Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 4. С. 253–265
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 4. P. 253–265

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 512.542
MSC 20F17
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265
EDN ABZZCW

О максимальных подформациях кратно Ω-расслоенных формаций конечных групп

Нестеров А. С.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.*)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского,
Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14
a.s.nest@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются только конечные группы. Изучаются формации конечных групп, т. е. классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и ноднрямых произведений. Ω-расслоенные формации были построены В. А. Ведерниковым в 1999 году с помощью функциональных методов. В дальнейшем концепция кратной локальности, введенная в рассмотрение А. Н. Скибой, была использована для определения кратно Ω-расслоенных формаций. В настоящей статье изучаются максимальные подформации кратно Ω-расслоенных формаций. Получены свойства функций-спутников таких подформаций, установлены достаточные условия максимальности подформации исследуемой формации, найдено свойство максимальных кратно Ω-расслоенных подформаций, характеризующее группы, в нее входящие.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация, Ω-расслоенная формация, максимальная подформация формации

Для цитирования: Нестеров А.С. О максимальных подформациях кратно Ω-расслоенных формаций конечных групп. *Прикладная математика & Физика.* 2025;57(4):253–265. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265 EDN ABZZCW

Original Research

On Maximal Subformations of Multiple Ω-foliated Formations of Finite Groups

Alexander S. Nesterov
(*Article submitted by a member of the editorial board Vasilyev V. B.)*
Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky,
14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia
a.s.nest@yandex.ru

Abstract. Only finite groups are considered. Formations of finite groups, i. e. classes of groups closed under homomorphic images and subdirect products, are studied. Ω-foliated formations were constructed by V. A. Vedernikov in 1999 using functional methods. Subsequently, the concept of multiple locality, introduced by A. N. Skiba, was used to define multiple Ω-foliated formations. In this paper, maximal subformations of multiple Ω-foliated formations are studied. Properties of satellite-functions of such subformations are obtained, sufficient conditions for the maximality of a subformation of the formation under study are established, and a property of maximal multiple Ω-foliated subformations that characterizes the groups included in it is found.

Keywords: Finite Group, Class of Groups, Formation, Ω-Foliated Formation, Maximal Subformation of Formation

For citation: Nesterov AS. On Maximal Subformations of Multiple Ω-foliated Formations of Finite Groups. *Applied Mathematics & Physics.* 2025;57(4):253–265 (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265EDN ABZZCW

---

1. Введение. Рассматриваются только конечные группы. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. В. Гацюц в работе [1] для изучения формаций предложил использовать функциональные методы, с помощью которых им были построены локальные формации, нашедшие многочисленные применения в теории групп. Развивая функциональный подход В. Гашюца, Л. А. Шеметков в 1978 году ввел в рассмотрение композиционные формации [2]. В статье [3] А. Н. Скибой была разработана концепция кратной локальности для формаций, получившая в дальнейшем интенсивное развитие (см., например, [4]). Позднее А. Н. Скиба и Л. А. Шеметков построили кратно ω-локальные формации [5] и кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации [6], где ω – непустое множество простых чисел, $\mathfrak{L}$ – непустой класс простых групп. В дальнейшем В. А. Ведерников построил серию ω-веерных формаций [7], в которую вошли ω-локальные формации как один из видов, и серию Ω-расслоенных формаций [8], включающую Ω-композиционные формации как один из видов, где Ω – непустой класс простых групп. Изучению свойств кратно Ω-расслоенных формаций посвящены работы Ю. А. Еловиковой, М. М. Сорокиной, Е. Н. Деминой, С. П. Максакова и др. (см., например, [9]–[12]).

К актуальным вопросам современной теории формаций относятся вопросы исследования внутреннего строения формаций. При поиске ответа на данный вопрос важную роль играют максимальные подформации исследуемых формаций, их наличие, свойства, внутреннее строение и другие характеристики. В работе [12] установлено существование максимальных n-кратно Ω-расслоенных подформаций для формаций с определенными свойствами, установлена взаимосвязь между максимальным внутренним Ω-спутником 1-кратно Ω-расслоенной формации и максимальным внутренним Ω-спутником ее максимальной 1-кратно Ω-расслоенной подформации. Настоящая работа также посвящена решению ряда вопросов, связанных с исследованием максимальных кратно Ω-расслоенных подформаций кратно Ω-расслоенных формаций.

Как демонстрируют исследования формаций, построенных с помощью функциональных методов, свойства таких формаций и их подформаций во многом определяются строением и особенностями их функций-спутников. Например, в [5, теорема 4] для доказательства модулярности решетки l_n^{ω} всех n-кратно ω-локальных формаций использовалось строение их ω-локальных l_{n-1}^{ω}-значных спутников, т. е. таких ω-локальных спутников, все значения которых являются $(n-1)$-кратно ω-локальными формациями. В [9, теорема 1] с помощью свойств минимальных $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутников исследовались решеточные свойства кратно Ω-расслоенных формаций. В теоремах 1 и 2 настоящей работы проводится исследование взаимосвязи минимальных функций-спутников кратно Ω-расслоенной формации и ее максимальной кратно Ω-расслоенной подформации.

При исследовании максимальных подформаций большую роль играют теоремы-признаки, позволяющие ответить на вопрос, является ли заданная подформация формации $\mathfrak{F}$ максимальной в $\mathfrak{F}$. Например, в [4, лемма 5.1.20 (1)] установлены достаточные условия максимальности τ-замкнутой кратно локальной подформации τ-замкнутой кратно локальной формации, где τ – подгрупповой функтор. В теореме 3 установлены достаточные условия максимальности кратно Ω-расслоенной подформации кратно Ω-расслоенной формации.

При изучении подформационного строения формаций важную роль играет наличие связи между группами, принадлежащими рассматриваемой формации, и группами, которые входят в ее максимальную подформацию. Например, в [4, теорема 5.1.22] доказано, что для любой разрешимой группы G из неединичной τ-замкнутой локальной формации $\mathfrak{F}$ фактор-группа $G/F(G)$ принадлежит пересечению всех максимальных τ-замкнутых n-кратно локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$, где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Развитие данного результата для кратно ω-локальных формаций получено в [5, теорема 6]. В теореме 4 настоящей работы установлено, что для любой неединичной разрешимой Ω-группы G, принадлежащей кратно Ω-расслоенной формации с направлением φ, фактор-группа $G/(\cap_{A\in\Omega} G_{\varphi(A)})$ принадлежит пересечению всех максимальных кратно Ω-расслоенных подформаций заданной формации.

2. Предварительные сведения. Используемые определения и обозначения стандартны (см., например, [2], [13]). Символ := означает равенство по определению. Запись $H \le G$ ($H < G$, $H \triangleleft G$, $H \cdot\!\triangleleft\, G$, $H <\cdot\, G$) означает, что H является подгруппой (соответственно, собственной, нормальной, минимальной нормальной, максимальной подгруппой) группы G; 1 – единичная группа; через $G = A \rtimes B$ обозначается полупрямое произведение подгрупп A и B группы G, где $A \triangleleft G$; $A \wr B$ – регулярное сплетение групп A и B; Z_n – циклическая группа порядка n; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G; $\mathrm{Core}_G(H)$ – ядро подгруппы H в группе G; $\mathrm{Soc}(G)$ – подгруппа группы G, являющаяся произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы G. Группа G называется *примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M (примитиватор) такая, что $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Группа G называется *монолитической*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой (монолитом).

Классом групп называется совокупность групп, содержащая вместе с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ – класс всех разрешимых, нильпотентных, абелевых групп из $\mathfrak{G}$ соответственно, $\mathfrak{E}$ – класс всех единичных групп, $\mathfrak{I}$ – класс всех простых групп.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым относительно*:
– *гомоморфных образов*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $G/N \in \mathfrak{F}$ (1);
– *подпрямых произведений*, если $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ следует $G/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$ (2);
– *нормальных подгрупп*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $N \in \mathfrak{F}$ (3);
– *произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп*, если из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in \mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$ (4).

Класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условиям (1) и (2), называется *формацией*; класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условиям (3) и (4), называется *классом Фиттинга*; $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга.

Наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу Фиттинга $\mathfrak{F}$, обозначается $G_{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-*радикалом* группы G [2, гл. I, п. 1].

