Экономика. Информатика. 2025. Т. 52, № 1 (145–155)
Economics. Information technologies. 2025. V. 52, No. 1 (145–155)

УДК: 004.942
DOI 10.52575/2687-0932-2025-52-1-145-155

Основы обработки сигналов в рамках субполосных представлений

[1] **Бабаринов С.Л.**, [2] **Жиляков Е.Г.**, [2] **Прохоренко Е.И.**, [2] **Чурсин Д.С.**
[1] ООО Энтрар, Группа Компаний «Русская Энергия», управление ИТ инфраструктуры
Россия, 119270, Москва, Лужнецкая набережная, 2/4 стр. 4
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
s.babarinov@rusenergygroup.ru, zhilyakov@bsuedu.ru

Аннотация. В рамках данной работы расширен арсенал математического аппарата цифровой обработки сигналов на основе субполосных представлений, на основе понятия части энергии сигнала, попадающей в заданную субполосу. Субполосные представления имеют существенное значение в задачах разработки цифровых методов частотной фильтрации, сжатия с потерями звуковых сигналов и изображений, процедур анализа и синтеза сигналов при передаче информации. Сформулированы критерии оптимизации решений ряда задач субполосной обработки сигналов и получены соответствующие вычислительные соотношения. Показано, что многие содержательные задачи обработки сигналов могут быть эффективно решены на основе субполосных представлений. Для решения многих содержательных задач обработки сигналов предлагается применять математический аппарат, в основе которого используются ортонормальные базисы собственных векторов субполосных матриц. Рассмотрены примеры конкретных задач обработки сигналов на основе субполосных представлений, таких как оптимальная линейная субполосная фильтрация сигналов, субполосное сжатие сигналов с потерями, оценивание субполосной близости двух сигналов на основе субполосной меры, сопоставление сигналов на основе меры субполосного подобия.

Ключевые слова: обработка сигналов, субполосные представления, математические основы, цифровая фильтрация, сжатие с потерями

Для цитирования: Бабаринов С.Л., Жиляков Е.Г., Прохоренко Е.И., Чурсин Д.С. 2025. Основы обработки сигналов в рамках субполосных представлений. *Экономика. Информатика*, 52(1): 145–155. DOI 10.52575/2687-0932-2025-52-1-145-155

Fundamentals of Signal Processing within the Framework of Subband Representations

[1] **Sergey L. Babarinov**, [2] **Evgeniy G. Zhilyakov**, [2] **Ekaterina I. Prokhorenko**, [2] **Dmitry S. Chursin**
[1] Entrar LLC, Russian Energy Group of Companies, IT infrastructure management
building 4, 2/4 Luzhnetskaya Qy, Moscow 119270, Russia
[2] Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod 308015, Russia
s.babarinov@rusenergygroup.ru, zhilyakov@bsuedu.ru

Abstract. In this work, the arsenal of mathematical apparatus of digital signal processing based on subband representations is expanded, established on the concept of a part of the signal energy falling into a given subband. Subband representations are of significant importance in the problems of developing digital methods of frequency filtering, lossy compression of audio signals and images, procedures for analyzing and synthesizing signals during information transmission. The authors formulate criteria for optimizing solutions to a number of subband signal processing problems and obtain corresponding computational relationships.

It is shown that a number of meaningful signal processing problems can be effectively solved based on subband representations. To solve many meaningful signal processing problems, it is proposed to use a mathematical apparatus based on orthonormal bases of eigenvectors of subband matrices. Examples of specific problems of signal processing based on subband representations are considered, such as optimal linear subband filtering of signals, subband compression of signals with losses, estimation of subband proximity of two signals based on a subband measure, and matching of signals based on a subband similarity measure.

