



Об однозначной разрешимости нелокальных задач для абстрактных сингулярных уравнений

А. В. Глушак

Излагаются достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных задач для абстрактных сингулярных уравнений, которые формулируются в терминах нулей модифицированной функции Бесселя и резольвенты операторного коэффициента рассматриваемых уравнений. Приводятся примеры.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: сингулярные уравнения, нелокальная задача, однозначная разрешимость, модифицированная функция Бесселя, резольвента.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm14171>

1. Введение и постановка задачи. Пусть E – комплексное банахово пространство и A, B – линейные замкнутые операторы в E , области определения $D(A)$, $D(B)$ которых не обязательно плотны в E . Еще ряд ограничений на эти операторы будет указан в процессе изложения доказываемых утверждений. Мы будем изучать нелокальные задачи на конечном интервале $0 < t < 1$, поскольку общий случай изменения $0 < t < T$ сводится к рассматриваемому заменой переменной t на t/T .

Рассмотрим уравнение вида

$$B\left(u''(t) + \frac{k}{t}u'(t)\right) = Au(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1.1)$$

которое, в случае $B \neq I$, обобщает абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Постановка граничных и нелокальных условий, в силу сингулярности (при $k \neq 0$) рассматриваемого уравнения в точке $t = 0$, зависит от параметра $k \in \mathbb{R}$ и эти условия будут приведены далее. Налагаемые в дальнейшем нелокальные интегральные условия допустимо трактовать в духе теории управления: требуется найти решение дифференциального уравнения (1.1) с заданным начальным состоянием при $t = 0$ и обладающее неким предписанным средним значением. Как указано в [1], условия такого вида возникают, например, при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме, процессов влагопереноса в капиллярно-пористых средах и др.

Уравнение вида (1.1) называют уравнением соболевского типа или дескрипторным. Задача Коши для сингулярного уравнения (1.1) с фредгольмовым оператором B изучалась ранее в [2], [3]. Подробный обзор о разрешимости несингулярных уравнений соболевского типа можно найти, например, в [4]. Нелокальные задачи

для уравнения (1.1), вообще говоря, не являются корректными, но необходимость решать некорректные задачи в настоящее время является общепризнанной (см. введение в книге [5] и имеющуюся в ней обширную библиографию). Ряд результатов посвященных нелокальным задачам для абстрактных уравнений первого порядка получен ранее в [6]–[8], а для сингулярных уравнений второго порядка, но при более жестких чем в настоящей работе условиях на оператор A – в [9]–[11]. Нелокальные задачи для уравнений в частных производных, содержащих дифференциальный оператор Бесселя по пространственной переменной, изучались в [12]–[15].

Мы приведем достаточные условия однозначной разрешимости различных нелокальных задач для сингулярного уравнения (1.1) на конечном интервале $[0, 1]$. Отличительной особенностью настоящей работы является установление связи между решениями нелокальных задач и соответствующими решениями граничных задач.

2. Случай $k \geq 0$, условие Неймана при $t = 0$. Пусть $k \geq 0$. Рассмотрим задачу определения функции

$$u(t) \in C^1([0, 1], E) \cap C^2((0, 1], E),$$

принадлежащей вместе со своими производными области $D = D(A) \cap D(B)$ при $t \in (0, 1)$, удовлетворяющей уравнению (1.1) и граничному условию Неймана при $t = 0$

$$u'(0) = 0, \quad (2.1)$$

а также нелокальному условию вида

$$\lim_{t \rightarrow 1} I_{0+;2,\eta}^\alpha u(t) = u_0,$$

где $\eta = (k - 1)/2$, $\alpha > 0$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера и $I_{0+;2,\eta}^\alpha$ – оператор Эрдейи–Кобера, определяемый равенством (см. [16; с. 246])

$$I_{0+;2,\eta}^\alpha u(t) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)t^{2(\alpha+\eta)}} \int_0^t s^{2\eta+1}(t^2 - s^2)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

Это нелокальное условие в развернутой записи имеет вид

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^k (1 - t^2)^{\alpha-1} u(t) dt = u_0. \quad (2.2)$$

Отметим, что частный случай нелокального условия (2.2) при $\alpha = 1$ и по пространственной переменной встречался ранее в работах [1], [12].

В дальнейшем неоднократно мы будем использовать функцию

$$Y_k(t; \lambda) = \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{t\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2-k/2} I_{k/2-1/2}(t\sqrt{\lambda}), \quad (2.3)$$

где $I_\nu(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя. Функция $Y_k(t; \lambda)$ является решением скалярного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (случай $B = I$, $A = \lambda I$ в уравнении (1.1)) и, кроме того, $Y_k(0; \lambda) = 1$, $Y'_k(0; \lambda) = 0$.

Для задачи (1.1), (2.1), (2.2) в [17] доказан следующий критерий единственности решения нелокальной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k \geq 0$, $\alpha > 0$ и A, B – линейные замкнутые операторы в E . Предположим, что нелокальная задача (1.1), (2.1), (2.2) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни при каком $\lambda_m = \lambda_m(k, \alpha)$, $m \in \mathbb{N}$, являющимся нулем задаваемой равенством (2.3) функции $\Upsilon_{k,\alpha}(\lambda) = Y_{k+2\alpha}(1; \lambda)$, операторное уравнение

$$Ah = \lambda Bh \quad (2.4)$$

не имело бы ненулевого решения h .

При установлении разрешимости нелокальной задачи (1.1), (2.1), (2.2) мы будем использовать установленное в [18] и приводимое далее утверждение об однозначной разрешимости некоторой граничной задачи.

Обозначим через $\rho(B, A)$ множество $\mu \in \mathbb{C}$ таких, что существует ограниченный обратный $(\mu B - A)^{-1}$ и это множество будем называть резольвентным множеством оператора A относительно B .