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ – класс групп, порожденный множеством $\mathfrak{X}$, т. е. $(\mathfrak{X})$ – пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$, в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G; $\mathrm{form}\mathfrak{X}$ – формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$; $K(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $K(\mathfrak{X}) = \cup_{G\in\mathfrak{X}} K(G)$. Через Ω обозначается непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. Группа G называется Ω-*группой*, если $K(G) \subseteq \Omega$ [14, с. 126].

Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – классы групп. *Произведением* классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называется класс групп $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid$ существует $N \lhd G$, где $N \in \mathfrak{F}_1$, $G/N \in \mathfrak{F}_2)$ [13, II, (1.3)].

Для произвольного класса групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{I}$ будем использовать следующие обозначения:
$\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}} := (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \subseteq \mathfrak{X})$; $\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}'} := (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \cap \mathfrak{X} = \varnothing)$ [14, с. 126].

Пусть $A \in \mathfrak{I}$. Тогда $(A)' = \mathfrak{I} \backslash (A)$, $\mathfrak{G}_A := \mathfrak{G}_{(A)}$, $\mathfrak{G}_{A'} := \mathfrak{G}_{(A)'}$, $\mathfrak{N}_p := \mathfrak{G}_{Z_p}$. Главный фактор H/L группы G называется *главным* A-*фактором*, если $K(H/L) \subseteq (A)$. Через $\mathfrak{S}_{cA}$ обозначается класс всех групп, у которых каждый главный A-фактор централен; $O_\Omega(G) := G_{\mathfrak{G}_\Omega}$, $O_A(G) := G_{\mathfrak{G}_A}$, $O_p(G) := O_{Z_p}(G)$, $O_{A',A}(G) := G_{\mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A}$, $F_A(G) := G_{\mathfrak{S}_{cA}}$ [14, с. 126].

Замечание 1. В любой конечной группе G, имеющей главные A-факторы (здесь $A \in \mathfrak{I}$), подгруппа $F_A(G)$ совпадает с пересечением централизаторов всех главных A-факторов группы G. Если в G нет главных A-факторов, то полагают $F_A(G) = G$ [14, с. 126].

Пусть $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$*формации групп*$\}$, где $f(\Omega') \neq \varnothing$ (здесь символ Ω' обозначает элемент из области определения функции f, не принадлежащий Ω), $h : \mathfrak{I} \to \{$*формации групп*$\}$, $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$*непустые формации Фиттинга*$\}$ – функции, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называемые соответственно ΩF-*функцией*, F-*функцией*, FR-*функцией* [14, определение 1]. Если ψ_1, ψ_2 – ΩF-функции (F-функции, FR-функции), то полагают $\psi_1 \leq \psi_2$ тогда и только тогда, когда $\psi_1(X) \subseteq \psi_2(X)$ для любого $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (соответственно для любого $X \in \mathfrak{I}$). Если $\psi_1 \leq \psi_2$ и $\psi_1 \neq \psi_2$, то пишут $\psi_1 < \psi_2$ [14, замечание 3]. Формация

$$\mathfrak{F} = (\, G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\,)$$

называется Ω-*расслоенной формацией* с направлением φ (коротко, $\Omega\varphi$-расслоенной формацией) с Ω-спутником f и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$; формация

$$\mathfrak{H} = (\, G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\varphi(A)} \in h(A) \text{ для всех } A \in K(G)\,)$$

называется *расслоенной формацией* с направлением φ (коротко, φ-расслоенной формацией) со спутником h и обозначается $\mathfrak{H} = F(h, \varphi)$[14, определение 2].

Ω-спутник f Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним*, если $f(X) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ [8].

Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ называется:
– Ω-*свободной* (*свободной*), если $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 – FR-функция, имеющая следующее строение $\varphi_0(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой группы $A \in \mathfrak{I}$ [14, определение 3];
– Ω-*биканонической* (*биканонической*), если $\varphi = \varphi_2$, где φ_2 – FR-функция, имеющая следующее строение $\varphi_2(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ [8, определение 2];
– Ω-*композиционной* (*композиционной*), если $\varphi = \varphi_3$, где φ_3 – FR-функция, имеющая следующее строение $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любой $A \in \mathfrak{I}$ [14, определение 4].

Направление φ Ω-расслоенной (расслоенной) формации называется:
– r-*направлением*, если $\mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathfrak{I}$ [14, определение 6];
– b_A-*направлением*, где $A \in \mathfrak{I}$, если $\varphi(A)\mathfrak{G}_A = \varphi(A)$ [8, определение 1];
– b-*направлением*, если $\varphi(A)\mathfrak{G}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ [8, определение 1];
– $i_1 i_2 \ldots i_k$-*направлением*, если φ – i_j-направление для любого $j = \overline{1, k}$ [8, определение 1].

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ – FR-функция. Следуя [4], всякую непустую формацию считают 0-кратно $\Omega\varphi$-расслоенной (0-кратно φ-расслоенной); при $n > 0$ $\Omega\varphi$-расслоенную (φ-расслоенную) формацию $\mathfrak{F}$ называют n-*кратно* $\Omega\varphi$-*расслоенной* (n-*кратно* φ-*расслоенной*), если $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутником ($\varphi_{(n-1)}$-спутником), то есть таким Ω-спутником (спутником), все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно $\Omega\varphi$-расслоенными ($(n-1)$-кратно φ-расслоенными) формациями. $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутники ($\varphi_{(n-1)}$-спутники) n-кратно Ω-свободной (n-кратно свободной), n-кратно Ω-биканонической (n-кратно биканонической), n-кратно Ω-композиционной (n-кратно композиционной) формаций называют соответственно $\Omega Fr_{(n-1)}$-спутником ($Fr_{(n-1)}$-спутником), $\Omega B_{(n-1)}$-спутником ($B_{(n-1)}$-спутником), $\Omega C_{(n-1)}$-спутником ($C_{(n-1)}$-спутником). Через $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обозначается n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, т. е. $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ – пересечение всех n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$; в частности, $\Omega F_1(\mathfrak{X}, \varphi) := \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $\Omega F_0(\mathfrak{X}, \varphi) := \mathrm{form}\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $\Omega F_n(\{G\}, \varphi)$ пишут $\Omega F_n(G, \varphi)$ [8, с. 56]. Через $\Omega B_n(\mathfrak{X})$ $(B_n(\mathfrak{X}))$, $\Omega C_n(\mathfrak{X})$ $(C_n(\mathfrak{X}))$, $F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обозначаются соответственно n-кратно Ω-биканоническая (n-кратно биканоническая), n-кратно Ω-композиционная (n-кратно композиционная), n-кратно φ-расслоенная формации, порожденные множеством $\mathfrak{X}$.

Через $\Omega\varphi^n F$ (соответственно $\varphi^n F$) обозначим множество всех n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенных (n-кратно φ-расслоенных) формаций.

Замечание 2. Множество $\Omega\varphi^n F$ является полной и модулярной решеткой для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и любого направления φ [11, теорема 4 (6)].

Следуя [15], для любых n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ полагаем:

$$\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2 := \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2 := \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, \varphi).$$

Аналогично, для $\mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F$, $i \in I$:

$$\wedge_{\Omega\varphi^n F \, i\in I} \mathfrak{F}_i := \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \quad \vee_{\Omega\varphi^n F \, i\in I} \mathfrak{F}_i := \Omega F_n(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \varphi).$$

Следуя [4], через $\mathfrak{F}_2/_{\Omega\varphi^n F}\mathfrak{F}_1$ обозначим множество всех n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенных формаций $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Замечание 3. Поскольку $\Omega\varphi^n F$ является модулярной решеткой, то, согласно [16, теорема 13], для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ следующие интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2) /_{\Omega\varphi^n F}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1 /_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.

Собственная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{M}$ n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ называется *максимальной n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенной подформацией* формации $\mathfrak{F}$, если для любой n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенной формации $\mathfrak{H}$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, имеет место либо $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, либо $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ [12, с. 19]. Через $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ обозначается пересечение всех максимальных n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенных подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Замечание 4. n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{M}$ n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ является максимальной в $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{F}/_{\Omega\varphi^n F}\mathfrak{M}$ двухэлементно.

В лемме 1 приведены используемые далее известные результаты теории групп.