Keywords: signal processing, subband representations, mathematical foundations, digital filtering, lossy compression

For citation: Babarinov S.L., Zhilyakov E.G., Prokhorenko E.I., Chursin D.S. 2025. Fundamentals of Signal Processing within the Framework of Subband Representations. *Economics. Information technologies,* 52(1): 145–155 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0932-2025-52-1-145-155

Введение

Сигналами будем называть вещественные функции некоторого аргумента, например, времени, $x(t)$, количественные значения которых отражают поведение определенного параметра регистрируемого процесса, представляющего интерес с позиций исследования свойств генерирующего сигнал объекта. Иными словами, рассматриваемые в данной работе сигналы являются эмпирическими данными с априори (за некоторым исключением) неизвестными характеристиками, соответствующими условиям физической реализуемости процедур генерации и регистрации их значений, прежде всего, непрерывности, ограниченности интервала времени регистрации T и квадрата евклидовой нормы, в дальнейшем называемой энергией

$$||x||^2 = \int_0^T x^2(t)dt < \infty . \tag{1}$$

Кроме того, современная количественная регистрация эмпирических данных предполагает использование аналого-цифровых преобразователей (АЦП), что приводит к дискретизации аргумента и квантованию по уровню амплитуды. Искажения амплитуды за счет квантования по уроню принято называть шумами квантования, влиянием которых при использовании многоразрядных АЦП можно пренебречь.

В большинстве случаев используется эквидистантная дискретизация, что приводит к необходимости анализа свойств исследуемых процессов на основе обработки векторов (последовательности) отсчетов

$$\vec{x} = (x_1,...,x_N)', \tag{2}$$

где штрих означает транспонирование и имеются в виду обозначения

$$x_k = x((k-1)\Delta t), k = 1,...,N; N\Delta t \le T ; \tag{3}$$

Δt – интервал (шаг) дискретизации по времени.

Легко понять, что следствием свойства (1) является ограниченность энергии (квадрата евклидовой нормы) вектора отсчетов

$$||\vec{x}||^2 = \sum_{k=1}^{N} x_k^2 < \infty .$$

Ясно, однако, что для адекватных выводов при обработке отсчетов необходимо обеспечить сохранение соответствующей информативности о свойствах непрерывных сигналов в последовательности их дискретных отсчетов (3). Ввиду того, что эквидистантная дискретизация по времени представляет собой периодический процесс, адекватной основой исследования этой проблемы служат частотные представления как самих сигналов, так и их дискретных отсчетов. Центральными понятиями частотных представлений являются трансформанты Фурье (спектры) непрерывных сигналов [Хургин, Яковлев, 1971]

$$X(z) = \int_0^T x(t)\exp(-jzt)dt$$

и его соответствующих отсчетов [Рабинер, Голд, 1978]

$$X_{\partial}(z) = \sum_{k=1}^{N} x_k \exp(-jz(k-1)\Delta t), \qquad (4)$$

где $j = (-1)^{1/2}$; $z = 2\pi\nu$ – круговая частота; ν – частота в герцах.

Так как справедливы однозначные обратные преобразования Фурье

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(z)\exp(jzt)dz / 2\pi, \qquad (5)$$

$$x_k = \Delta t \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} X_{\partial}(z)\exp(jz(k-1)\Delta t)dz / 2\pi, \qquad (6)$$

то для описания искажений информации о непрерывном сигнале за счет дискретизации можно воспользоваться соотношением между соответствующими спектрами [Рабинер, Голд, 1978]

$$X_{\partial}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(z + 2\pi / \Delta t). \qquad (7)$$

Отсюда следует условие отсутствия отличий в спектрах непрерывного сигнала и последовательности его эквидистантных отсчетов

$$X(z) \equiv 0, z \notin [-\pi / \Delta t, \pi / \Delta t]. \qquad (8)$$

Это условие может быть выполнено только при неограниченном времени регистрации отсчетов сигнала, о чем говорит так называемое соотношение неопределенности [Хургин, Яковлев, 1971].

Следствием справедливости условия (8) из соотношения (5) нетрудно получить точную интерполяционную формулу (2)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \sin(\pi / \Delta t(t - k\Delta t)) / \pi. \qquad (9)$$

Таким образом, соотношение (8) является необходимым и достаточным условием сохранения в дискретной последовательности отсчетов полной информации о непрерывном сигнале.

Легко видеть, что условие (8) делит всю область определения спектров на две части, которые естественно называть субполосами. Поэтому соотношения (7)–(9) естественно считать элементами математического аппарата обработки сигналов на основе субполосных представлений, то есть с позиций разбиения полосы частот на некоторые субполосы.