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что $k \geq 0$, $u_1 \in D(A^2) \cap D(B)$, A, B – линейные замкнутые коммутирующие на элементах из $D(A^2) \cap D(B)$ операторы. Пусть также для всех $n \in \mathbb{N}$ нули ξ_n , определяемой равенством (2.3) функции $Y_k(1; \lambda)$, принадлежат резольвентному множеству $\rho(B, A)$ оператора A относительно B и выполнена оценка

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n| \cdot \|(\xi_n B - A)^{-1}\| < M_0 < \infty.$$

Тогда граничная задача

$$B \left(u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) \right) = Au(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^k u'(t) = 0, \quad u(1) = u_1,$$

однозначно разрешима, ее решение имеет вид

$$u_k(t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_k(t; \xi_n)}{Y'_k(1; \xi_n)} \xi_n B (\xi_n B - A)^{-1} u_1, \quad (2.5)$$

и, более того, $u'_k(0) = 0$.

Пусть для задачи (1.1), (2.1), (2.2) выполнены условия теоремы 1 о единственности решения нелокальной задачи и, кроме того, для значения параметра $k + 2\alpha$ сингулярного уравнения (1.1) справедливы условия установленной в [18] теоремы 2, в которой требуется выполнение условия коммутативности операторов A и B , а также соответствующая оценка обратного оператора $(\mu B - A)^{-1}$.

При выполнении указанных условий существует единственное решение $u_{k+2\alpha}(t)$ граничной задачи

$$B \left(u''(t) + \frac{k+2\alpha}{t} u'(t) \right) = Au(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^{k+2\alpha} u'(t) = 0, \quad u(1) = u_1, \quad (2.6)$$

определяемое равенством (2.5) после замены в этом представлении параметра k на $k + 2\alpha$.

Используя (см., например, [19], [20]) операторы движения решения по параметру

$$\Phi_k u(t) = t^{k-1} u(t), \quad I_{t^2}^\alpha u(t) = \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\alpha u(t),$$

где для дробного $\alpha > 0$ (см. [16; с. 248])

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\alpha u(t) &= \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\{\alpha\}-1} u(t) \\ &= \frac{2^{\{\alpha\}}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \int_0^t \tau (t^2 - \tau^2)^{-\{\alpha\}} u(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.7)$$

по решению $u_{k+2\alpha}(t)$ граничной задачи (2.6) построим следующее решение уравнения (1.1):

$$u_k(t) = t^{1-k} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\alpha (t^{k+2\alpha-1} u_{k+2\alpha}(t)), \quad (2.8)$$

и покажем, что это решение $u_k(t)$ удовлетворяет нужным нам условиям (2.1), (2.2).

Вначале будем предполагать, что $\alpha \in \mathbb{N}$. Отметим, что возможность дифференцирования функции $u_{k+2\alpha}(t)$ можно обеспечить дополнительным требованием принадлежности определяющего это решение элемента u_1 множеству $D(A^{2+\alpha}) \cap D(B)$.

Решение уравнения (1.1) $u_k(t)$ удовлетворяет условию (2.1), поскольку это решение можно записать в виде

$$u_k(t) = c_1 u_{k+2\alpha}(t) + c_2 t^2 u'_{k+2\alpha}(t) + \dots$$

с некоторыми постоянными $c_1, c_2, \dots$ и при этом, как следует из представления (2.5), $u'_{k+2\alpha}(0) = 0$.

Проверим далее справедливость условия (2.2) для этого же решения. Подставим $u_k(t)$ в левую часть условия (2.2) и после интегрирования по частям будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^k (1-t^2)^{\alpha-1} u_k(t) dt &= \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t (1-t^2)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\alpha t^{k+2\alpha-1} u_{k+2\alpha}(t) dt \\ &= \frac{2^2}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 t (1-t^2)^{\alpha-2} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\alpha-1} t^{k+2\alpha-1} u_{k+2\alpha}(t) dt = \dots \\ &= \frac{2^\alpha}{\Gamma(1)} \int_0^1 t \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right) t^{k+2\alpha-1} u_{k+2\alpha}(t) dt = 2^\alpha u_{k+2\alpha}(1) = 2^\alpha u_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если в граничной задаче (2.6) выбрать u_1 так, чтобы $2^\alpha u_1 = u_0$, то в силу равенства (2.9) решение уравнения (1.1) $u_k(t)$ будет удовлетворять и условию (2.2).

Пусть теперь $\alpha > 0$, $\{\alpha\} > 0$ и в задаче (2.6) $u_1 \in D(A^{3+[\alpha]}) \cap D(B)$. Используя определяемое равенством (2.7) понятие дробной степени операции весового дифференцирования, функцию $u_k(t)$ запишем в виде

$$\begin{aligned} u_k(t) &= t^{1-k} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\alpha t^{k+2\alpha-1} u_{k+2\alpha}(t) \\ &= t^{1-k} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int_0^t (t^2 - \tau^2)^{-\{\alpha\}} \tau^{k+2\alpha} u_{k+2\alpha}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{1-\alpha} t^{1-k}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \left(t^{2[\alpha]+k+1} \int_0^1 (1-s^2)^{-\{\alpha\}} s^{k+2\alpha} u_{k+2\alpha}(ts) ds \right) \\
&= d_1 \int_0^1 (1-s^2)^{-\{\alpha\}} s^{k+2\alpha} u_{k+2\alpha}(ts) ds \\
&\quad + d_2 t^2 \int_0^1 (1-s^2)^{-\{\alpha\}} s^{k+2\alpha} u'_{k+2\alpha}(ts) ds + \dots
\end{aligned}$$

с некоторыми постоянными $d_1, d_2, \dots$, и при этом $u'_{k+2\alpha}(0) = 0$. Следовательно, и в этом случае решение уравнения (1.1) $u_k(t)$ удовлетворяет условию (2.1).