Лемма 1.

(1) *Пусть K и H – группы и ψ – гомоморфизм группы K в* $\mathrm{Aut}(H)$. *Тогда существует группа G, содержащая подгруппы $H^* \cong H$ и $K^* \cong K$, причем $G = H^* \rtimes K^*$* [17, теорема 2.47].

(2) *Пусть G – разрешимая неединичная примитивная группа и M – ее примитиватор. Тогда группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем $N = C_G(N)$ и $C = N \rtimes M$* [17, теорема 4.42 (1)].

(3) *Пусть A – некоторая группа автоморфизмов p-группы G. Если A действует тождественно на каждом факторе субнормального A-допустимого ряда $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = 1$, $t > 0$, то A является p-группой* [2, лемма 3.10].

(4) *Пусть $G = A \wr B = KB$, где $K = \prod_{b\in B} {A_1}^b$ – база сплетения G и A_1 – первая копия A в K. Тогда* $\mathrm{Soc}(G) \subseteq \prod_{b\in B} M^b$, *где* $M = \mathrm{Soc}(A_1)$ [4, лемма 3.1.9 (3)].

(5) $\Phi(G) \le F(G)$ *для любой группы G. В частности, если G является неединичной разрешимой группой, то* $\Phi(G) \ne F(G)$ [17, лемма 4.21 (1)].

(6) $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ *для любой группы G* [17, лемма 4.21 (2)].

В дальнейшем используются следующие свойства Ω-расслоенных формаций.

Лемма 2.

(1) *Пусть $A \in \mathfrak{I}$, $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с b_A-направлением φ. Тогда $O_A(G/G_{\varphi(A)}) = 1$ для любой группы G* [8, лемма 6 (1)].

(2) *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с Ω-спутником f и br-направлением φ. Тогда $\mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех p таких, что $Z_p \in \Omega$* [8, следствие 3 (1)].

(3) *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \le \varphi$. Если $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, то формация $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обладает единственным минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega F_{(n-1)}((G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \varphi)$, $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, и $f(A) = \Omega F_{(n-1)}((G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}), \varphi)$ для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$* [10, теорема 2].

(4) *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \le \varphi$, $\mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F$ и f_i – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \le f_2$* [10, следствие 2.1].

(5) *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \le \varphi$. Если $\mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F$, $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \vee_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$,* то $\mathfrak{F} \in \Omega\varphi^n F$ [18, следствие леммы 3].

(6) *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с Ω-спутником f и r-направлением φ. Если $A \in \Omega$, $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$, то $G \in \mathfrak{F}$* [8, лемма 2 (1)].

Замечание 5. Если $\mathfrak{F}$ – n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная формация, то, ввиду равенства $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{F}, \varphi)$, из леммы 2 (3) следует, что минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{F}$ является внутренним.

Используя методы доказательств, разработанные в [4] для исследования τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, где τ – подгрупповой функтор, предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \le \varphi$, G – группа, $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$, $\mathfrak{H} \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H}$ содержится в некоторой максимальной n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенной подформации формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} := \{ \mathfrak{X} \in \Omega\varphi^n F \mid \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subset \mathfrak{F} \}$, $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – произвольная цепь в $\mathcal{X}$ и $\mathfrak{D} := \cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i$. Тогда $\mathfrak{D} = \vee_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{X}_i \mid i \in I)$ и по лемме 2 (5) $\mathfrak{D} \in \Omega\varphi^n F$, причем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{D}$ и найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{X}_j$ и $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G,\varphi) \subseteq \mathfrak{X}_j$, что противоречит выбору $\mathcal{X}$. Следовательно, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{D} \in \mathcal{X}$. Тогда, согласно лемме Цорна, в $\mathcal{X}$ имеется максимальный элемент $\mathfrak{M}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация в $\mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{T} \in \Omega\varphi^n F$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{T}$ и поэтому $\mathfrak{T} \in \mathcal{X}$. Тогда из $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{T}$ следует, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация в $\mathfrak{F}$, содержащая $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

3. Основные результаты.

3.1. Спутники максимальных подформаций кратно Ω-расслоенных формаций.

В следующих двух теоремах проводится исследование связи между функциями-спутниками кратно Ω-расслоенной формации и ее максимальной кратно Ω-расслоенной подформации.

В теореме 1 установлены условия, при которых для подходящего простого числа p значение $f(Z_p)$ минимального спутника f кратно Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ определяется посредством соответствующего значения минимального спутника ее максимальной кратно Ω-расслоенной подформации.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная формация с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутником f, $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$ с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутником m, где φ – br-направление, удовлетворяющее условию $\varphi \le \varphi_3$. Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p)\backslash m(Z_p) \neq \varnothing$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p)\backslash m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение*

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}((\{H\} \cup m(Z_p)), \varphi).$$

Доказательство. Пусть p – такое просто число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p)\backslash m(Z_p) \neq \varnothing$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p)\backslash m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$. Покажем, что $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}((\{H\} \cup m(Z_p)), \varphi)$.

Предположим, что H имеет по крайней мере две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. Так как класс групп $f(Z_p)$ замкнут относительно гомоморфных образов, то $H/N_1, H/N_2 \in f(Z_p)$. Отсюда, в силу выбора группы H, получаем, что $H/N_1, H/N_2 \in m(Z_p)$. Тогда, ввиду замкнутости класса групп $m(Z_p)$ относительно подпрямых произведений, имеем $H \cong H/(N_1 \cap N_2) \in m(Z_p)$, что противоречит выбору H. Следовательно, группа H является монолитической. Пусть R – монолит группы H. Пусть $G_1 := Z_p \wr H$. Тогда, ввиду леммы 1 (4), $G_1 = T_1 \rtimes H$, где T_1 – база сплетения G_1 и T_1 – элементарная абелева p-группа. Так как $T_1 \neq 1$ и $T_1 \triangleleft G_1$, то существует такая подгруппа $T \cdot\!\triangleleft\, G_1$, что $T \subseteq T_1$. Пусть $G := TH$. Отметим, что $G = T \rtimes H$.

I. Установим, что $T = G_{\varphi(Z_p)} = O_{Z_p}(G)$.

Предварительно проверим, что $T_1 = C_{G_1}(T_1)$. Пусть $C := C_{G_1}(T_1)$. Так как T_1 – абелева группа, то $T_1 \subseteq C$. Допустим, что $T_1 \subset C$. Рассмотрим $C \cap H := C_1$. Покажем, что $C_1 \neq 1$. Действительно, если $C_1 = 1$, то по модулярному тождеству

$$C = G_1 \cap C = T_1 H \cap C = T_1(H \cap C) = T_1.$$

Получили противоречие. Таким образом, $C_1 \neq 1$.

Покажем, что $C_1 \triangleleft G_1$. Так как $C \triangleleft N_{G_1}(T_1) = G_1$, то $C \cap H \triangleleft H$, откуда следует, что $H \subseteq N_{G_1}(C_1)$. Далее, так как

$$C_1 = C_{G_1}(T_1) \cap H = \{x \in H \mid xt = tx, \text{для любого } t \in T_1\},$$

то для любых $x \in C_1$, $t \in T_1$ выполняется $xt = tx$ и поэтому для любого $t \in T_1$ имеет место $tC_1 = C_1 t$. Таким образом, $T_1 \subseteq N_{G_1}(C_1)$. Тем самым установлено, что $G_1 = HT_1 \subseteq N_{G_1}(C_1)$ и, значит, $C_1 \triangleleft G_1$.

Так как $C_1 \triangleleft G_1$ и $C_1 \neq 1$, то существует такая подгруппа $L \cdot\!\triangleleft\, G_1$, что $L \subseteq C_1$. Покажем, что $L \subseteq T_1$. Действительно, так как $\mathrm{Soc}(Z_p) = Z_p$, то, ввиду леммы 1 (4), имеем $\mathrm{Soc}(G_1) \subseteq T_1$. Таким образом, из $L \subseteq \mathrm{Soc}(G_1)$ получаем $L \subseteq T_1$ и, значит, L – p-группа. Поскольку $L \triangleleft G_1$ и $L \subseteq C_1 \subseteq H$, то $L \triangleleft H$. Следовательно, $L \subseteq O_p(H) = 1$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $T_1 = C_{G_1}(T_1)$.

