассмотрим следующий оператор:

$$D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]}\phi(x)=\lim_{\delta\to0}\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]}\left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{\delta}\phi(x-\varepsilon k)\right)(x)=0.$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2.7. *Для любого $x \in [a,b]$, $-\infty \le a < b \le \infty$, равенство*

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a;b]} I^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a;b],\delta} I^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = f(x), 0 < \varepsilon, 0 < \alpha < 1$$

имеет место поточечно для $f(x) \in H^{\lambda}(a;b)$, $-\infty < a$, $0 < \alpha < \lambda < 1$.

Доказательство. Из теоремы 2.2, а также того, что в случае $f(x) \in L_p(-\infty,b)$, $1 \le p < \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \underset{L_p(-\infty,b)}{=} 0$ следует:

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a;b]} I^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]-1} \left(D^{\alpha,-\varepsilon} I^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x-\varepsilon k) + \left(D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f\right)\left(x - \varepsilon\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]\right) =$$

$$+f(x) - f(x-\varepsilon) + f(x-\varepsilon) - f(x-2\varepsilon) + \ldots + f\left(x - \varepsilon\left(\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]-1\right)\right) - f\left(x - \left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]\varepsilon\right) +$$

$$+f\left(x - \left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]\varepsilon\right) = f(x),$$

в случае конечного отрезка и

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{[-\infty;b]} I^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) \underset{L_p(-\infty,b)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(D^{\alpha,-\varepsilon} I^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x-\varepsilon k) \underset{L_p(-\infty,b)}{=} f(x) - f(x-\varepsilon) +$$

$$+f(x-\varepsilon) - f(x-2\varepsilon) + \ldots \underset{L_p(-\infty,b)}{=} f(x),$$

в случае бесконечного промежутка.

Лемма 2.8. *Пусть $f(x), g(x) \in H^{\lambda}([a;b])$, $f(x) = const_1$, $g(x) = const_2$, для $x \le a$.*

$$D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]} f(x) = D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]} g(x) \left(D^{\alpha,-\varepsilon} f(x) = D^{\alpha,-\varepsilon} g(x)\right),$$

тогда и только тогда, когда $f(x) - g(x) = const$, $x \in [a,b]$.

Доказательство. Заметим, что поскольку $D^{\alpha,-\varepsilon}_{\delta} f(x) = 0$, если $f(x) = const_1$, то имеем:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]} \left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{\delta} \phi(x-\varepsilon k)\right)(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{\varepsilon}\right]+2} \left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{\delta} \phi(x-\varepsilon k)\right)(x).$$

Необходимость. Пусть $f(x) - g(x) = const$, $g(x), f(x) \in H^{\lambda}_0([a;b], \rho)$. В силу того, что $D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]} const = 0$, то $D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]} g(x) = D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]}(f + const)(x) = D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]} f(x)$.

Достаточность. Докажем, что если $D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]} f(x) = D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]} g(x)$, то $f(x) - g(x) = const_1 - const_2$. Вычислив локализованный интеграл (2) от локализованной производной, имеем:

$$I^{\alpha,-\varepsilon} D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]}(f-g)(x) = \lim_{\delta\to 0} I^{\alpha,-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]} \left(D^{\alpha,-\varepsilon}_{\delta}(f-g)(x-\varepsilon k)\right)(x) = 0.$$

Из теоремы 2.1 следует, что последнее равенство может быть переписано в виде:

$$\left(I^{\alpha,-\varepsilon} D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a,b]}(f-g)\right)(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]} \left((f-g)(x-\varepsilon k) - \int_0^1 K(s,\alpha)(f-g)(x-\varepsilon k-\varepsilon-\varepsilon s)\,ds\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]} (f-g)(x-\varepsilon k) - \int_0^1 K(s,\alpha) \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]} (f-g)(x-\varepsilon(k+1)-\varepsilon s)ds = 0.$$

Из теоремы 2.3 следует, что такие уравнения с усредняющими ядрами имеют единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $(f-g) = const_1 - const_2$, для $x \le a$. Решение задаётся рекуррентными формулами, например, для $x \in [a, a+\varepsilon]$, имеем:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]} (f-g)(x-\varepsilon k) = \int_0^1 K(s,\alpha) \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]} (f-g)(x-\varepsilon(k+1)-\varepsilon s)ds =$$

$$= \int_0^1 K(s,\alpha)(f-g)(x-\varepsilon-\varepsilon s)\,ds = (const_1 - const_2)\int_0^1 K(s,\alpha)\,ds = const_1 - const_2.$$

Продолжая вычисления $(f-g)(x)$ последовательно, для отрезков $[a+\varepsilon, a+2\varepsilon]$, $[a+2\varepsilon, a+3\varepsilon]$, . . ., $[b-\varepsilon, b]$ получаем, что $(f-g)(x) = const_1 - const_2$, для $x \in [a,b]$. Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть $f_{const}(x) \in H^{\lambda}_{const}([a;b])$, $f(x) = 0$, для $x \le a$, Если выполнены следующие условия: $0 < \varepsilon$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda$, $\alpha + \lambda < 1$, то оператор локализованного интегрирования $I^{\alpha,-\varepsilon}$ осуществляет изоморфизм пространства классов $H^{\lambda}_{const}([a;b])$ на пространство $H^{\lambda+\alpha}_{const}([a;b])$.