Проверим теперь справедливость условия (2.2) для этого же решения. Подставим $u_k(t)$ в левую часть условия (2.2) и, используя дробные интеграл I_{0+}^α и производную D_{0+}^α в форме Римана-Лиувилля [16; с. 41], а также формулу (2.60) из [16; теорема 2.4] о действии операции дробного интегрирования на операцию дифференцирования, будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^k (1-\tau^2)^{\alpha-1} u_k(\tau) d\tau &= \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau (1-\tau^2)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} \right)^\alpha \tau^{k+2\alpha-1} u_{k+2\alpha}(\tau) d\tau \\
&= \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left(\frac{d}{ds} \right)^\alpha s^{k/2-1/2+\alpha} u_{k+2\alpha}(\sqrt{s}) ds \\
&= 2^\alpha I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha (s^{k/2-1/2+\alpha} u_{k+2\alpha}(\sqrt{s})) \Big|_{s=1} = 2^\alpha u_{k+2\alpha}(1) = 2^\alpha u_1.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

При этом мы учли, что все входящие в формулу (2.60) из [16] слагаемые, которые вычисляются в точке $t = 0$, обращаются в нуль.

Если в граничной задаче (2.6) выбрать u_1 так, чтобы $2^\alpha u_1 = u_0$, то в силу равенства (2.10) решение уравнения (1.1) $u_k(t)$ будет удовлетворять и условию (2.2).

Таким образом, при любых $\alpha > 0$ решение задачи (1.1), (2.1), (2.2) единственно и имеет вид

$$u_k(t) = -\frac{t^{1-k}}{2^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{k+2\alpha-1} Y_{k+2\alpha}(t; \lambda_n)}{Y'_{k+2\alpha}(1; \lambda_n)} \lambda_n B(\lambda_n B - A)^{-1} u_0, \tag{2.11}$$

где $\lambda_n = \lambda_n(k, \alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ — нули задаваемой равенством (2.3) функции $\Upsilon_{k,\alpha}(\lambda) = Y_{k+2\alpha}(1; \lambda)$, $u_0 \in D_\alpha$, $D_\alpha = D(A^{2+\alpha}) \cap D(B)$ при $\alpha \in \mathbb{N}$ и $D_\alpha = D(A^{3+[\alpha]}) \cap D(B)$ при остальных $\alpha > 0$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим $k \geq 0$, $\alpha > 0$, $u_0 \in D_\alpha$, A, B — линейные замкнутые коммутирующие на элементах из D_α операторы. Пусть также для всех $n \in \mathbb{N}$ нули $\lambda_n = \lambda_n(k, \alpha)$, определяемой равенством (2.3) функции $\Upsilon_{k,\alpha}(\lambda) = Y_{k+2\alpha}(1; \lambda)$, принадлежат резольвентному множеству $\rho(B, A)$ оператора A относительно B и выполнена оценка*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| \cdot \|(\lambda_n B - A)^{-1}\| < M_0 < \infty. \tag{2.12}$$

Тогда нелокальная задача (1.1), (2.1), (2.2) однозначно разрешима и ее решение $u_k(t)$ определяется равенством (2.11).

Отметим, что ранее в статье [9] соответствующая теорема об однозначной разрешимости задачи (1.1), (2.1), (2.2) была установлена другим методом при $B = I$ и более жестких чем в настоящей работе условиях на оператор A .

ПРИМЕР 1. Пусть в уравнении (1.1) $B = I$, а оператор $-A$ является генератором операторной косинус-функции $C(t; -A)$ экспоненциального роста ω , для резольвенты которого, как известно, справедлива оценка (2.12). Тогда в случае, если в задаче (1.1), (2.1), (2.2) параметры удовлетворяют условиям $0 \leq k < 2$, $\alpha = 1 - k/2$, $k + 2\alpha = 2$, то решение граничной задачи (2.6) имеет вид (см. пример 2 [18])

$$u_2(t) = \frac{\sin \pi t}{t} \int_0^\infty \frac{C(s; -A)u_1 ds}{\operatorname{ch} \pi s + \cos \pi t}, \quad \omega < \pi.$$

Далее для $u_0 \in D(A^3)$ по формуле (2.8) запишем решение нелокальной задачи (1.1), (2.1), (2.2)

$$\begin{aligned} u_k(t) &= t^{1-k} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{1-k/2} (tu_2(t)) \\ &= 2^{k/2-1} t^{1-k} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{1-k/2} \left(\sin \pi t \int_0^\infty \frac{C(s; -A)u_0 ds}{\operatorname{ch} \pi s + \cos \pi t} \right). \end{aligned}$$

В частности, при $k = 0$ получим

$$u_0(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sin \pi t \int_0^\infty \frac{C(s; -A)u_0 ds}{\operatorname{ch} \pi s + \cos \pi t} \right).$$

Если в задаче (1.1), (2.1), (2.2) $0 < k < 2$, $\alpha = 1 - k/2 < 1$, то, в силу (2.7) решение нелокальной задачи (1.1), (2.1), (2.2) будет иметь вид

$$u_k(t) = \frac{1}{\Gamma(k/2)t^k} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \tau(t^2 - \tau^2)^{k/2-1} \sin \pi \tau \int_0^\infty \frac{C(s; -A)u_1 ds}{\operatorname{ch} \pi s + \cos \pi \tau} d\tau \right).$$