В качестве другого важного примера использования субполосных представлений при обработке сигналов можно привести применение интерполяционной формулы вида (9) в случае конечного числа отсчетов, которую принято [Басараб и др., 2004] называть формулой Уиттекера – Котельникова – Шеннона

$$\tilde{x}(t) = \Delta t \sum_{k=1}^{N} x_k \sin(\pi(t - (k-1)\Delta t) / \Delta t) / (\pi(t - (k-1)\Delta t)). \qquad (10)$$

Легко показать, что спектр правой части интерполяционной функции (10) удовлетворяет неравенству (8), то есть является полосовым.

Ясно, что при этом информация о непрерывном сигнале сохраняется только частично, но для многих решаемых задач этого бывает достаточно.

Субполосные представления имеют также существенное значение в задачах разработки математического аппарата цифровых методов частотной фильтрации, сжатия с потерями звуковых сигналов и изображений, процедур анализа и синтеза сигналов при передаче информации и т. д. [Витязев, 2023].

В рамках данной работы на основе понятия части энергии сигнала, попадающей в заданную субполосу, расширен арсенал математического аппарата цифровой обработки сигналов на основе субполосных представлений.

Существенное значение имеет то обстоятельство, что применение предлагаемого математического аппарата реализуется на основе использования полученного ортонормального базиса, позволяющего адекватно отразить субполосные свойства векторов без вычисления трансформант Фурье.

Субполосные базисы линейного пространства векторов

В дальнейшем без нарушения общности выводов предполагается, что в рамках соответствующей размерности аргумента интервал дискретизации равен единице, а круговая частота является соответствующим образом нормированной. При этом индекс при обозначении спектра дискретизированного сигнала опущен.

Одним из основных соотношений теории фурье-анализа сигналов является равенство Парсеваля [Хургин, Яковлев, 1971], которое для дискретных последовательностей при оговоренных выше условиях можно представить в следующем виде

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{r=1}^{R} P_r(\vec{x}), \tag{11}$$

где

$$P_r(\vec{x}) = \int_{z \in Z_r} |X_\partial(z)|^2 \, dz / 2\pi; \tag{12}$$

$$Z_r - [-Z_{2r}, -Z_{1r}) \cup [Z_{1r}, Z_{2r}), r = 1, \dots, R; \tag{13}$$

$$Z_{11} = 0; Z_{2R} = \pi; Z_{1,i+1} = Z_{2i}, i = 1, \dots, R-1. \tag{14}$$

Представляется естественным характеристики вида (12) называть частями энергии, попадающими в симметричные относительно начала координат субполосы вида (13).

При подстановке в (12) представления (4) получаем квадратичную форму

$$P_r(\vec{x}) = \vec{x}' A_r \vec{x},$$

где $A_r = \{a_{ik}^r\}, i, k = 1, \dots, k$ – субполосная матрица с элементами следующего вида

$$a_{ik}^r = \int_{z \in Z_r} \exp(-jz(i-k)) dz / 2\pi = (\sin(Z_{2r}(i-k)) - \sin(Z_{1r}(i-k))) / \pi(i-k), \tag{15}$$

$$a_{ii}^r = (Z_{2r} - Z_{1r}) / \pi. \tag{16}$$

Непосредственно из определения (12) следует, что субполосные матрицы являются неотрицательно определенными, а симметрия позволяет получить представление [Васюков и др., 2021]

$$A_r = Q_r L_r Q_r', \tag{17}$$

где $Q_r = \{\vec{q}_1^r \dots \vec{q}_N^r\}$ – матрица собственных векторов, а $L_r = diag(\lambda_1^r, \dots, \lambda_N^r)$ – диагональная матрица неотрицательных собственных чисел, упорядоченных по убыванию

$$\lambda_k^r \ge \lambda_{k+1}^r \ge 0, k = 1, \dots, N-1.$$

Так как матрицы собственных векторов являются ортогональными

$$Q_r Q_r' = Q_r' Q_r = diag(1, \dots, 1),$$

то совокупность собственных векторов может служить полным базисом для линейного пространства вещественных векторов соответствующей размерности, то есть справедливы представления

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^r \vec{q}_r,$$

где имеются в виду соответствующие проекции (скалярные произведения)

$$\alpha_k^r = (\vec{x}, \vec{q}_k^r) = \sum_{i=1}^{N} x_i q_{ik}^r . \qquad (18)$$

Непосредственно из определения собственных векторов и чисел

$$\lambda_k^r q_{ik}^r = \sum_{n=1}^{N} a_{in}^r q_{nk}^r ,$$

определения (15), ортонормальности собственных векторов и равенства Парсеваля для них следует важное для субполосной обработки неравенство для собственных чисел

$$\lambda_k^r = \int_{z \in Z_r} |G_k^r(z)|^2 \, dz / 2\pi \le 1 ,$$

где имеются в виду спектры собственных векторов

$$G_k^r(z) = \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^r \exp(-jz(i-1)) .$$

Таким образом по значению собственного числа можно определять долю энергии соответствующего собственного вектора, попадающей в заданную субполосу (норма равна единице).