Доказательство. Из лемм 2.5, 2.6 и 2.7 следует, что между пространством $H^{\lambda}([a;b])$ и, по крайней мере частью пространства $H^{\lambda+\alpha}([a;b])$, т. е. частью пространства функций представимых в виде $(I^{\alpha,-\varepsilon}\phi)(x)$, $\phi(x) \in H^{\lambda+\alpha}_{const}([a;b])$ оператор $I^{\alpha,-\varepsilon}$ осуществляет изоморфизм. Покажем, что каждая функция $f(x) \in H^{\lambda+\alpha}([a;b])$ может быть представлена в виде $f(x) = I^{\alpha,-\varepsilon}\phi(x)$, $\phi(x) \in H^{\alpha+\lambda}([a,b])$. Предположим противное, т. е. существует $g(x) \in H^{\lambda+\alpha}([a;b])$ и $g(x) \ne I^{\alpha,-\varepsilon}\psi(x)$, $\psi(x) \in H^{\lambda}([a,b])$. Поскольку $D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a;b]}g(x) \in H^{\alpha}([a;b])$ и $I^{\alpha,-\varepsilon}D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a;b]}g(x) \in H^{\alpha+\lambda}([a;b])$, то в пространстве $H^{\alpha+\lambda}([a;b])$ существуют две неравные функции $g(x)$, $I^{\alpha,-\varepsilon}D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a;b]}g(x)$, имеющие равные локализованные производные $D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a;b]}g(x)$. Поскольку для функций из пространства $H^{\lambda+\alpha}([a;b])$ такое возможно, только для $I^{\alpha,-\varepsilon}D^{\alpha,-\varepsilon}_{[a;b]}g(x) - g(x) = const$, т. е. функций, принадлежащих одному классу. Наше предположение о существовании классов функций, не представимых в виде локализованного интеграла, ложно.

3. Заключение. Несмотря на то, что локализованные дробные производные и интегралы типа Римана – Лиувиля во многом похожи на дробные производные и интегралы Римана – Лиувилля, дифференциальные уравнения с локализованными дробными производными (теорема 2.2) являются разностными и, следовательно, решения таких уравнений не ограничены в весовых гёльдеровских пространствах. Вторым отличием локализованных дробных производных есть то, что локализованные дробные производные констант равны нулю и, следовательно, изоморфизм локализованные дробные производные и интегралы типа Римана – Лиувиля осуществляют между фактор-пространствами гёльдеровских пространств по пространству констант.

Список литературы

1. Grinko A.P. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions.* 2019;30(10):817-832.
2. Grinko A.P. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions.* 2018;29(6):489-504.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.; Наука и Техника; 1987. 687с.
4. Chistyakov V.V. and Galkin O.E. On Maps of Bounded p-Variation with p > 1 . *Positivity.* 1998;2:19-45.
5. Mejia O., Merentes N., Sanchez JL. The Space of Bounded p(·)-Variation in Wiener's Sense with Variable Exponent. *Advances in Pure Mathematics.* 2015;5(11):703–716.
6. Павлов Д.А. Конструктивное описание гёльдеровых классов на компактах в R3. *Записки научных семинаров ПОМИ.* 2020;491:119–144.
7. Grinko A.P. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk;*2009;17(1):41-50. (In Russian)
8. Grinko A.P. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions.* 2022;33(8):623-636.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука; 1968. 511 с.
10. Castillo R., Merentes N. and Rafeiro H. Bounded Variation Spaces with p-Variable. *Mediterranean Journal of Mathematics.* 2014;11: 1069–1079.

References

1. Grinko AP. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions.* 2019;30(10):817-832.
2. Grinko AP. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions.* 2018;29(6):489-504.
3. Samko SG., Kilbas AA., Marichev OI. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Ml.; Science and Technology; 1987. 687c.
4. Chistyakov VV. and Galkin OE. On Maps of Bounded p-Variation with p > 1 . *Positivity.* 1998;2:19-45.

5. Mejia O., Merentes N., Sanchez JL. The Space of Bounded p(·)-Variation in Wiener's Sense with Variable Exponent. *Advances in Pure Mathematics.* 2015;5(11):703–716.
6. Pavlov DA. Constructive description of H?lder classes on compacta in R3. *Notes scientific seminars POMI.* 2020;491:119–144.
7. Grinko AP. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk;*2009;17(1):41-50. (In Russian)
8. Grinko AP. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions.* 2022;33(8):623-636.
9. Muskhelishvili NI. Singular integral equations. - M.: Science; 1968. 511 p.
10. Castillo R., Merentes N. and Rafeiro H. Bounded Variation Spaces with p-Variable. *Mediterranean Journal of Mathematics.* 2014;11: 1069–1079.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.09.2024
Поступила после рецензирования 04.11.2024
Принята к публикации 07.11.2024

Received September 17, 2024
Revised November 4, 2024
Accepted November 7, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гринько Александр Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и физико-математических дисциплин, Барановичский государственный университет, г. Барановичи, Беларусь

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander P. Grinko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Assosiate Professor of the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines, Baranovichi State University, Baranovichi, Belarus

К содержанию