ПРИМЕР 2. Предположим, что в задаче (1.1) оператор A является умножением на скаляр $A < 0$ и $B = 1$. Тогда в случае, если в задаче (1.1), (2.1), (2.2) параметры удовлетворяют условиям $k \geq 0$, $\alpha > 0$, то, опять таки, в силу примера 2 [18] решение граничной задачи (2.6) имеет вид

$$u_{k+2\alpha}(t) = \frac{t^{1/2-k/2-\alpha} J_{k/2-1/2+\alpha}(t\sqrt{-A})u_0}{2^\alpha J_{k/1-1/2+\alpha}(\sqrt{-A})}.$$

Если $\{\alpha\} > 0$, то, учитывая (2.7), по формуле (2.8) решение нелокальной задачи (1.1), (2.1), (2.2) представимо в виде

$$\begin{aligned} u_k(t) &= t^{1-k} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\alpha (t^{k-1+2\alpha} u_{k+2\alpha}(t)) \\ &= \frac{t^{1-k}}{2^\alpha J_{k/1-1/2+\alpha}(\sqrt{-A})u_0} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\alpha (t^{k/2-1/2+\alpha} J_{k/2-1/2+\alpha}(t\sqrt{-A})) \\ &= \frac{2^{-\alpha} t^{1-k} u_0}{\Gamma(1 - \{\alpha\}) J_{k/2-1/2+\alpha}(\sqrt{-A})} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \int_0^t \tau^{k/2+1/2+\alpha} (t^2 - \tau^2)^{-\{\alpha\}} J_{k/2-1/2+\alpha}(t\sqrt{-A}) d\tau. \end{aligned}$$

Последний интеграл вычисляется (см. 2.12.4.6 [21]), поэтому

$$u_k(t) = \frac{t^{1/2-k/2}(\sqrt{-A})^\alpha J_{k/2-1/2}(t\sqrt{-A})u_0}{2^\alpha J_{k/2-1/2+\alpha}(\sqrt{-A})}.$$

Нетрудно проверить, что в случае $\{\alpha\} = 0$ для решения $u_k(t)$ имеет место это же представление. Заметим, что в справедливости нелокального условия (2.2) для функции $u_k(t)$ легко убедиться, используя интеграл 2.12.4.6 [21].

В частности, если $k = 1$, $\alpha = 1/2$, то решение нелокальной задачи (1.1), (2.1), (2.2) имеет вид

$$u_1(t) = \frac{\sqrt{-\pi A}}{2 \sin(\sqrt{-A})} J_0(t\sqrt{-A}) u_0.$$

3. Случай $k < 1$, условие Дирихле при $t = 0$. Пусть $k < 1$. Рассмотрим задачу определения функции

$$u(t) \in C([0, 1], E) \cap C^2((0, 1], E),$$

принадлежащей вместе со своими производными области $D = D(A) \cap D(B)$ при $t \in (0, 1)$, удовлетворяющей уравнению (1.1), граничному условию Дирихле при $t = 0$

$$u(0) = 0, \quad (3.1)$$

а также нелокальному условию вида

$$\frac{2}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t(1-t^2)^{\beta-1} u(t) dt = u_0, \quad \beta > 0 \quad (3.2)$$

или, используя оператор Эрдейи–Кобера,

$$\lim_{t \rightarrow 1} I_{0+;2,0}^\beta u(t) = u_0.$$

Для задачи (1.1), (3.1), (3.2) в [17] доказан приводимый далее критерий единственности решения нелокальной задачи.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $k < 1$, $\beta > 0$ и A, B – линейные замкнутые операторы в E . Предположим, что нелокальная задача (1.1), (3.1), (3.2) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни при каком $\lambda_m = \lambda_m(k, \beta)$, $m \in \mathbb{N}$, являющимся нулем функции $\Psi_{k,\beta}(\lambda) = Y_{2\beta+2-k}(1; \lambda)$, где функция $Y_{2\beta+2-k}(t; \lambda)$ задается равенством (2.3), операторное уравнение (2.4) не имело бы ненулевого решения h .

При установлении разрешимости нелокальной задачи (1.1), (3.1), (3.2) мы также будем использовать установленное в [18] утверждение об однозначной разрешимости некоторой граничной задачи.

ТЕОРЕМА 5. Предположим $k < 1$, $u_1 \in D(A^2) \cap D(B)$, A, B – линейные замкнутые коммутирующие на элементах из $D(A^2) \cap D(B)$ операторы. Пусть также для всех $n \in \mathbb{N}$ нули η_n , определяемой равенством (2.3) функции $Y_{2-k}(1; \lambda)$, принадлежат резольвентному множеству $\rho(B, A)$ оператора A относительно B и выполнена оценка

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\eta_n| \cdot \|(\eta_n B - A)^{-1}\| < M_0 < \infty.$$

Тогда граничная задача

$$B\left(u''(t) + \frac{k}{t}u'(t)\right) = Au(t), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = u_1$$

однозначно разрешима, ее решение имеет вид

$$u_k(t) = -2t^{1-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{2-k}(t; \eta_n)}{Y'_{2-k}(1; \eta_n)} \eta_n B(\eta_n B - A)^{-1} u_1. \quad (3.3)$$

Пусть для задачи (1.1), (3.1), (3.2) выполнены условия теоремы 4 о единственности решения нелокальной задачи и, кроме того, для значения параметра $k - 2\beta$ сингулярного уравнения (1.1) выполнены условия теоремы 5, тогда существует единственное решение $u_{k-2\beta}(t)$ граничной задачи

$$B\left(u''(t) + \frac{k-2\beta}{t}u'(t)\right) = Au(t), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = u_1, \quad (3.4)$$

определяемое равенством (3.3) после замены в этом представлении параметра k на $k - 2\beta$.