Так как следы подобных матриц равны, то из соотношения (17) с учетом определения (16) получаем равенства для сумм собственных чисел

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^r = N(Z_{2r} - Z_{1r}) / \pi = N \Delta Z_r / \pi .$$

Для обработки сигналов представляют также интерес некоторые другие свойства субполосных матриц и их собственных чисел.

Легко понять, что при выборе субполос вида (14) будут иметь место равенства

$$\sum_{r=1}^{R} A_r = I = diag(1,...,1) ;$$

$$A_r = I - \sum_{\substack{n=1 \\ n \ne r}}^{R} A_n .$$

Вычислительные эксперименты с субполосными матрицами показали, что если размерность удовлетворяет неравенству

$$N > J_r , \qquad (19)$$

где (квадратные скобки означают целую часть их содержимого)

$$J_r = [N \Delta Z_r / \pi] + 6 , \qquad (20)$$

то выполняются неравенства

$$0 < \lambda_{J_r + k}^r < \varepsilon \approx 0, k = 1,..., N - J_r , \qquad (21)$$

то есть собственные числа становятся близкими к нулю.

Отметим, что соотношение (20) позволяет достаточно точно вычислить правую часть (19) при выборе в правой части (21) следующего значения

$$\varepsilon = 0.0001 .$$

Одним из следствий свойства (21) является легко получаемое при использовании обозначений (18) и подстановке представления (17) в квадратичные формы (12) соотношение для их вычисления

$$P_r(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{J_r} \lambda_k^r \alpha_k^{r2} . \qquad (22)$$

Из соотношения (20) нетрудно получить неравенство

$$d_r = J_r / N \le \Delta Z_r / \pi + 6 / N , \qquad (23)$$

которое показывает, что при заранее вычисленных собственных векторах и числах использование (22) может дать ощутимое уменьшение вычислительной трудоемкости. Этот результат имеет особое значение при многократном вычислении частей энергий, когда собственные числа и векторы можно вычислить заранее.

Очевидно, что правые и левые части (19) имеют одинаковый набор собственных векторов, а для собственных чисел выполняются равенства

$$\lambda_k^r = 1 - \mu_k^r,$$

где μ_k^r – собственные числа суммарной матрицы в правой части (19).

Ясно, что если μ_k^r будут близки к нулю, то λ_k^r будут близки к единице

$$\lambda_k^r \geq 1 - \varepsilon, k = 1, \ldots, E_r \ ,$$

где в соответствии с (20) имеет место

$$E_r = N - [N(1 - \Delta Z_r / \pi)] - 6, E_r \geq 0 \ . \tag{24}$$

То есть последнее соотношение применимо, когда правая его часть неотрицательна. В противном случае полагаем

$$E_r = 0 \ .$$

Обработка сигналов с использованием субполосных базисов

В настоящее время получили развитие приемы обработки сигналов, концепция которых явно или неявно основывается на субполосных представлениях. Широко известными примерами могут служить частотная фильтрация или уменьшение объемов двоичных представлений (сжатие) данных.

Ниже на основе использования понятия части попадающей в субполосу энергии сигнала (12) сформулированы критерии оптимизации решений ряда задач субполосной обработки сигналов и получены соответствующие вычислительные соотношения. Это служит подтверждением адекватности разработанных элементов математического аппарата задачам обработки сигналов.

Оптимальная линейная субполосная фильтрация сигналов

Фильтрацией принято называть выделение из исходной последовательности отсчетов (вектора) некоторой компоненты

$$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_N)', \tag{25}$$

которая должна соответствовать определенным требованиям.

При субполосной фильтрации в качестве идеального требования широко используется условие

$$Y(z) \equiv X(z), z \in Z_r; Y(z) \equiv 0, z \notin Z_r \ , \tag{26}$$

которому должен удовлетворять вектор вида (25).