Покажем, что $C_G(T) = T$. Предварительно установим, что $C_{G_1}(T) = T_1$. Действительно, так как T_1 – абелева группа и $T \subseteq T_1$, то справедливо включение $T_1 \subseteq C_{G_1}(T)$. По модулярному тождеству

$$C_{G_1}(T) = G_1 \cap C_{G_1}(T) = T_1 H \cap C_{G_1}(T) = T_1(H \cap C_{G_1}(T)).$$

Докажем, что $H \cap C_{G_1}(T) = 1$. Допустим, что $H \cap C_{G_1}(T) \neq 1$. Покажем, что $R \subseteq C_{G_1}(T)$. Действительно, ввиду $C_{G_1}(T) \triangleleft N_{G_1}(T) = G_1$, имеем $H \cap C_{G_1}(T) \triangleleft H$. Так как R – монолит группы H, то $R \subseteq H \cap C_{G_1}(T)$. Получаем $C_R(T) = C_{G_1}(T) \cap R = R$. Таким образом, $C_R(T) = R$.

Рассмотрим гомоморфизм $\gamma : R \to \mathrm{Aut}(T)$. По лемме 1 (1) существует группа $L = M \rtimes W$, где $M \cong T$, $W \cong R$, т. е. $L \cong T \rtimes R$. Далее, $R/N \cong R^\gamma$, где $N := \mathrm{Ker}(\gamma)$ и $R^\gamma \le \mathrm{Aut}(T)$. Пусть $A := R^\gamma$.

Установим, что $C_{R/N}(T) = R/N$. Отметим, что

$$C_{R/N}(T) = \{rN \in R/N \mid (rN)t = t(rN) \text{ для любого } t \in T\}.$$

Проверим, что $R/N \subseteq C_{R/N}(T)$. Пусть $rN \in R/N$ и t – произвольный элемент из T. Покажем, что $(rN)t \subseteq t(rN)$. Пусть $x \in (rN)t$. Так как $C_R(T) = R$ и $N \subseteq R$, то $x = rn_1t = rtn_1 = trn_1 \in t(rN)$, где $n_1 \in N$. Поэтому $(rN)t \subseteq t(rN)$. Аналогично рассуждая, получаем $t(rN) \subseteq (rN)t$. Следовательно, $(rN)t = t(rN)$ для любого $t \in T$. Это означает, что $rN \in C_{R/N}(T)$ и поэтому $R/N \subseteq C_{R/N}(T)$. Таким образом, $C_{R/N}(T) = R/N$ и, следовательно, группа R/N действует тождественно на T. Тем самым установлено, что A – группа автоморфизмов группы T, действующая тождественно на T.

Поскольку $T^\alpha = T$ для любого $\alpha \in A$, то субнормальный ряд $1 \lhd T$ группы T является A-допустимым. Тогда по лемме 1 (3) A – p-группа и, значит, R/N – p-группа. Так как $R \cdot\!\lhd H$, то R является элементарной абелевой p-группой. Поэтому $R \subseteq O_p(H)$. Получили противоречие. Следовательно, $H \cap C_{G_1}(T) = 1$ и $C_{G_1}(T) = T_1$. Тогда по модулярному тождеству

$$C_G(T) = G \cap C_{G_1}(T) = G \cap T_1 = T(H \cap T_1) = T.$$

Таким образом, $C_G(T) = T$.

Покажем, что $T \cdot\!\lhd G$. Допустим, что это не так. Тогда существует такая $X \lhd G$, что $1 \subset X \subset T$. Так как $X \lhd G$, то $H \subseteq N_{G_1}(X)$. Поскольку $X \subset T \subseteq T_1$, то $T_1 = C_{G_1}(T_1) \subseteq C_{G_1}(X) \subseteq N_{G_1}(X)$. Следовательно, $G_1 = HT_1 \subseteq N_{G_1}(X)$ и $X \lhd G_1$. Тогда из $1 \subset X \subset T$ следует, что подгруппа T не является минимальной нормальной в G_1. Получили противоречие. Таким образом, $T \cdot\!\lhd G$. Допустим, что существует $K \cdot\!\lhd G$ такая, что $K \neq T$. Тогда $KT \leq G$ и $KT = K \times T$. Поэтому $K \subseteq C_G(T) = T$. Получили противоречие. Следовательно, G – монолитическая группа с монолитом T.

Установим, что $F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T)$. Действительно, так как $T \cdot\!\lhd G$ и T – p-группа, то $T/1$ – главный p-фактор группы G. Тогда по замечанию 1 $F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T/1) = C_G(T)$.

Поскольку φ является b-направлением, то $\varphi(Z_p) = \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p$. Это означает, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \varphi(Z_p)$ и поэтому $T \subseteq O_p(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. Так как по условию $\varphi \leq \varphi_3$, то $G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G)$.

Таким образом,

$$T \subseteq O_p(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)} \subseteq F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T) = T.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$T = G_{\varphi(Z_p)} = O_{Z_p}(G).$$

II. Покажем, что $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$.

Предварительно установим, что $G \notin \mathfrak{M}$. Допустим, что $G \in \mathfrak{M}$. Тогда, ввиду $Z_p \in \Omega \cap K(G)$, по определению Ω-расслоенной формации имеем $G/G_{\varphi(Z_p)} \in m(Z_p)$. Отсюда следует, что $H \cong G/T \in m(Z_p)$. Получили противоречие с выбором группы H. Следовательно, $G \notin \mathfrak{M}$.

Проверим, что $G \in \mathfrak{F}$. Так как f – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{F}$, то по замечанию 5 $f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку φ – r-направление, $Z_p \in \Omega$, $G/O_{Z_p}(G) \cong H \in f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$, $G/G_{\varphi(Z_p)} \cong H \in f(Z_p)$, то по лемме 2 (6) имеем $G \in \mathfrak{F}$.

Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, ввиду того, что $G \notin \mathfrak{M}$, имеем $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то из $\mathfrak{M} \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 2 (3),

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi) = \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(Z_p)}\} \cup \{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \mathfrak{M}\}, \varphi).$$

Пусть $\mathfrak{M}_1 := \{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \mathfrak{M}\}$. Тогда $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup \mathfrak{M}_1, \varphi)$. Отметим, что по лемме 2 (3) $m(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}_1, \varphi)$. Так как $\{H\} \cup \mathfrak{M}_1 \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi)$, то $f(Z_p) \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi)$. С другой стороны, ввиду того, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \{H\} \cup \mathfrak{M}_1 \subseteq f(Z_p)$, следует $m(Z_p) \subseteq f(Z_p)$. Поэтому $\Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi) \subseteq f(Z_p)$. Таким образом,

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi).$$

Теорема доказана.

Поскольку φ_2 и φ_3 – br-направления и $\varphi_2 \leq \varphi_3$, то из теоремы 1 вытекают результаты для n-кратно Ω-биканонических и n-кратно Ω-композиционных формаций.

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-биканоническая формация с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$-спутником f, $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно Ω-биканоническая подформация формации $\mathfrak{F}$ с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$-спутником m. Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \backslash m(Z_p) \neq \varnothing$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \backslash m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение*

$$f(Z_p) = \Omega B_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p)).$$

Следствие 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-композиционная формация с минимальным $\Omega C_{(n-1)}$-спутником f, $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно Ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$ с минимальным*

$\Omega C_{(n-1)}$-спутником m. Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega, f(Z_p)\backslash m(Z_p) \neq \varnothing, H$ – группа минимального порядка из $f(Z_p)\backslash m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = \Omega C_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p)).$$

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{I}$, из теоремы 1 и следствий 1, 2 получаем соответственно следующие результаты для n-кратно φ-расслоенных, n-кратно биканонических и n-кратно композиционных формаций.