Будем предполагать, что $\beta \in \mathbb{N}$. Подобно тому, как это было сделано в п. 2, используя оператор движения решения по параметру, по решению $u_{k-2\beta}(t)$ граничной задачи (3.4) построим решение уравнения (1.1) в виде

$$u_k(t) = \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{\beta} u_{k-2\beta}(t), \quad (3.5)$$

и покажем, что это решение $u_k(t)$ удовлетворяет нужным нам условиям (3.1), (3.2).

Решение уравнения (1.1) $u_k(t)$ удовлетворяет условию (3.1) поскольку это решение можно записать в виде

$$u_k(t) = c_1 t^{1-k} u_{k-2\beta}(t) + c_2 t^{3-k} u'_{k-2\beta}(t) + \dots$$

с некоторыми постоянными $c_1, c_2, \dots$.

Проверим далее справедливость условия (3.2) для этого же решения. Подставим $u_k(t)$ в левую часть условия (3.2) и аналогично (2.9) после интегрирования по частям будем иметь

$$\frac{2}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t(1-t^2)^{\beta-1} u_k(t) dt = \frac{2}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t(1-t^2)^{\beta-1} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{\beta} u_{k-2\beta}(t) dt = 2^{\beta} u_1. \quad (3.6)$$

Выбирая в граничной задаче (3.4) u_1 так, чтобы $2^{\beta} u_1 = u_0$, в силу равенства (3.6) установим справедливость условия (3.2).

Пусть теперь $\beta > 0$, $\{\beta\} > 0$ и в задаче (3.4) $u_1 \in D(A^{3+[\beta]}) \cap D(B)$. Тогда определяемую равенством (3.5) функцию $u_k(t)$ запишем в виде

$$u_k(t) = \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{\beta} (t^{1-k+2\beta} v_{k-2\beta}(t)),$$

где

$$v_k(t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{2\beta+2-k}(t; \lambda_n)}{Y'_{2\beta+2-k}(1; \lambda_n)} \lambda_n B(\lambda_n B - A)^{-1} u_1,$$

$\lambda_n = \lambda_n(k, \beta)$ – нули, определяемой равенством (2.3) функции $\Psi_{k,\beta}(\lambda) = Y_{k-2\beta}(1; \lambda)$.

После чего дальнейшая проверка справедливости условий (3.1), (3.2) проводится подобно тому, как это было сделано в п. 2 для случая дробного α .

Таким образом, можно утверждать, что в случае $\beta > 0$ решение задачи (1.1), (3.1), (3.2) единственно и имеет вид

$$u_k(t) = -\frac{1}{2^{\beta-1}} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{1-k+2\beta} Y_{2\beta+2-k}(t; \lambda_n)}{Y'_{2\beta+2-k}(1; \lambda_n)} \lambda_n B(\lambda_n B - A)^{-1} u_0, \quad (3.7)$$

где $u_0 \in D_{\beta}$, $D_{\beta} = D(A^{2+\beta}) \cap D(B)$ при $\beta \in \mathbb{N}$ и $D_{\beta} = D(A^{3+[\beta]}) \cap D(B)$ при остальных $\beta > 0$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $k < 1$, $\beta > 0$, $u_0 \in D_{\beta}$, A, B – линейные замкнутые коммутирующие на элементах из D_{β} операторы в E . Пусть также для всех $n \in \mathbb{N}$ нули $\lambda_n = \lambda_n(k, \beta)$, определяемой равенством (2.3) функции $\Psi_{k,\beta}(\lambda) = Y_{2\beta+2-k}(1; \lambda)$, принадлежат резольвентному множеству $\rho(B, A)$ оператора A относительно B и выполнена оценка

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| \cdot \|(\lambda_n B - A)^{-1}\| < M_0 < \infty. \quad (3.8)$$

Тогда нелокальная задача (1.1), (3.1), (3.2) однозначно разрешима и ее решение $u_k(t)$ определяется равенством (3.7).

ПРИМЕР 3. Пусть в уравнении (1.1) $B = I$, а оператор $-A$ является генератором операторной косинус-функции $C(t; -A)$ экспоненциального роста ω , для резольвенты которого, как известно, справедлива оценка (3.8). Тогда в случае, если в задаче (1.1), (3.1), (3.2) параметры удовлетворяют условиям $0 < k < 1$, $\beta = k/2$, $k - 2\beta = 0$, то решение граничной задачи (3.4) имеет вид (см. пример 1 [18])

$$u_0(t) = \frac{\sin \pi t}{2^{\beta}} \int_0^{\infty} \frac{C(s; -A) u_0 ds}{\operatorname{ch} \pi s + \cos \pi t}, \quad \omega < \pi.$$

Далее для $u_0 \in D(A^3)$, учитывая (2.7), по формуле (3.5) получим решение нелокальной задачи (1.1), (3.1), (3.2) в виде

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{k/2} u_0(t) = \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{k/2} \frac{\sin \pi t}{2^{k/2}} \int_0^{\infty} \frac{C(s; -A) u_0 ds}{\operatorname{ch} \pi s + \cos \pi t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(k/2)t} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \tau (t^2 - \tau^2)^{k/2-1} \sin \pi \tau \int_0^{\infty} \frac{C(s; -A) u_0 ds}{\operatorname{ch} \pi s + \cos \pi \tau} d\tau \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Пусть в уравнении (1.1) оператор A является умножением на скаляр $A < 0$ и $B = 1$. Тогда в случае, если в задаче (1.1), (3.1), (3.2) параметры удовлетворяют условиям $k < 1$, $\beta > 0$, то в силу примера 1 [18] запишем решение граничной задачи (3.4)

$$u_{k-2\beta}(t) = \frac{t^{1/2-k/2+\beta} J_{1/2-k/2+\beta}(t\sqrt{-A})}{2^{\beta} J_{1/2-k/2+\beta}(\sqrt{-A})} u_0.$$