Построение современных цифровых фильтров основано на понятии их амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) $H(z)$, которая должна наилучшим образом аппроксимировать идеальную АЧХ

$$H(z) = 1, z \in Z_r; H(z) = 0, z \notin Z_r \, . \tag{27}$$

Не вдаваясь в подробности, отметим, что для векторов конечной размерности условия (26) и (27) не могут быть выполнены. При этом точность выполнения условия (26) затруднительно оценить по точности выполнения (27). Поэтому представляется целесообразным процедуру фильтрации оптимизировать, непосредственно исходя из требования (26). Для этого предлагается использовать квадратичный функционал

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \int\limits_{z \in Z_r} | X(z) - Y(z) |^2 dz / 2\pi + || \vec{y} ||^2 - \int\limits_{z \in Z_r} | Y(z) |^2 dz / 2\pi \ . \tag{28}$$

Легко понять, что в соответствии с равенством Парсеваля последние два слагаемых в правой части (28) определяют меру близости к нулю спектра искомого вектора вне субполосы.

Очевидно, что функционал (28) может служить критерием точности выполнения условия (26). Его можно преобразовать к удобному для минимизации виду

$$F(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}-\vec{y})' A_r (\vec{x}-\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 - \vec{y}' A_r \vec{y}.$$

Легко убедиться, что правая часть (29) достигает минимума на следующем оптимальном векторе:

$$\vec{y}_r = A_r \vec{x}. \tag{29}$$

При этом минимальное значение критерия (28) определяется соотношением

$$F(\vec{x},\vec{y}_r) = \sum_{k=E_r+1}^{J_r-E_r} (1-\lambda_k^r)^2 \lambda_k^r \alpha_k^{r2}. \tag{30}$$

Очевидно, что чем больше правая часть (24), тем меньше по сравнению с (22) правая часть (30).

Используя определение элементов субполосных матриц (15), для компонент результата оптимальной фильтрации (30) можно получить следующее представление:

$$y_{kr} = \int_{z\in Z_r} X(z)\exp(jz(k-1))dz/2\pi, k=1,...,N. \tag{31}$$

Таким образом, компоненты вектора (29) полностью определяются только отрезком спектра исходного вектора из заданной субполосы. Это свойство является важным, особенно для передачи информации в режиме частотного уплотнения.

Очевидно, что следствием соотношения (19) является свойство точной аддитивности результатов оптимальной фильтрации при использовании разбиения на субполосы вида (14)

$$\sum_{r=1}^{r} \vec{y}_r = \vec{x}. \tag{32}$$

Отметим, что соотношения (31) и (32) определяют существенные отличия результатов фильтрации согласно (30) от известных способов цифровой фильтрации [Гантмахер, 1967].

Если исходный вектор состоит из аддитивной смеси флуктуационного шума и сигнала, то наличие в нем квазипериодических компонент будет проявляться в повышенной концентрации энергии в некоторых необязательно смежных субполосах оси частот. Для адекватного учета этого целесообразно использовать фильтрацию на основе соотношения

$$\vec{y}_s = A_s \vec{x}. \tag{33}$$

где A_s – сумма множества H матриц

$$A_s = \sum_{k\in H} A_k;$$

элементы которого удовлетворяют следующим неравенствам

$$P_k(\vec{x}) \ge \Delta Z_k \|\vec{x}\|^2/\pi. \tag{34}$$

Отметим, что правая часть здесь равна части энергии, которая бы приходилась на субполосу при равномерном её распределении по полосе частот (модель белого шума).

Представляется естественным удовлетворяющие условиям (34) субполосы называть информационными, то есть определяющими основную долю энергии вектора.

Обобщением представления (31) для левой части (33) является соотношение

$$y_{is} = \sum_{k\in H} \int_{z\in Z_k} X(z)\exp(jz(i-1))dz/2\pi,$$

то есть имеет место зависимость только от отрезков спектра исходного вектора из множества информационных субполос.

В режиме многократной фильтрации наличие у субполосной матрицы близких к нулю собственных чисел позволяет использовать более эффективное в смысле вычислительных затрат чем (30) соотношение в виде линейной комбинации векторов субполосного базиса

$$\vec{y}_r = \sum_{k=1}^{J_r} \lambda_k^r \alpha_k^r \vec{q}_k^r.$$

Субполосное сжатие сигналов с потерями

Отметим, что сжатие данных с потерями предполагает их перекодирование таким образом, чтобы получаемые битовые представления кодов были меньше, чем у исходных. Основным ограничением при этом служит требование сохранения нужной для целей использования данных информации, например, качества звучания речи или музыки.