Следствие 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно φ-расслоенная формация с минимальным $\varphi_{(n-1)}$-спутником f, $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно φ-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$ с минимальным $\varphi_{(n-1)}$-спутником m, где φ – br-направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leq \varphi_3$. Если p – такое простое число, что $f(Z_p)\backslash m(Z_p) \neq \varnothing$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p)\backslash m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение*

$$f(Z_p) = F_{(n-1)}((\{H\} \cup m(Z_p)), \varphi).$$

Следствие 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно биканоническая формация с минимальным $B_{(n-1)}$-спутником f, $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно биканоническая подформация формации $\mathfrak{F}$ с минимальным $B_{(n-1)}$-спутником m. Если p – такое простое число, что $f(Z_p)\backslash m(Z_p) \neq \varnothing$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p)\backslash m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение*

$$f(Z_p) = B_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p)).$$

Следствие 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно композиционная формация с минимальным $C_{(n-1)}$-спутником f, $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$ с минимальным $C_{(n-1)}$-спутником m. Если p – такое простое число, что $f(Z_p)\backslash m(Z_p) \neq \varnothing$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p)\backslash m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение*

$$f(Z_p) = C_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p)).$$

В теореме 2 доказано, что для любой максимальной кратно Ω-расслоенной подформации $\mathfrak{M}$ заданной кратно Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ существует такой ее спутник, строение которого определяется строением минимального спутника формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная формация с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутником f, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ имеет такой $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник h, что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$-кратно $\Omega\varphi$-расслоенной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\})\backslash(A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$ и m – ее минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник. Так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Пусть $G \in \mathfrak{F}\backslash\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда, с учетом максимальности $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$, следует, что $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}$.

Покажем, что $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. Поскольку $\{G\} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $(K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega \subseteq K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Допустим, что $(K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega \subset K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Тогда существует такая группа $X \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$, что $X \notin (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. Это означает, что $X \in \Omega\backslash(K(G) \cup K(\mathfrak{M}))$ и, в силу леммы 2 (3), $f(X) = \varnothing$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{F}, \varphi)$, то, по лемме 2 (3) $f(X) = \Omega F_{(n-1)}((T/T_{\varphi(A)} \mid T \in \mathfrak{F}), \varphi) \neq \varnothing$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$ и, значит,

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{L/O_\Omega(L) \mid L \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{L/L_{\varphi(A)} \mid L \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть

$$\mathfrak{M}^\Omega := \{M/O_\Omega(M) \mid M \in \mathfrak{M}\};$$

$$\mathfrak{M}^A := \begin{cases} \{M/M_{\varphi(A)} \mid M \in \mathfrak{M}\}, & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}); \\ \varnothing, & \text{если } A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \setminus K(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Тогда

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup \mathfrak{M}^\Omega, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup \mathfrak{M}^A, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Отметим, что, в силу леммы 2 (3), минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник m формации $\mathfrak{M}$ имеет следующее строение:

$$m(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}^\Omega, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}^A, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}); \\ \varnothing, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Пусть $A \in \{\Omega'\}$. Так как $\{G/O_{\Omega}(G)\} \cup \mathfrak{M}^{\Omega} \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_{\Omega}(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$, то $f(\Omega') \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_{\Omega}(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{M}^{\Omega} \subseteq \{G/O_{\Omega}(G)\} \cup \mathfrak{M}^{\Omega} \subseteq f(\Omega')$, то $m(\Omega') \subseteq f(\Omega')$. Поэтому $\Omega F_{(n-1)}(\{G/O_{\Omega}(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi) \subseteq f(\Omega')$. Тем самым установлено, что $f(\Omega') = \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_{\Omega}(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$.

Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Рассуждая, как и выше, получаем равенство $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi)$.

Таким образом,

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_{\Omega}(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Поскольку $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $m < f$. Поэтому найдется такой элемент $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, что $m(X) \subset f(X)$. Рассмотрим случай, когда $X \in \{\Omega'\}$, т. е. $m(\Omega') \subset f(\Omega')$. По лемме 3 в $f(\Omega')$ существует такая максимальная $(n-1)$-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{M}_1$, что $m(\Omega') \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Пусть h – ΩF-функция такая, что $h(\Omega') = \mathfrak{M}_1$ и $h(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$ и $\mathfrak{H} := \Omega F(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. Так как $h(\Omega') = \mathfrak{M}_1 \subset f(\Omega')$ и $h(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$, то $h \leq f$. Тогда по определению Ω-расслоенной формации $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $h_1(\Omega') = f(\Omega')$, где h_1 – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{H}$. С другой стороны, по лемме 2 (3) $h_1(\Omega') \subseteq h(\Omega') \subset f(\Omega')$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Поскольку $m(\Omega') \subseteq \mathfrak{M}_1 = h(\Omega')$ и $m(A) \subseteq f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega$, то $m \leq h$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M}$ – максимальная $(n-1)$-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$ и h – искомый $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим случай, когда $f(\Omega') = m(\Omega')$. Тогда $X \in \Omega$ и $m(X) \subset f(X)$. Если $X \in \Omega \backslash K(\mathfrak{F})$, то $m(X) = \varnothing = f(X)$, что невозможно. Поэтому $X \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. По лемме 3 в $f(X)$ существует такая максимальная $(n-1)$-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{M}_2$, что $m(X) \subseteq \mathfrak{M}_2$. Пусть b – ΩF-функция такая, что $b(\Omega') = f(\Omega')$, $b(X) = \mathfrak{M}_2$ и $b(Y) = f(Y)$ для всех $Y \in \Omega \backslash (X)$ и $\mathfrak{B} := \Omega F(b, \varphi)$. Установим, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}_2 \subset f(X)$, то $b \leq f$. Следовательно, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $b_1(X) = f(X)$, где b_1 – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{B}$. С другой стороны, по лемме 2 (3) $b_1(X) \subseteq b(X) \subset f(X)$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$. Поскольку $m(\Omega') = f(\Omega') = b(\Omega')$, $m(X) \subseteq \mathfrak{M}_2 = b(X)$ и $m(Y) \subseteq f(Y) = b(Y)$ для всех $Y \in \Omega \backslash (X)$, то $m \leq b$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{M}$ – максимальная $(n-1)$-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ и, значит, b – искомый $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Поскольку $\varphi_0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3$, то из теоремы 2 вытекают результаты для n-кратно Ω-свободных, n-кратно Ω-биканонических и n-кратно Ω-композиционных формаций.

Следствие 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-свободная формация с минимальным $\Omega Fr_{(n-1)}$-спутником f. Если $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно Ω-свободная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ имеет такой $\Omega Fr_{(n-1)}$-спутник h, что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$-кратно Ω-свободной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \backslash (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.*

Следствие 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-биканоническая формация с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$-спутником f. Если $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно Ω-биканоническая подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ имеет такой $\Omega B_{(n-1)}$-спутник h, что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$-кратно Ω-биканонической подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \backslash (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.*

Следствие 8. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-композиционная формация с минимальным $\Omega C_{(n-1)}$-спутником f. Если $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно Ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ имеет такой $\Omega C_{(n-1)}$-спутник h, что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$-кратно Ω-композиционной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \backslash (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.*

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{I}$, из теоремы 2 и следствий 6–8 получаем следующие результаты для n-кратно φ-расслоенных, n-кратно свободных, n-кратно биканонических и n-кратно композиционных формаций соответственно.

Следствие 9. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно φ-расслоенная формация с минимальным $\varphi_{(n-1)}$-спутником f, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно φ-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ имеет такой $\varphi_{(n-1)}$-спутник h, что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$-кратно φ-расслоенной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \backslash (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.*

Следствие 10. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно свободная формация с минимальным $Fr_{(n-1)}$-спутником f. Если $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно свободная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ имеет такой $Fr_{(n-1)}$-спутник h, что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$-кратно свободной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \backslash (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.*

Следствие 11. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно биканоническая формация с минимальным $B_{(n-1)}$-спутником f. Если $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно биканоническая подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ имеет такой*

$B_{(n-1)}$*-спутник* h*, что для некоторого* $A \in K(\mathfrak{F})$ *формация* $h(A)$ *является максимальной* $(n-1)$*-кратно биканонической подформацией формации* $f(A)$*, а для всех* $B \in K(\mathfrak{F})\backslash(A)$ *имеет место равенство* $h(B) = f(B)$.

Следствие 12. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ *–* n*-кратно композиционная формация с минимальным* $C_{(n-1)}$*-спутником* f*. Если* $\mathfrak{M}$ *– максимальная* n*-кратно композиционная подформация формации* $\mathfrak{F}$*, то* $\mathfrak{M}$ *имеет такой* $C_{(n-1)}$*-спутник* h*, что для некоторого* $A \in K(\mathfrak{F})$ *формация* $h(A)$ *является максимальной* $(n-1)$*-кратно композиционной подформацией формации* $f(A)$*, а для всех* $B \in K(\mathfrak{F})\backslash(A)$ *имеет место равенство* $h(B) = f(B)$.