Пусть $\{\beta\} > 0$, учитывая (2.7), по формуле (3.5) получим решение нелокальной задачи (1.1), (3.1), (3.2) в виде

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^\beta u_{k-2\beta}(t) = \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^\beta \frac{t^{1/2-k/2+\beta} J_{1/2-k/2+\beta}(t\sqrt{-A})}{2^\beta J_{1/2-k/2+\beta}(\sqrt{-A})} u_0 \\ &= \frac{2^{-[\beta]} u_0}{\Gamma(1 - \{\beta\}) J_{1/2-k/2+\beta}(\sqrt{-A})} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{[\beta]+1} \int_0^t \tau^{3/2-k/2+\beta} (t^2 - \tau^2)^{-\{\beta\}} J_{1/2-k/2+\beta}(t\sqrt{-A}) d\tau. \end{aligned}$$

Последний интеграл вычисляется (см. 2.12.4.6 [21]), поэтому

$$u_k(t) = \frac{t^{1/2-k/2} (\sqrt{-A})^\beta J_{1/2-k/2}(t\sqrt{-A}) u_0}{2^\beta J_{1/2-k/2+\beta}(\sqrt{-A})}.$$

Нетрудно проверить, что в случае $\{\beta\} = 0$ для решения $u_k(t)$ имеет место это же представление. Отметим, что в справедливости нелокального условия (3.2) для функции $u_k(t)$ можно убедиться, используя интеграл 2.12.4.6 [21].

В частности, при $k = 0$ решение нелокальной задачи (1.1), (3.1), (3.2) имеет вид

$$u_0(t) = \frac{(\sqrt{-A})^{\beta-1/4} \sin(t\sqrt{-A}) u_0}{2^{\beta-1/2} \sqrt{\pi} J_{\beta+1/2}(\sqrt{-A})}.$$

4. Нелокальное условие второго рода. Случай $k \geq 0$, условие Неймана при $t = 0$. Вместо нелокального условия (2.2) для уравнения (1.1) зададим условие вида

$$a \int_0^1 t^k u(t) dt + bu'(1) = u_0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0. \quad (4.1)$$

Такого вида нелокальное условие для уравнений в частных производных встречалось ранее в [13], [14]. В этом пункте мы установим соответствующие теоремы о разрешимости задачи (1.1), (2.1), (4.1). Для этой задачи в [17] доказан следующий критерий единственности решения.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $k \geq 0$ и A, B – линейные замкнутые операторы в E . Предположим, что нелокальная задача (1.1), (2.1), (4.1) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, а случае $u(t) \in C^3((0, 1], D)$, и достаточно, чтобы ни при каком λ_m , $m \in \mathbb{N}_0$, являющемся нулем функции $\Phi_{k,a,b}(\lambda) = (a + b\lambda)Y_{k+2}(1; \lambda)$, где функция $Y_{k+2}(t; \lambda)$ задается равенством (2.3), операторное уравнение (2.4) не имело бы ненулевого решения.

Пусть для задачи (1.1), (2.1), (4.1) выполнены условия теоремы 7 о единственности решения нелокальной задачи и, кроме того, для значения параметра $k + 2$ сингулярного уравнения (1.1) выполнены условия теоремы 2. Тогда существует единственное решение $u_{k+2}(t)$ граничной задачи (2.6) при $\alpha = 1$, определяемое равенством (2.5) после замены в этом представлении параметра k на $k + 2$. Отметим, что факт отсутствия ненулевого решения уравнения (2.4) при $\lambda = -a/b$ пока не используется. Он будет учтен в дальнейшем.

Также как и при доказательстве теоремы 3 по решению $u_{k+2}(t)$ граничной задачи (2.6) построим следующее решение уравнения (1.1)

$$u_k(t) = t^{-k} \frac{d}{dt} (t^{k+1} u_{k+2}(t)). \quad (4.2)$$

Как и прежде, это решение удовлетворяет условию (2.1). Покажем, что решение $u_k(t)$ удовлетворяет и условию (4.1). Подставив $u_k(t)$ в левую часть условия (4.1), получим

$$a \int_0^1 t^k u_k(t) dt + b u'_k(1) = a \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^{k+1} u_{k+2}(t)) dt + b u'_k(1) = a u_1 + b u'_k(1),$$

и нелокальное условие (4.1) будет выполнено, если граничное значение u_1 в задаче (2.6) удовлетворяет равенству

$$a u_1 + b u'_k(1) = u_0.$$

Поскольку в силу формулы (4.2)

$$B u'_k(t) = B((k+2)u'_{k+2}(t) + t u''_{k+2}(t)) = t B \left(u''_{k+2}(t) + \frac{k+2}{t} u'_{k+2}(t) \right) = t A u_{k+2}(t),$$

то в граничной задаче (2.6) значение u_1 следует выбрать так, чтобы

$$(aB + bA)u_1 = B u_0.$$

Возможность такого выбора можно обеспечить обратимостью оператора $aB + bA$, потребовав принадлежность числа $\lambda = -a/b$ резольвентному множеству $\rho(B, A)$, и тогда $u_1 = (aB + bA)^{-1} B u_0$.

Таким образом, решение задачи (1.1), (2.1), (4.1) единственно и имеет вид

$$u_k(t) = t^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{k+1} Y_{k+2}(t; \lambda_n)}{Y'_{k+2}(1; \lambda_n)} \lambda_n B^2 (\lambda_n B - A)^{-1} (aB + bA)^{-1} u_0, \quad (4.3)$$

где $u_0 \in D(A^3) \cap D(B^2)$, λ_n , $n \in \mathbb{N}$, — нули задаваемой равенством (2.3) функции $\Phi_{k,a,b}(\lambda) = (a + b\lambda)Y_{k+2}(1; \lambda)$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 8. *Предположим $k \geq 0$, $u_0 \in D(A^3) \cap D(B^2)$, A, B — линейные замкнутые коммутирующие на элементах из $D(A^3) \cap D(B^2)$ операторы. Пусть также для всех $n \in \mathbb{N}$ нули λ_n , определяемой равенством (2.3) функции $\Phi_{k,a,b}(\lambda) = (a + b\lambda)Y_{k+2}(1; \lambda)$, принадлежат резольвентному множеству $\rho(B, A)$ оператора A относительно B и выполнена оценка*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| \cdot \|(\lambda_n B - A)^{-1}\| < M_0 < \infty. \quad (4.4)$$

Тогда нелокальная задача (1.1), (2.1), (4.1) однозначно разрешима и ее решение $u_k(t)$ определяется равенством (4.3).

ПРИМЕР 5. Пусть в задаче (1.1), (2.1), (4.1) $k = 0$, $-a/b \in \rho(A)$, $B = I$, и оператор $-A$ является генератором операторной косинус-функции $C(t; -A)$ экспоненциального роста ω , для резольвенты которого, как известно, справедлива оценка (4.4). Тогда по формуле (4.2) решение нелокальной задачи (1.1), (2.1), (4.1) имеет вид

$$u_0(t) = \frac{d}{dt}(tu_2(t)),$$

где $u_2(t)$ определено в примере 1, и, следовательно,

$$u_0(t) = \frac{d}{dt} \left(\sin \pi t \int_0^\infty \frac{C(s; -A)(aI + bA)^{-1}u_0 ds}{\operatorname{ch} \pi s + \cos \pi t} \right).$$

ПРИМЕР 6. Пусть в уравнении (1.1) оператор A является умножением на скаляр $A < 0$ и $B = 1$. Тогда в случае, если в задаче (1.1), (2.1), (4.1) параметры удовлетворяют условиям $k \geq 0$, $a + bA \neq 0$, то в силу примера 2 решение граничной задачи (2.6) имеет вид

$$u_{k+2}(t) = \frac{t^{-1/2-k/2} J_{k/2+1/2}(t\sqrt{-A})(a + bA)^{-1}u_0}{J_{k/1+1/2}(\sqrt{-A})},$$

и по формуле (4.2) решение нелокальной задачи (1.1), (2.1), (4.1) определено равенством

$$u_k(t) = t^{1-k} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right) (t^{k+1} u_{k+2}(t)) = \frac{t^{1/2-k/2} \sqrt{-A} J_{k/2-1/2}(t\sqrt{-A}) u_0}{(a + bA) J_{k/2+1/2}(\sqrt{-A})}.$$

В частности, при $k = 0$ имеем представление

$$u_0(t) = \frac{\sqrt{-A} \cos(t\sqrt{-A}) u_0}{(a + bA) \sin(\sqrt{-A})}.$$

5. Нелокальное условие второго рода. Случай $k < 1$, условие Дирихле при $t = 0$. Пусть $k < 1$. В этом случае для уравнения (1.1) вместо нелокального условия второго рода (4.1) следует задавать условие вида

$$a \int_0^1 tu(t) dt + b \lim_{t \rightarrow 1} (t^{k-1} u(t))' = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0. \quad (5.1)$$

Для задачи (1.1), (3.1), (5.1) в [17] доказан следующий критерий единственности решения.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $k < 1$ и A, B – линейные замкнутые операторы в E . Предположим, что нелокальная задача (1.1), (3.1), (5.1) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, а случае $u(t) \in C^3((0, 1], D)$, и достаточно, чтобы ни при каком λ_m , $m \in \mathbb{N}_0$, являющимся нулем функции $\Theta_{k,a,b}(\lambda) = (a + b\lambda)Y_{4-k}(1; \lambda)$, где функция $Y_{4-k}(t; \lambda)$ задается равенством (2.3), операторное уравнение (2.4) не имело бы ненулевого решения.

Пусть для задачи (1.1), (3.1), (5.1) выполнены условия теоремы 9 о единственности решения нелокальной задачи и, кроме того, для значения параметра $k - 2$ сингулярного уравнения (1.1) выполнены условия теоремы 5. Тогда существует единственное решение $u_{k-2}(t)$ граничной задачи (3.4) при $\beta = 1$, определяемое равенством (3.3) после замены в этом представлении параметра k на $k - 2$. Факт отсутствия ненулевого решения уравнения (2.4) при $\lambda = -a/b$ пока не используется. Он будет учтен в дальнейшем.

Также как и при доказательстве теоремы 6 по решению $u_{k-2}(t)$ граничной задачи (3.4) построим следующее решение уравнения (1.1):

$$u_k(t) = \frac{1}{t} u'_{k-2}(t). \quad (5.2)$$

Определяемое равенством (5.2) решение удовлетворяет условию (3.1). Покажем, что это решение $u_k(t)$ удовлетворяет и условию (5.1). Подставив $u_k(t)$ в левую часть условия (5.1), будем иметь

$$\begin{aligned} a \int_0^1 t u_k(t) dt + b \lim_{t \rightarrow 1} (t^{k-1} u(t))' &= a \int_0^1 u'_{k-2}(t) dt + b \lim_{t \rightarrow 1} (t^{k-2} u'_{k-2}(t))' \\ &= a u_1 + b \lim_{t \rightarrow 1} \left(u''_{k-2}(t) + \frac{k-2}{t} u'_{k-2}(t) \right), \end{aligned}$$

и, аналогично п. 4, нелокальное условие (5.1) будет выполнено, если граничное значение u_1 в задаче (3.4) удовлетворяет равенству

$$(aB + bA)u_1 = Bu_0.$$

Возможность такого выбора можно обеспечить обратимостью оператора $aB + bA$, потребовав принадлежность числа $\lambda = -a/b$ резольвентному множеству $\rho(B, A)$, и тогда $u_1 = (aB + bA)^{-1} Bu_0$.

Таким образом, решение задачи (1.1), (3.1), (5.1) единственно и имеет вид

$$u_k(t) = \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3-k} Y_{4-k}(t; \lambda_n)}{Y'_{4-k}(1; \lambda_n)} \lambda_n B^2 (\lambda_n B - A)^{-1} (aB + bA)^{-1} u_0, \quad (5.3)$$

где $u_0 \in D(A^4) \cap D(B^2)$, λ_n , $n \in \mathbb{N}$, – нули задаваемой равенством (2.3) функции $\Theta_{k,a,b}(\lambda) = (a + b\lambda)Y_{4-k}(1; \lambda)$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 10. *Предположим $k < 1$, $u_0 \in D(A^4) \cap D(B^2)$, A, B – линейные замкнутые коммутирующие на элементах из $D(A^4) \cap D(B^2)$ операторы. Пусть также для всех $n \in \mathbb{N}$ нули λ_n , определяемой равенством (2.3) функции $\Theta_{k,a,b}(\lambda) = (a + b\lambda)Y_{4-k}(1; \lambda)$, принадлежат резольвентному множеству $\rho(B, A)$ оператора A относительно B и выполнена оценка*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| \cdot \|(\lambda_n B - A)^{-1}\| < M_0 < \infty.$$

Тогда нелокальная задача (1.1), (3.1), (5.1) однозначно разрешима и ее решение $u_k(t)$ определяется равенством (5.3).

ПРИМЕР 7. Пусть в уравнении (1.1) оператор A является умножением на скаляр $A < 0$ и $B = 1$. Тогда в случае, если в задаче (1.1), (3.1), (5.1) параметры удовлетворяют условиям $k < 1$, $a + bA \neq 0$, то в силу примера 4 имеем решение граничной задачи (3.4)

$$u_{k-2}(t) = \frac{t^{3/2-k/2} J_{3/2-k/2}(t\sqrt{-A})(a+bA)^{-1}u_0}{J_{3/2-k/2}(\sqrt{-A})},$$

и по формуле (5.2) решение нелокальной задачи (1.1), (3.1), (5.1) имеет вид

$$u_k(t) = \frac{1}{t} u'_{k-2}(t) = \frac{t^{1/2-k/2} \sqrt{-A} J_{1/2-k/2}(t\sqrt{-A}) u_0}{(a+bA) J_{3/2-k/2}(\sqrt{-A})}.$$

В частности, при $k = 0$ имеем представление

$$u_0(t) = -\frac{A \sin(t\sqrt{-A}) u_0}{(a+bA)(\sin(\sqrt{-A}) - \sqrt{-A} \cos(\sqrt{-A}))}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. С. Пулькина, “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445.
- [2] А. В. Глушак, “Уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с фредгольмовым оператором при производных”, *Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика*, **36** (2014), 5–18.
- [3] А. В. Глушак, “Зависимость решений уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с фредгольмовым оператором при производных от коэффициентов уравнения”, *Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика*, **38** (2015), 18–22.
- [4] А. А. Замышляева, *Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка*, Издательский центр ЮУрГУ, Челябинск, 2012.
- [5] В. К. Иванов, И. В. Мельникова, А. И. Филинков, *Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи*, Физматлит, М., 1995.
- [6] И. В. Тихонов, “О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **34**:6 (1998), 841–843.
- [7] И. В. Тихонов, “Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 133–166.
- [8] Ю. Т. Сильченко, “Уравнение параболического типа с нелокальными условиями”, *Труды Четвертой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям* (Москва, 2005), СМФН, **17**, РУДН, М., 2006, 5–10.
- [9] А. В. Глушак, “Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу”, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, № 6, 27–35.
- [10] A. V. Glushak, N. O. Gordeeva, E. N. Manaeva, I. I. Palasheva, I. M. Primak, “Non-local problem for Malmsteen abstract equation”, *J. Eng. Applied Sci.*, **11**:4 (2016), 907–914.
- [11] А. В. Глушак, “Нелокальная задача для абстрактного уравнения Бесселя–Струве”, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, № 7, 29–38.
- [12] N. V. Zaitseva, “Keldysh type problem for B -hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind”, *Lobachevskii J. Math.*, **38**:1 (2017), 162–169.
- [13] К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева, “Начальная задача для B -гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода”, *Дифференц. уравнения*, **54**:1 (2018), 123–135.

- [14] К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева, “Вторая начально-граничная задача для B -гиперболического уравнения”, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, № 10, 75–86.
- [15] А. К. Уринов, М. С. Азизов, “О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, **32**:2 (2022), 240–255.
- [16] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [17] А. В. Глушак, “Критерий единственности решения нелокальных задач на конечном интервале для абстрактных сингулярных уравнений”, *Матем. заметки*, **111**:1 (2022), 24–38.
- [18] A. V. Glushak, “On the solvability of boundary value problems for an abstract singular equations on a finite interval”, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:8 (2023), 3298–3308.
- [19] А. В. Глушак, В. И. Кононенко, С. Д. Шмулевич, “Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 6, 55–56.
- [20] A. V. Glushak, “A family of singular differential equations”, *Lobachevskii J. Math.*, **41**:5 (2020), 763–771.
- [21] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983.

А. В. Глушак

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет
E-mail: aleglu@mail.ru

Поступило

09.10.2023

После доработки

29.01.2024

Принято к публикации

08.02.2024