Отметим, что в основе применяемых в настоящее время методов сжатия не используются количественные критерии качества сохраняемой информации. Использование введенных выше понятий позволяет ввести адекватные критерии.

Соотношения (6) и (11) показывают, что при сжатии целесообразно обеспечивать точность восстановления отрезков спектров исходных последовательностей данных в тех субполосах, которые могут быть определены из априорных соображений. Количественный критерий имеет вид квадратичного функционала (мера погрешности отклонений)

$$\rho(\vec{x}, \hat{\vec{x}}_r) = \int\limits_{z \in Z_r} |X(z) - \hat{X}_r(z)|^2 / 2\pi , \tag{35}$$

где крышкой отмечены восстанавливаемый вектор и его спектр.

Естественным требованием является условие

$$0 \le \rho(\vec{x}, \hat{\vec{x}}_r) \le \gamma P_r(\vec{x}), \hat{\vec{x}}_r \in R^N , \tag{36}$$

где

$$0 \le \gamma < 1 .$$

Если воспользоваться представлением искомого вектора в виде

$$\hat{\vec{x}}_r = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k^r \vec{q}_k^r , M < N . \tag{37}$$

При этом (35) дает

$$\rho(\vec{x}, \hat{\vec{x}}_r) = \sum_{k=M+1}^{N} \lambda_k^r \alpha_k^{r2} .$$

Таким образом, в соответствии с (36) для M должно выполняться условие

$$\sum_{k=M+1}^{N} \lambda_k^r \alpha_k^{r2} \le \gamma P_r(\vec{x}) ,$$

где неотрицательный параметр $0 \le \gamma < 1$ определяется заранее.

Перекодирование данных осуществляется заменой исходных векторов на векторы проекций

$$\vec{\alpha}_r = (\alpha_1^r, ..., \alpha_M^r)' . \tag{38}$$

Отметим, что если выполняется условие (22), то выбор в (37) и (38)

$$M = J_r$$

с высокой точностью обеспечивает равенство

$$\rho(\vec{x}, \hat{\vec{x}}_r) \approx 0 .$$

Таким образом, в этом случае отрезок спектра в субполосе полностью воспроизводится, а степень сжатия данных при одной и той же разрядности представления кодов определяется соотношением (23).

Оценивание субполосной близости двух сигналов на основе субполосной меры

В качестве основной меры субполосной близости двух векторов представляется естественным использовать следующую квадратичную форму:

$$\rho_r(\vec{x}, \vec{y}) = \int\limits_{z \in Z_r} |X(z) - Y(z)|^2 dz / 2\pi = P_r(\vec{x} - \vec{y}) .$$

Таким образом, в общем случае вычисления реализуются на основе соотношения

$$\rho_r(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x} - \vec{y})' A_r (\vec{x} - \vec{y}) .$$

Если выполняется (21) по аналогии с выражением (22), нетрудно получить представление

$$\rho_r(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{J_r} \lambda_k^r (\alpha_k^r - \beta_k^r)^2, \beta_k^r = (\vec{y}, \vec{q}_k^r).$$

Очевидно, что при достижении равенств

$$\beta_k^r = \alpha_k^r, k = 1,..., J_r$$

имеет место

$$\rho_r(\vec{x},\vec{y}) = 0.$$

Таким образом, в выбранной субполосе отрезки спектров исходного вектора и сопоставляемого с высокой точностью будут совпадать.

Этот результат свидетельствует в пользу применения предлагаемой меры субполосной близости.

Сопоставление сигналов на основе меры субполосного подобия

В качестве меры субполосного подобия двух векторов естественно использовать коэффициент субполосной корреляции соответствующих отрезков их спектров (звездочка означает комплексное сопряжение)

$$\mathrm{cov}_r(\vec{x},\vec{y}) = \int_{z\in Z_r} X(z)Y^*(z)dz / 2\pi / (P_r(\vec{x})P_r(\vec{y}))^{1/2}.$$

При подстановке в него определений спектров нетрудно получить вычислительное соотношение

$$\mathrm{cov}_r(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}' A_r \vec{x} / (P_r(\vec{x})P_r(\vec{y}))^{1/2}.$$

Легко убедиться в справедливости неравенства

$$|\mathrm{cov}_r(\vec{x},\vec{y})| \le 1,$$

где равенство достигается, когда с точностью до знака отрезки спектров сопоставляемых векторов совпадают.