3.2. Достаточные условия максимальности кратно Ω-расслоенной подформации кратно Ω-расслоенной формации

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{M}$ *–* n*-кратно* Ω*-расслоенные формации с направлением* φ *и минимальными* $\Omega\varphi_{(n-1)}$*-спутниками* f *и* m *соответственно. Если* $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M})$, φ *–* $b_A r$*-направление,* $f(\Omega') = m(\Omega')$, $f(B) = m(B)$ *для любого* $B \in \Omega\backslash(A)$, $m(A) \subset f(A)$*, причем для любой группы* $G \in f(A)\backslash m(A)$ *с* $O_A(G) = 1$ *выполняется равенство* $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G\} \cup m(A), \varphi)$*, то* $\mathfrak{M}$ *является максимальной* n*-кратно* $\Omega\varphi$*-расслоенной подформацией формации* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M})$, φ – $b_A r$-направление, $f(\Omega') = m(\Omega')$, $f(B) = m(B)$ для любого $B \in \Omega\backslash(A)$, $m(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A)\backslash m(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G\} \cup m(A), \varphi)$. Тогда $m < f$ и, значит, по определению Ω-расслоенной формации $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 2 (3) $m = f$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная формация, причем $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$, то существует группа $H \in \mathfrak{L}\backslash\mathfrak{M}$. Так как $H \notin \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{L}$. Пусть $\mathfrak{H} := \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$, h – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{H}$, l – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{L}$.

Ввиду того, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$, по лемме 2 (4) имеем $l \leq f$. Так как $H \in \mathfrak{L}$, то по определению Ω-расслоенной формации $H/H_{\varphi(X)} \in l(X) \subseteq f(X)$ для любого $X \in \Omega \cap K(H)$. Если $A \in K(H)$, то $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Если $A \notin K(H)$, то $H \in \mathfrak{G}_{A'}$. Поскольку φ – r-направление, то $H \in \mathfrak{G}_{A'} \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$. Поэтому $H = H_{\varphi(A)}$. Так как $A \in K(\mathfrak{L}) \cap \Omega$, то $l(A) \neq \varnothing$. Следовательно, $H/H_{\varphi(A)} = 1 \in l(A) \subseteq f(A)$, т. е. $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Покажем, что $H/H_{\varphi(A)} \notin m(A)$. Предположим, что $H/H_{\varphi(A)} \in m(A)$. Поскольку для любого $B \in (\Omega \cap K(H))\backslash(A)$ справедливо $H/H_{\varphi(B)} \in f(B) = m(B)$ и $H/O_\Omega(H) \in l(\Omega') \subseteq f(\Omega') = m(\Omega')$, то по определению Ω-расслоенной формации $H \in \mathfrak{M}$, что невозможно. Следовательно, $H/H_{\varphi(A)} \notin m(A)$ и, значит, $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)\backslash m(A)$.

Поскольку φ – b_A-направление, то по лемме 2 (1) $O_A(H/H_{\varphi(A)}) = 1$. Так как $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)\backslash m(A)$ и $O_A(H/H_{\varphi(A)}) = 1$, то по условию теоремы справедливо равенство

$$f(A) = \Omega F_{n-1}(\{H/H_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi).$$

Покажем, что $l(A) = f(A)$. Так как по лемме 2 (4) $m < h \leq l \leq f$, с учетом равенств $m(\Omega') = f(\Omega')$ и $m(B) = f(B)$ для любого $B \in \Omega\backslash(A)$, имеет место

$$\begin{gathered} m(\Omega') = h(\Omega') = l(\Omega') = f(\Omega'); \\ m(B) = h(B) = l(B) = f(B) \text{ для любого } B \in \Omega\backslash(A); \\ m(A) \subset h(A) \subseteq l(A) \subseteq f(A). \end{gathered}$$

Поскольку $\mathfrak{H} = \Omega F_n(\mathfrak{H}, \varphi)$ и $\mathfrak{H} = \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$, то, в силу леммы 2 (3), справедливо равенство $K(\mathfrak{H}) \cap \Omega = (K(H) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. По лемме 2 (3) минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{H}$ имеет следующее строение:

$$h(X) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{L/O_\Omega(L) \mid L \in \{H\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } X \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{L/L_{\varphi(X)} \mid L \in \{H\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } X \in \Omega \cap K(\mathfrak{H}); \\ \varnothing, & \text{если } X \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Рассуждая как и при доказательстве теоремы 2, нетрудно показать, что

$$h(X) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{H/O_\Omega(H)\} \cup m(\Omega'), \varphi), & \text{если } X \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{H/H_{\varphi(X)}\} \cup m(X), \varphi), & \text{если } X \in \Omega \cap K(\mathfrak{H}); \\ \varnothing, & \text{если } X \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Если $A \notin K(\mathfrak{H})$, то $h(A) = \varnothing$ и, значит, $m(A) = \varnothing = h(A)$. Получили противоречие. Следовательно, $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{H})$ и поэтому $h(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{H/H_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi) = f(A)$. Это, ввиду включения $h(A) \subseteq l(A) \subseteq f(A)$, означает равенство $l(A) = f(A)$. Таким образом, $l = f$ и по определению Ω-расслоенной формации $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M}$ – максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Поскольку φ_2 и φ_3 являются b_A-направлениями для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$, то из теоремы 3 вытекают результаты для n-кратно Ω-биканонических и n-кратно Ω-композиционных формаций.

Следствие 13. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – n-кратно Ω-биканонические формации с минимальными $\Omega B_{(n-1)}$-спутниками f и m соответственно. Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(\Omega') = m(\Omega')$, $f(B) = m(B)$ для любого $B \in (\Omega\cap\mathfrak{A})\backslash(A)$, $m(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A)\backslash m(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = \Omega B_{(n-1)}(\{G\} \cup m(A))$, то $\mathfrak{M}$ является максимальной n-кратно Ω-биканонической подформацией формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 14. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – n-кратно Ω-композиционные формации с минимальными $\Omega C_{(n-1)}$-спутниками f и m соответственно. Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(\Omega') = m(\Omega')$, $f(B) = m(B)$ для любого $B \in \Omega\backslash(A)$, $m(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A)\backslash m(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = \Omega C_{(n-1)}(\{G\} \cup m(A))$, то $\mathfrak{M}$ является максимальной n-кратно Ω-композиционной подформацией формации $\mathfrak{F}$.*

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{I}$, из теоремы 3 и следствий 13, 14 получаем результаты для n-кратно φ-расслоенных, n-кратно биканонических и n-кратно композиционных формаций.

Следствие 15. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – n-кратно расслоенные формации с направлением φ и минимальными $\varphi_{(n-1)}$-спутниками f и m соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M})$, φ – $b_A r$-направление, $f(B) = m(B)$ для любого $B \in \mathfrak{I}\backslash(A)$, $m(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A)\backslash m(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = F_{(n-1)}(\{G\}\cup m(A), \varphi)$, то $\mathfrak{M}$ является максимальной n-кратно φ-расслоенной подформацией формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 16. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – n-кратно биканонические формации с минимальными $B_{(n-1)}$-спутниками f и m соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(B) = m(B)$ для любого $B \in (\mathfrak{I} \cap \mathfrak{A})\backslash(A)$, $m(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A)\backslash m(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = B_{(n-1)}(\{G\} \cup m(A))$, то $\mathfrak{M}$ является максимальной n-кратно биканонической подформацией формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 17. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – n-кратно композиционные формации с минимальными $C_{(n-1)}$-спутниками f и m соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(B) = m(B)$ для любого $B \in (\mathfrak{I} \cap \mathfrak{A})\backslash(A)$, $m(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A)\backslash m(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = C_{(n-1)}(\{G\} \cup m(A))$, то $\mathfrak{M}$ является максимальной n-кратно композиционной подформацией формации $\mathfrak{F}$.*

3.3. О группах, входящих в максимальные подформации кратно Ω-расслоенных формаций. Установим, что для любой неединичной разрешимой Ω-группы G, принадлежащей n-кратно Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ, фактор-группа $G/(\cap_{A\in\Omega} G_{\varphi(A)})$ принадлежит пересечению всех максимальных n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Используя методы доказательств, разработанные в [4] для исследования τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, где τ – подгрупповой функтор, предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{F}_1 \subsetneq \mathfrak{F}_2$, то $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subsetneq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$.*
Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{F}_1 \subsetneq \mathfrak{F}_2$. Предположим, что $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \nsubseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$. Тогда в $\mathfrak{F}_2$ существует такая максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{M}$, что $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \nsubseteq \mathfrak{M}$. Ввиду включения $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \mathfrak{F}_1$, имеем $\mathfrak{F}_1 \nsubseteq \mathfrak{M}$. Это означает, что $\mathfrak{M} \subset \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}, \varphi)$ и, следовательно,

$$\mathfrak{F}_2 = \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M}.$$

Так как, ввиду замечания 3, $\mathfrak{F}_2 /_{\Omega\varphi^n F}\mathfrak{M} \cong \mathfrak{F}_1/_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$ и по замечанию 4 множество $\mathfrak{F}_2 /_{\Omega\varphi^n F}\mathfrak{M}$ имеет лишь два элемента $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}_2$, то множество $\mathfrak{F}_1/_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$ также является двухэлементным. Тогда по замечанию 4 формация $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}$ является максимальной n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенной подформацией в $\mathfrak{F}_1$. Поэтому $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Следовательно, $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, являющаяся br-направлением Ω-расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая Ω-группа. Тогда $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}\ (\Omega F_n(G, \varphi))$.*
Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка и $\mathfrak{F} := \Omega F_n(G, \varphi)$. Так как $G \neq 1$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$ и, значит, $1 \in \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$. Тогда из $G/F(G) \notin \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ следует, что $F(G) \neq G$ и, в частности, $\Phi(G) \neq G$. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Согласно лемме 1 (6), имеем

$$G/F(G) \cong (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) = (G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G)).$$

Поскольку $G/\Phi(G)$ – неединичная разрешимая Ω-группа и $|G/\Phi(G)| < |G|$, то, в силу выбора группы G, справедливо

$$(G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G)) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi)).$$

Из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как φ – r-направление, то $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда по лемме 4 получаем

$$\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi)) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}).$$

Следовательно, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$, что противоречит выбору группы G. Тем самым установлено, что $\Phi(G) = 1$ и, ввиду леммы 1 (5), $F(G) \neq 1$.

I. Рассмотрим случай, когда G – примитивная группа. Пусть M – примитиватор группы G. Согласно лемме 1 (2), $G = P \rtimes M$ – монолитическая группа с абелевым монолитом $P = C_G(P)$. Пусть $K(P) = (Z_p)$. Так как φ – br-направление и $\varphi \leq \varphi_3$, то

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{G}_{(Z_p)'}\varphi(Z_p))\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p) \subseteq \varphi_3(Z_p).$$

Поэтому $F(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(P) = P$ и, следовательно, $P = F(G) = G_{\varphi(Z_p)}$.

Поскольку $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, то по лемме 2 (3) формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутником f, имеющим, с учетом $K(G) \subseteq \Omega$, следующее строение:

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(G/O_\Omega(G), \varphi) = \mathfrak{E}, & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(G/G_{\varphi(A)}, \varphi), & \text{если } A \in K(G); \\ \varnothing, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(G), \end{cases}$$

в частности, $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(G/P, \varphi) = \Omega F_{(n-1)}(M, \varphi)$.

Так как $G/F(G) \notin \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$, то в $\mathfrak{F}$ существует такая максимальная n-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{H}$, что $G/F(G) \notin \mathfrak{H}$. Пусть h – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 2 (4), $h < f$. Если $h(\Omega') \subset f(\Omega')$, то из $f(\Omega') = \mathfrak{E}$ получаем $h(\Omega') = \varnothing$, что противоречит определению Ω-расслоенной формации. Следовательно, $h(\Omega') = f(\Omega')$. Если $h(Z_p) = f(Z_p)$, то $G/F(G) = G/G_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $h(Z_p) \subset f(Z_p)$ и $h(A) \subseteq f(A)$ для любой группы $A \in \Omega \setminus (Z_p)$. По лемме 3 в $f(Z_p)$ существует такая максимальная $(n-1)$-кратно $\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{M}$, что $h(Z_p) \subseteq \mathfrak{M}$. Отметим также, что $\Phi_{\Omega\varphi^{(n-1)}F}(f(Z_p)) \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть m – такая ΩF-функция, что $m(\Omega') = f(\Omega')$, $m(Z_p) = \mathfrak{M}$, $m(A) = f(A)$ для любой группы $A \in \Omega \setminus (Z_p)$, и $\mathfrak{M}_1$ – $\Omega\varphi$-расслоенная формация с Ω-спутником m. В силу задания функции m, имеем $\mathfrak{M}_1 \in \Omega\varphi^n F$. Покажем, что $M \in \mathfrak{M}_1$. Поскольку $|M| < |G|$ и M – неединичная разрешимая Ω-группа, то, ввиду выбора группы G, справедливо

$$M/F(M) \in \Phi_{\Omega\varphi^{(n-1)}F}(\Omega F_{(n-1)}(M, \varphi)) = \Phi_{\Omega\varphi^{(n-1)}F}(f(Z_p)) \subseteq \mathfrak{M} = m(Z_p).$$

Так как $F(M) \subseteq M_{\varphi(Z_p)}$, то $M/M_{\varphi(Z_p)} \in m(Z_p)$. Поскольку $M \in \mathfrak{F}$, то $M/O_\Omega(M) \in f(\Omega') = m(\Omega')$ и $M/M_{\varphi(A)} \in f(A) = m(A)$ для любой группы $A \in K(M) \setminus (Z_p)$. Это, по определению Ω-расслоенной формации, означает, что $M \in \mathfrak{M}_1$. Так как

$$h(\Omega') = m(\Omega') = f(\Omega');$$
$$h(Z_p) \subseteq m(Z_p) \subset f(Z_p);$$
$$h(A) \subseteq m(A) = f(A) \text{ для любой группы } A \in \Omega \setminus (Z_p),$$

то, $h \leq m < f$ и, согласно определению Ω-расслоенной формации, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (3) $f \leq m$ и, значит, $f(Z_p) \subseteq m(Z_p)$, что противоречит включению $m(Z_p) \subset f(Z_p)$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$ и, в силу максимальности $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{F}$, справедливо равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1$. Тогда $G/F(G) \cong M \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Таким образом, в случае, когда G – примитивная группа, мы получаем противоречие с выбором группы G.

II. Пусть теперь группа G не является примитивной, $\{M_1, \ldots, M_k\}$ – совокупность всех максимальных подгрупп группы G, $T_i := G/\mathrm{Core}_G(M_i)$, $i = \overline{1, k}$, $T := T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_k$ и $\mathfrak{T} := \Omega F_n(T, \varphi)$. Тогда $T \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, так как $G \cong G/\Phi(G) = G/(\cap_{i=\overline{1,k}} \mathrm{Core}_G(M_i))$ и класс $\mathfrak{T}$ замкнут относительно подпрямых произведений, то $G \in \mathfrak{T}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{T}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{T}$. Поскольку T_i – неединичная разрешимая Ω-группа и $|T_i| < |G|$, то, в силу выбора группы G, используя лемму 4, получаем

$$T_i/F(T_i) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(T_i, \varphi)) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{T}) = \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}), \ i = \overline{1, k}.$$

Ввиду того, что $T_i F(T)/F(T) \cong T_i/T_i \cap F(T) = T_i/F(T_i)$, имеем

$$T/F(T) = (T_1 \times \cdots \times T_k)/F(T) = T_1F(T)/F(T) \times \cdots \times T_kF(T)/F(T) \cong$$

$$\cong T_1/F(T_1) \times \cdots \times T_k/F(T_k) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}).$$

Так как группа G входит подпрямо в T, то $GF(T)/F(T)$ входит подпрямо в $T/F(T)$ и, значит, $GF(T)/F(T) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Тогда из $GF(T)/F(T) \cong G/G \cap F(T)$ следует

$$G/F(G) \cong (G/(G \cap F(T)))/(F(G)/(G \cap F(T))) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}).$$

Получили противоречие с выбором группы G. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-расслоенная формация с br-направлением φ, $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая Ω-группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A\in\Omega} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $A \in \Omega$. Поскольку $G \neq 1$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$ и поэтому $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. Покажем, что $G/G_{\varphi(A)} \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Рассмотрим случай, когда $A \notin K(G)$. Так как φ – r-направление, то

$$G \in \mathfrak{G}_{A'} \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$$

и, значит, $G = G_{\varphi(A)}$. Следовательно, в этом случае $G/G_{\varphi(A)} = 1 \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Пусть $A \in K(G)$ и $\mathfrak{F}_1 := \Omega F_n(G,\varphi)$. Так как $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$, то, в силу леммы 4, $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 5, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1)$ и, значит, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Ввиду разрешимости группы G, $A \cong Z_p$ для некоторого простого числа p. Так как φ является br-направлением, то

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{G}_{(Z_p)'}\varphi(Z_p))\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p).$$

Это означает, что $F(G) \subsetneq G_{\varphi(Z_p)}$. Следовательно, $G/G_{\varphi(Z_p)} \cong (G/F(G))/(G_{\varphi(Z_p)}/F(G)) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Поскольку $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ является классом групп, замкнутым относительно подпрямых произведений, то из $G/G_{\varphi(A)} \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ для любой группы $A \in \Omega$ следует, что $G/(\cap_{A\in\Omega} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 непосредственно вытекают результаты для n-кратно Ω-биканонических и n-кратно Ω-композиционных формаций. Полагаем $\Phi_{\Omega\varphi_2{}^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{\Omega B^n F}(\mathfrak{F})$, $\Phi_{\Omega\varphi_3{}^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{\Omega C^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 18. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-биканоническая формация и G – неединичная разрешимая Ω-группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A\in\Omega} O_{A',A}(G)) \in \Phi_{\Omega B^n F}(\mathfrak{F})$.*

Следствие 19. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-композиционная формация и G – неединичная разрешимая Ω-группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A\in\Omega} F_A(G)) \in \Phi_{\Omega C^n F}(\mathfrak{F})$.*

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{I}$, из теоремы 4 получаем результаты для n-кратно расслоенных формаций, и в частности, для n-кратно биканонических и n-кратно композиционных формаций. Полагаем $\Phi_{\varphi_2{}^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{B^n F}(\mathfrak{F})$, $\Phi_{\varphi_3{}^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{C^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 20. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно расслоенная формация с br-направлением φ, $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A\in\mathfrak{I}} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.*

Следствие 21. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно биканоническая формация и G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A\in\mathfrak{I}} O_{A',A}(G)) \in \Phi_{B^n F}(\mathfrak{F})$.*

Следствие 22. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ – n-кратно композиционная формация и G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A\in\mathfrak{I}} F_A(G)) \in \Phi_{C^n F}(\mathfrak{F})$.*

4. Заключение. В монографии А. Н. Скибы [4] изучались τ-замкнутые n-кратно локальные формации (здесь τ – подгрупповой функтор), в частности, была исследована взаимосвязь между минимальными экранами (спутниками) таких формаций и их максимальных подформаций [4, лемма 5.1.20 (2)], установлены достаточные условия максимальности подформаций τ-замкнутых n-кратно локальных формаций [4, лемма 5.1.20 (1)]. В теоремах 1–3 получено развитие данных результатов для Ω-расслоенных формаций. Теорема 4 является аналогом результата Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы [5, теорема 6] о формации $\Phi_n^{\omega}(\mathfrak{F})$ (здесь $\Phi_n^{\omega}(\mathfrak{F})$ – пересечение всех максимальных n-кратно ω-локальных подформаций n-кратно ω-локальной формации $\mathfrak{F}$) для случая n-кратно Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$.

Список литературы

1. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen. *Math. Z.* 1963;80(4):300–305.
2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука; 1978. 272 с.
3. Скиба А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины. *Вопросы алгебры.* 1987;3:21–31.
4. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука; 1997.
5. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Математические труды.* 2000;10(2):112–141.
6. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп. *Украинский математический журнал.* 2000;52(6):783–797.
7. Ведерников В.А. О новых типах ω-веерных формаций конечных групп. *Україньский математический конгресс. – 2001, Праці, Київ, Секція 1.* 2002;36–45.
8. Ведерников В.А. Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2001;7(2):55–71.
9. Еловикова (Скачкова) Ю.А. Решетки Ω-расслоенных формаций. *Дискретная математика.* 2002;14(2):85–94.
10. Сорокина М.М. О минимальных спутниках кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп. *Сборник научных трудов: Брянскому государственному педагогическому университету имени академика И.Г. Петровского – 70 лет.* 2000;199–203.

11. Ведерников В.А., Демина Е.Н. Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп. *Сибирский математический журнал.* 2010;51(5):789–804.
12. Сорокина М.М., Максаков С.П. О максимальных подформациях n-кратно Ω-расслоенных формаций конечных групп. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2021;21(1):15–25.
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter: Berlin – New York; 1992. 891 p.
14. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω-Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика.* 2001;11(5):507–527.
15. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука; 1989. 252 с.
16. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука; 1984. 568 с.
17. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учебное пособие. Мн.: Выш. шк.; 2006. 207 с.
18. Еловикова Ю.А. Алгебраичность решеток Ω-расслоенных формаций. *Вестник Брянского государственного университета: Точные и естественные науки.* 2013;4:13–16.

References

1. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen. *Math. Z.* 1963;80(4):300–305.
2. Shemetkov LA. Formations of finite groups. Nauka: Moscow; 1978. 272 p (In Russ.).
3. Skiba AN. Characterization of finite solvable groups of given nilpotent length. *Algebra issues.* 1987;3:21–31 (In Russ.).
4. Skiba AN. Algebra of formations. Minsk: Belarusskay Nauka; 1997 (In Russ.).
5. Shemetkov LA., Skiba AN. Multiple ω-local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics.* 2000;10(2):112–141.
6. Skiba AN., Shemetkov LA. Multiple $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2000;52(6):783–797 (In Russ.).
7. Vedernikov VA. On new types of ω-fibered formations of finite groups.*Ukrainian Mathematical Congress – 2001. Section 1. Kiev: Inst. Matematiki NAN Ukrainy.* 2002;36–45 (In Russ.).
8. Vedernikov VA. Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2001;7(2):55–71 (In Russ.).
9. Elovikova (Skachkova) YA. Lattices of Ω-foliated formations. *Discrete Mathematics.* 2002;14(2):85–94.
10. Sorokina MM. On minimal satellites of multiply Ω-foliated Fitting classes and formations of finite groups. *Sbornik of scientific papers: Bryansk State Pedagogical University named after academician I.G. Petrovsky – 70 years.* 2000;199–203. (In Russ.)
11. Vedernikov V.A., Demina E.N. Ω-foliated formations of multioperator T-groups. *Siberian Mathematical Journal.* 2010;51(5):789–804.
12. Sorokina MM., Maksakov SP. On maximal subformations of n-multiple Ω-foliated formations of finite groups. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 2021;21(1):15–25 (In Russ.).
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter: Berlin – New York; 1992. 891 p.
14. Vedernikov VA., Sorokina MM. Ω-Foliated formations and Fitting classes of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications.* 2001;11(5):507–527. (In Russ.)
15. Shemetkov LA., Skiba AN. Formations of algebraic systems. M.: Science; 1989. 252 p. (In Russ.)
16. Birkhoff G. Lattice Theory. M.: Science; 1984. 568 p. (In Russ.)
17. Monakhov VS. Introduction to the theory of finite groups and classes of finite groups: textbook. Mn.: Vyshaya shkola; 2006. 207 p (In Russ.).
18. Elovikova YA. The Algebraicity of lattices of Ω-foliated formations. *The Bryansk State University Herald: Exact and Natural sciences.* 2013;4:13–16 (In Russ.).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.09.2025 Received September 29, 2025
Поступила после рецензирования 11.11.2025 Revised November 11, 2025
Принята к публикации 19.11.2025 Accepted November 19, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Нестеров Александр Сергеевич – преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, г. Брянск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander S. Nesterov – Lecturer of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia

К содержанию