Заключение

В работе показано, что, основываясь на принципе использования понятия части энергии сигналов, попадающих в заданную субполосу области определения их трансформант Фурье, можно получить субполосные матрицы, собственные векторы которых служат базисом векторного пространства, который позволяет решать различные задачи обработки сигналов. При этом без перехода в частотную область реализуется субполосный анализ, когда свойства сигналов описываются с позиций разбиения частотной области на субполосы.

Список литературы

Басараб М.А., Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Яковлев В.П. 2004. Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона. М.: Радиотехника. 74 с.

Белов С.П., Белов А.С., Прохоренко Е.И., Балабанова Т.Н. 2022. Субполосная идентификация словных фрагментов речевых сигналов по заданному образцу. *Экономика. Информатика,* 49(3): 589–596.

Васюков В.Н., Зима Д.Н., Мурасев А.А. 2021. Цифровая обработка сигналов и её применение. Новосибирск: Издательство НГТУ. 122 с.

Витязев В.В. 2023. Многоскоростная обработка сигналов. М.: Горячая линия-Телеком. 325 с.

Гантмахер Ф.Р. 1967. Теория матриц. М.: Наука. 574 с.

Го Л., Чжоу П. 2021. Применение быстрого преобразования Фурье в микропроцессорных устройствах РЗА. *Инновации и инвестиции*, 8: 97–99.

Двойрис Л.И., Крюков И.Н., Толмачёв А.Н. 2024. Имитационная модель сжатия сигнала на основе метода Compressive Sensing. *Радиотехника,* 88(2): 19–24.

Заливин А.Н., Черноморец А.А., Жиляков Е.Г., Белов С.П. 2020. Анализ изображений на основе субполосных представлений в области пространственных частот. *Инфокоммуникационные технологии*, 18(1): 7–12.
Попов О.Б., Чернышева Т.В., Абрамов В.А., Борисов А.А. 2023. Искажения звукового сигнала в канале передачи. *Электромагнитные волны и электронные системы,* 28(6): 13–25.
Рабинер Л., Голд В. 1978. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир. 848 с.
Хургин Я.И., Яковлев В.П. 1971. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука. 408 с.
Черноморец А.А., Болгова Е.В., Коваленко А.Н. 2020. Об оптимальной модификации проекций изображений на базисные векторы при скрытном внедрении информации. *Инфокоммуникационные технологии*, 18(4): 437–442.
Borawake P.Dr.M.P. 2022. Audio signal processing. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*, 10(6): 1495–1496.
Grumiaux P.A., Lagrange M. 2023. Efficient bandwidth extension of musical signals using a differentiable harmonic plus noise model. *Eurasip Journal on Audio, Speech, and Music Processing*, 2023(1): 51.
Hao Zh., Liu Ch., Ouyang Sh. 2024. Study on the optimization process and application of fir digital filter. *Applied and Computational Engineering,* 72(1): 107–113.
Konyakhin I.A. 2023. Digital signal processing. Basic procedures. St. Petersburg: ITMO University. 61 p.
Mao H. 2024. Advancements in filter technology: evolution and applications. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 97: 112–116.
Rajesh Kumar Upadhyay. 2023. Digital signal processing: from theory to practical applications. *Tuijin Jishu*. 44(4): 2311–2317.
Yakimov V., Lange P., Yaroslavkina E. 2022. Formant frequencies estimation based on correlogram method of spectral analysis and binary-sign stochastic quantization. Cyber-Physical Systems: Modelling and Industrial Application. Cham. 137–146.
Yenuchenko M.S. 2024. Basics of digital signal processing: work-book. St. Petersburg: Polytech-Press. 101 p.

References

Basarab M.A., Zelkin E.G., Kravchenko V.F., Yakovlev V. P. 2004. Cifrovaya obrabotka signalov na osnove teoremy Uittekera-Kotelnikova-Shennona [Digital signal processing based on the Whittaker-Kotelnikov-Shannon theorem]. Moscow: Radio Engineering. 74 p.
Belov S.P., Belov A.S., Prokhorenko E.I., Balabanova T.N. 2022. Subband identification of word fragments of speech signal word segments precedent. *Economics. Information technologies*, 49(3): 589–596 (in Russian).
Vasyukov V.N., Zima D.N., Murasev A.A. 2021. Cifrovaya obrabotka signalov i eyo primenenie [Digital signal processing and its application]. Novosibirsk: NSTU Publishing House. 122 p.
Vityazev V.V. 2023. Mnogoskorostnaya obrabotka signalov [Multi-speed signal processing]. Moscow: Goryachaya Liniya-Telecom. 325 p.
Gantmakher F.R. 1967. Teoriya matric [Theory of matrices]. Moscow: Nauka. 574 p.
Guo L., Zhou P. 2021. Application of fast fourier transform in microprocessor relay devices. *Innovation and Investment*, 8: 97–99 (in Russian).
Dvoiris L.I., Kryukov I.N., Tolmachev A.N. 2024. Simulation model of compression of a signal on the basis of the Compressive Sensing method. *Radio engineering*, 88(2): 19–24 (in Russian).
Zalivin A.N., Chernomorets A.A., Zhilyakov E.G., Belov S.P. 2020. Sub-band representation image analysis in the field of spatial frequencies. *Infocommunication technologies*, 18(1): 7–12 (in Russian).
Popov O.B., Chernysheva T.V., Abramov V.A., Borisov A.A. 2023. Distortion of the audio signal in the transmission channel. *Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 28(6): 13–25 (in Russian).
Rabiner L., Gold V. 1978. Theory and Application of Digital Signal Processing. Moscow: Mir. 848 p.
Khurgin Ya.I., Yakovlev V.P. 1971. Finitnye funkcii v fizike i tekhnike. [Finite functions in physics and technology]. M.: Science. 408 p.
Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Kovalenko A.N. 2020. On the optimal modification of images projections onto basic vectors within the information hidden embedding. *Infocommunication technologies*, 18(4): 437–442 (in Russian).
Borawake P.Dr.M.P. 2022. Audio signal processing. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*, 10(6): 1495–1496.
Grumiaux P.A., Lagrange M. 2023. Efficient bandwidth extension of musical signals using a differentiable harmonic plus noise model. *Eurasip Journal on Audio, Speech, and Music Processing*, 2023(1): 51.

Hao Zh., Liu Ch., Ouyang Sh. 2024. Study on the optimization process and application of fir digital filter. *Applied and Computational Engineering*, 72(1): 107–113.
Konyakhin I.A. 2023. Digital signal processing. Basic procedures. St. Petersburg: ITMO University. 61 p.
Mao H. 2024. Advancements in filter technology: evolution and applications. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 97: 112–116.
Rajesh Kumar Upadhyay. 2023. Digital signal processing: from theory to practical applications. *Tuijin Jishu*, 44(4): 2311–2317.
Yakimov V., Lange P., Yaroslavkina E. 2022. Formant frequencies estimation based on correlogram method of spectral analysis and binary-sign stochastic quantization. Cyber-Physical Systems: Modelling and Industrial Application. Cham. 137–146.
Yenuchenko M. S. 2024. Basics of digital signal processing: work-book. St. Petersburg: Polytech-Press. 101 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 11.01.2025
Поступила после рецензирования 23.02.2025
Принята к публикации 04.03.2025

Received January 11, 2025
Revised February 23, 2025
Accepted March 04, 2025

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бабаринов Сергей Леонидович, кандидат технических наук, архитектор сетевой инфраструктуры ООО Энтрар, Группа Компаний «Русская Энергия», г. Москва, Россия

Жиляков Евгений Георгиевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационно-телекоммуникационных систем и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Прохоренко Екатерина Ивановна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационно-телекоммуникационных систем и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Чурсин Дмитрий Сергеевич, аспирант кафедры информационно-телекоммуникационных систем и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey L. Babarinov, Candidate of Technical Sciences, Architect of Network Infrastructure of Entrar LLC, Russian Energy Group of Companies, Moscow, Russia

Evgeniy G. Zhilyakov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Ekaterina I. Prokhorenko, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Dmitry S. Chursin, Postgraduate Student of the Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia