

Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка с двойным вырождением

Архипов В. П.¹, Глушак А. В.²

¹ Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsuedu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих вырождение двух старших коэффициентов, находятся непрерывные вплоть до точки вырождения решения. Вид решения зависит не только от знака в точке вырождения коэффициента перед первой производной, но и от знака коэффициента свободного члена. Определены первые асимптотики этих решений. Приводятся примеры.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, двойное вырождение, первые асимптотики решений, задача Коши

Для цитирования: Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка с двойным вырождением. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):232–247.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-232-247 EDN ARVBVS

Original Research

Asymptotics of Solutions of Second-order Differential Equations with Double Degeneracy

Viktor P. Arkhipov¹, Alexander V. Glushak²

¹ Orel State University named after I. S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia
varhipov@inbox.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
Glushak@bsuedu.ru

Abstract. For ordinary linear differential equations of the second order, allowing degeneration of two leading coefficients, continuous up to the degeneration point solutions are found. The type of solution depends not only on the sign of the coefficient in front of the first derivative at the degeneracy point, but also on the sign of the coefficient of the free term. The first asymptotics of these solutions are determined. Examples are given.

Keywords: Degenerate Differential Equations, Double Degeneracy, First Asymptotics of Solutions, Cauchy Problem

For citation: Arkhipov VP., Glushak AV. Asymptotics of Solutions of Second-order Differential Equations with Double Degeneracy. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):232–247. (In Russ.) DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-232-247 EDN ARVBVS

1. Введение. Для линейных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами особенности решений могут возникать лишь в точках обращения старшего коэффициента в ноль. Такие особенности для уравнений второго порядка были довольно полно исследованы в работах [1, 2, 3, 4]. К такому виду также относятся классические уравнения Эйлера, предполагающие согласование порядка дифференцирования и скорости вырождения, кроме того, вырождающиеся дифференциальные уравнения, сводящиеся к уравнению Эйлера – Пуассона – Дарбу [5] и др. В отличие от [1, 2, 3, 4] настоящая статья посвящена рассмотрению вырождающихся дифференциальных уравнений, допускающих одновременное вырождение двух старших коэффициентов с произвольной скоростью. Частные случаи вырождающихся дифференциальных уравнений были исследованы в [6] для уравнений, допускающих факторизацию, т. е. представление в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка. Методы, разработанные в [6], применяются нами к вырождающимся дифференциальным уравнениям второго порядка, допускающим одновременное вырождение двух старших коэффициентов с произвольной скоростью. С помощью этих методов найдены явные формулы для решений, установлены их асимптотики вблизи точки вырождения, а также исследована разрешимость задачи Коши.

2. Вырождающееся дифференциальное уравнение первого порядка. На промежутке $[0, d]$, $d > 0$ рассмотрим вырождающееся дифференциальное уравнение первого порядка

$$Mu(t) \equiv p(t)u'(t) + q(t)u(t) = g(t), \quad (1)$$

где коэффициенты и правая часть $g(t)$ уравнения (1) — действительные функции, причём $p(t), q(t) \in C^\infty[0, d]$, $p(0) = 0$, $p(t) > 0$ для $t > 0$, $q(0) \neq 0$, $g(t) \in C^k[0, d]$ при $k \in \mathbb{N}_0$.

При $t > 0$ и $g(t) = 0$ решение однородного уравнения (1) имеет вид

$$u_0(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) \in C^\infty(0, d]. \quad (2)$$

На функциях из $C[0, d]$ при $q(0) > 0$ определим интегральный оператор

$$M_+^{-1}g(t) = \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau, \quad (3)$$

а при $q(0) < 0$ определим интегральный оператор другого вида

$$M_-^{-1}g(t) = -\int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(\int_t^\tau \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau. \quad (4)$$

Вводимые равенствами (3) и (4) операторы M_+^{-1} и M_-^{-1} являются обращающими для уравнения (1), при этом интеграл в (3) является несобственным. В дальнейшем для установления асимптотик решений весьма полезными являются приводимые в лемме 1 асимптотические соотношения.

Лемма 1. Пусть для некоторого $t_0 > 0$ функция $a(t) \in C^2[0, t_0]$, $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ при $t > 0$, функция $h(t) \in C^1[0, t_0]$, $h(t) > 0$ при $t \geq 0$, $a f(t) \neq 0$ при $t > 0$ и

$$f(t) \in C^1[0, t_0], \quad \frac{tf'(t)}{f(t)} = O(1) \text{ при } t \rightarrow 0+. \quad (5)$$

Если $a'(0) = 0$, то при $t \rightarrow 0+$ справедливы следующие асимптотические представления:

$$\int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = f(t) \frac{a(t)}{h(t)} (1 + o(1)), \quad (6)$$

$$\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = f(t) \frac{a(t)}{h(t)} (1 + o(1)). \quad (7)$$

Если же $a(t) = a_1 t(1 + o(1)) \in C^2[0, t_0]$, $a_1 > 0$, $h(t) = h_0(1 + o(1)) \in C^2[0, t_0]$, $h_0 > 0$ и $f(t) \in C[0, t_0]$, то при $t \rightarrow 0+$

$$\int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = \begin{cases} tO(1), & \text{если } \frac{h_0}{a_1} > 1, \\ t \ln t O(1) \rightarrow 0, & \text{если } \frac{h_0}{a_1} = 1, \\ t^{h_0/a_1} O(1), & \text{если } 0 < \frac{h_0}{a_1} < 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = tO(1). \quad (9)$$

Доказательство. Если выполнено условие (5), то справедливость представлений (6), (7) вытекает соответственно из предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds}{a(t)f(t)/h(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_t^{t_0} f(s) \exp\left(\int_s^t \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds}{a(t)f(t)/h(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right)} =$$

$$\begin{aligned}
& -f(t) \exp\left(\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right) \\
& = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{((a(t)f(t)/h(t))' - f(t)) \exp\left(\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right)}{\left(\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t h(\xi)/a(\xi) d\xi\right) ds\right)} = 1, \\
& \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t h(\xi)/a(\xi) d\xi\right) ds}{a(t)f(t)/h(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right) ds}{a(t)f(t)/h(t) \exp\left(-\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right)} = \\
& = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t) \exp\left(-\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right)}{((a(t)f(t)/h(t))' + f(t)) \exp\left(-\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right)} = 1.
\end{aligned}$$

А если $a(t) = a_1 t(1 + o(1)) \in C^2[0, t_0]$, $a_1 > 0$, то справедливость представлений (8), (9) следует соответственно из предельных соотношений

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = \int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{(h_0 + h_1 \xi + o(1)) d\xi}{a_1 \xi(1 + o(1))}\right) ds = \\
& = \int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\frac{h_0}{a_1} \int_t^s \left(\frac{1}{\xi} + O(1)\right) d\xi\right) ds = \int_t^{t_0} f(s) \left(\frac{s}{t}\right)^{-h_0/a_1} \exp(O(1)) ds = \\
& = \begin{cases} tO(1), & \text{если } \frac{h_0}{a_1} > 1, \\ t \ln t O(1) \rightarrow 0, & \text{если } \frac{h_0}{a_1} = 1, \\ t^{h_0/a_1} O(1), & \text{если } 0 < \frac{h_0}{a_1} < 1, \end{cases} \\
& \int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = \int_s^t f(s) \exp\left(-\int_s^t \frac{h_0(1 + o(1)) d\xi}{a_1 \xi(1 + o(1))}\right) ds = \\
& = \int_0^t f(s) \exp\left(-\frac{h_0}{a_1} \int_s^t \left(\frac{1}{\xi} + O(1)\right) d\xi\right) ds = \int_0^t f(s) \left(\frac{s}{t}\right)^{h_0/a_1} \exp(O(1)) ds = tO(1).
\end{aligned}$$

Для решений уравнения (1) в [6] были построены асимптотики при $t \rightarrow 0+$. Приведем эти результаты в удобной для нас форме.

Условие 1. Коэффициенты и правая часть $g(t)$ уравнения (1) — действительные функции, причём $p(t), q(t) \in C^\infty[0, d]$, $p(0) = 0$, $p(t) > 0$ при $t > 0$, $q(0) \neq 0$, $g(t) \in C^k[0, d]$ при некотором $k \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 2. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнено условие 1 и $q(0) > 0$. Тогда при любой допустимой функции $g(t)$ существует единственное ограниченное на $[0, d]$ решение $u_+(t; g)$ этого уравнения, определённое равенством

$$u_+(t; g) = M_+^{-1} g(t) = \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau \in C^k[0, d] \cap C^{k+1}(0, d]. \quad (10)$$

Для $t > 0$ общее решение $u(t)$ уравнения (1) имеет вид

$$u(t) = C u_0(t) + u_+(t; g) = C \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) + \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau, \quad (11)$$

где функция $u_0(t)$ определена равенством (2), C — произвольная постоянная. При этом для любого $j \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(j)}(t) = \infty, \quad u_0(t) \in C^\infty(0, d], \quad u_0(t) \notin C[0, d], \quad u_+(t; g) = \frac{g(0)}{q(0)}(1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+.$$

Лемма 3. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнено условие 1 и $q(0) < 0$. Тогда решением уравнения (1) является функция $u_-(t; g)$, которая определяется равенством

$$u_-(t; g) = M^{-1}g(t) = - \int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right) d\tau, \quad (12)$$

и при этом справедливы утверждения.

1°. В случае сильного вырождения, когда $p(0) = p'(0) = 0$,

$$u_-(t; g) \in C^k[0, d] \cap C^{k+1}(0, d], \quad u_0(t) \in C^\infty[0, d], \quad u_0(t) = o(t^j) \text{ при } t \rightarrow 0+ \text{ для } j \in \mathbb{N}.$$

2°. В случае слабого вырождения, если $p(0) = 0$, $p(t) = p_1 t + t^2 O(1)$, $p_1 > 0$, $q(t) = q_0 + t O(1)$, $q_0 > 0$ и $g(t) = g_0 + \sum_{j=1}^k g_j t^j + t^k o(1)$ при $t \rightarrow 0+$, то справедливы включения

$$u_-(t; g) \in \begin{cases} C^k[0, d], & \text{если } k < -\frac{q_0}{p_1}, \\ C^{[-q_0/p_1]}[0, d], & \text{если } k \geq -\frac{q_0}{p_1}, -\frac{q_0}{p_1} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}, k_0 \leq k, g^{(k_0)}(0) \neq 0, \\ C^k[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}, k_0 \geq k, g^{(k_0)}(0) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$u_0(t) \in C^{[-q_0/p_1]}[0, d] \cap C^\infty(0, d], \quad \lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(j)}(t) = 0 \text{ при } j < \left\lfloor -\frac{q_0}{p_1} \right\rfloor,$$

$$u_0(t) \in C^\infty[0, d] \text{ при } -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}, \quad u_-(t; g) = \frac{g(0)}{q(0)}(1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+.$$

Установленные в леммах 1–3 асимптотические соотношения (10)–(13) будут использованы в дальнейшем при доказательстве теорем 1–4.

3. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка с двойным вырождением. При $t > 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение с двойным вырождением

$$Lv(t) \equiv (a(t)v'(t))' + t^m b(t)v'(t) + c(t)v(t) = f(t), \quad (14)$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующему условию.

Условие 2. Коэффициенты уравнения (14) действительные бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0, d]$ при некотором $d > 0$ функции,

$$a(t) = a_0 t^{n+m}(1 + o(1)), \quad a_0 = \text{const} > 0, \quad b(0) \neq 0, \quad c(0) \neq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n > m.$$

Если выполнено условие 2, то в дальнейшем будет доказано, что существует двухпараметрическое семейство решений уравнения (14), гладкость которых при $t = 0$ определяется знаками коэффициентов $b(0)$, $c(0)$. Отметим, что однородные уравнения вида (14) при $n = 1$ в банаховом пространстве рассматривались ранее в [5].

Чтобы исследовать поведение этих решений при $t \rightarrow 0+$, представим входящий в уравнение оператор L в виде выражения, содержащего произведение двух дифференциальных операторов L_i первого порядка с подлежащими определению функциями $a_i(t)$, $b_i(t)$, где

$$L_i u(t) = a_i(t)u'(t) + b_i(t)u(t), \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим произведение операторов $L_1 L_2$, которое, как легко видеть, имеет вид

$$L_1 L_2 v(t) = (a_1(t)a_2(t)v'(t))' + (-a_1'(t)a_2(t) + a_1(t)b_2(t) + a_2(t)b_1(t))v'(t) + (a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t))v(t), \quad (15)$$

и выберем $a_i(t)$, $b_i(t)$ так, чтобы

$$a_1(t) = t^m, \quad a_2(t) = a_0 t^n(1 + o(1)), \quad a(t) = a_1(t)a_2(t), \quad b_2(t) = b(t), \quad b_1(t) = \frac{c(t) - a_1(t)b_2'(t)}{b_2(t)},$$

$$c(t) = t^m b'(t) + b_1(t)b_2(t), \quad \omega(t) = a_2(t)(b_1(t) - a_1'(t)) = t^n O(1) \text{ при } t \rightarrow 0+. \quad (16)$$

При этом все выбранные функции бесконечно дифференцируемы на $[0, d]$ и

$$b_2(0) = b(0) \neq 0, \quad b_1(0) = \frac{c(0)}{b_2(0)} \neq 0, \quad b_1(0)b_2(0) = c(0).$$

Тогда из равенств (15), (16) следует представление

$$\begin{aligned} Lv(t) &= (a_0 t^{n+m}(1 + o(1))v'(t))' + t^m b(t)v'(t) + c(t)v(t) = (a_1(t)a_2(t)v'(t))' + \\ &+ (a_1(t)b_2(t) - a_1'(t)a_2(t) + a_2(t)b_1(t))v'(t) + (a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t))v(t) - a_2(t)(b_1(t) - a_1'(t))v'(t) = \\ &= L_1 L_2 v(t) - \omega(t)v'(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Далее будем находить решения уравнения (14), или, эквивалентного ему в силу равенства (17), уравнения

$$L_1 L_2 v(t) - \omega(t)v'(t) = f(t), \quad (18)$$

используя обратимость операторов L_1 , L_2 в некоторой окрестности точки $t = 0$. Отметим, что в отличие от работ [1–4], вид обратных операторов зависит не только от знака в точке вырождения коэффициента перед первой производной, но и от знака коэффициента свободного члена, т. е. в рассматриваемом нами случае от знаков коэффициентов $b_1(0)$ и $b_2(0)$. Поэтому мы разобьём поиск решения на четыре случая, при этом всегда $b_1(0)b_2(0) = c(0)$.

Случай 1. $b(0) > 0$, $c(0) > 0 \Leftrightarrow b_1(0) > 0$, $b_2(0) = b(0) > 0$.

Случай 2. $b(0) < 0$, $c(0) < 0 \Leftrightarrow b_1(0) > 0$, $b_2(0) = b(0) < 0$.

Случай 3. $b(0) > 0$, $c(0) < 0 \Leftrightarrow b_1(0) < 0$, $b_2(0) = b(0) > 0$.

Случай 4. $b(0) < 0$, $c(0) > 0 \Leftrightarrow b_1(0) < 0$, $b_2(0) = b(0) < 0$.

В соответствии с определяемыми равенствами (3) и (4) операторами M_+^{-1} , M_-^{-1} введём интегральные операторы, обращающие L_1 и L_2

$$L_i^{-1}u(t) = \int_0^t \frac{u(\tau)}{a_i(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_i(\xi)}{a_i(\xi)} d\xi\right) d\tau, \quad \text{если } b_i(0) > 0, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

$$\Lambda_i^{-1}u(t) = -\int_t^d \frac{u(\tau)}{a_i(\tau)} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_i(\xi)}{a_i(\xi)} d\xi\right) d\tau, \quad \text{если } b_i(0) < 0, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Используя представление (2), определим также функции $v_{0i}(t)$, $i = 1, 2$, которые будут использованы при построении решений однородного уравнения (18). Они имеют вид

$$v_{0i}(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_i(\xi)}{a_i(\xi)} d\xi\right), \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

4. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Случай 1.

Теорема 1. Пусть для коэффициентов уравнения (14) выполнено условие 2 и $b(0) > 0$, $c(0) > 0$. Тогда для любой функции $f(t) \in C[0, d]$ существует единственное ограниченное решение $v_1(t; f) \in C[0, d]$ этого уравнения, определяемое равенством

$$v_1(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_1)^k V_1(t; f) \in C[0, d], \quad \text{где} \quad (22)$$

$$V_1(t; f) = \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \times \left(\int_0^\tau \exp\left(-\int_\eta^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} d\eta\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} Q_1 v(t) &= \\ &= \int_0^t \left(\frac{\omega(\tau)v(\tau)}{a_1(\tau)} - \int_0^\tau \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\tau \frac{-b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) v(\eta) d\eta \right) \exp\left(\int_\tau^t \frac{-b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$a_i(t)$, $b_i(t)$, $\omega(t)$ определены в (16). При этом для $m > 1$ справедлива асимптотика

$$v_1(t; f) = \frac{f(t)}{c(t)}(1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (25)$$

а все решения однородного уравнения (14), кроме тривиального, неограничены при $t \rightarrow 0+$.

Доказательство. Пусть функция $v(t) \in C[0, d] \cap C^2(0, d]$ является решением уравнения (14), тогда в силу равенств (15), (16), она будет удовлетворять и уравнению (18). Отметим, что в условиях теоремы 1 выполнено условие $b_1(0) > 0$, $b_2(0) > 0$.

Уравнение (18) положим в основу дальнейших преобразований. Перенесём свободный член этого уравнения направо и поочерёдно обратим операторы в произведении $L_1 L_2 v(t)$. После применения определяемого равенством (19) оператора L_1^{-1} получим интегро-дифференциальное уравнение

$$L_2 v(t) = C_1 v_{01}(t) + \int_0^t \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\tau + \int_0^t \frac{\omega(\tau)v'(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\tau, \quad (26)$$

где $v_{01}(t)$ определена равенством (21), C_1 — произвольная постоянная.

Предполагая, что интеграл в (26) сходится, используя равенство, проинтегрируем по частям последнее слагаемое в (26) и получим уравнение

$$L_2 v(t) = C_1 v_{01}(t) + u_1(t; f) + w_1(t; v), \quad \text{где} \quad (27)$$

$$u_1(t; f) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\tau,$$

$$w_1(t; v) = \frac{\omega(t)v(t)}{a_1(t)} - \int_0^t \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(-\int_\eta^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) v(\eta) d\eta.$$

Применяя теперь к уравнению (27) оператор L_2^{-1} из равенства (19), получим интегральное уравнение

$$v(t) = C_2 v_{02}(t) + C_1 L_2^{-1} v_{01}(t) + V_1(t; f) + Q_1 v(t), \quad (28)$$

где $V_1(t; f)$ и оператор Q_1 определены в (23), (24), а C_1 , C_2 — произвольные постоянные.

Следовательно, при $t > 0$ каждое решение дифференциального уравнения (14) удовлетворяет интегральному уравнению (28), и наоборот.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (28) и при малых $d > 0$ оценим модуль функции $Q_1 v(t)$, если $v(t) \in C[0, d]$. При $t \rightarrow 0+$, используя лемму 1, будем иметь

$$|Q_1 v(t)| \leq \left| \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \frac{(b_2(\xi) - a_2'(\xi)) d\xi}{a_2(\xi)}\right) \frac{w_1(\tau; v) d\tau}{a_2(\tau)} \right| = \frac{|w_1(t; v)|}{b_2(t)}(1 + o(1)),$$

$$|w_1(t; v)| \leq \left(\left| \frac{\omega(t)}{a_1(t)} \right| + \int_0^t \left| \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(-\int_\eta^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) \right| d\eta \right) \max_{[0, d]} |v(t)| \rightarrow 0. \quad (29)$$

Таким образом, из (29) следует, что при малом $d > 0$ оператор Q_1 ограничен в $C[0, d]$, $\|Q_1\|_C < 1$, а решение уравнения (28) при $C_1 = C_2 = 0$ находится с помощью итераций:

$$v_{1,0}(t; f) = V_1(t; f), \quad v_{1,k}(t; f) = Q_1 v_{1,k-1}(t; f) = (Q_1)^k V_1(t; f), \quad v_1(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{1,k}(t; f) \in C[0, d],$$

и поэтому для произвольной функции $f(t) \in C[0, d]$ существует непрерывное на $[0, d]$ решение уравнения (14), которое имеет вид (22).

Чтобы получить первые асимптотики построенного решения $v_1(t; f)$ при $m > 1$ и $t \rightarrow 0+$, используя равенство $v_1(t; f) = V_1(t; f) + Q_1 v_1(t; f)$ и лемму 1, оценим вначале $V_1(t; f)$. Учитывая условие 2, получим

$$V_1(t; f) = \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \times \left(\int_0^\tau \exp\left(-\int_\eta^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} =$$

$$= \frac{1}{b_2(t)} \int_0^t \exp \left(- \int_{\eta}^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} = \frac{f(t)}{b_1(t)b_2(t)} (1 + o(1)),$$

и из (29) следует, что $Q_1 v_1(t; f) = o(1)$ при $t \rightarrow 0+$. Нетрудно также проверить, что при этом интеграл в (26) сходится.

Функция $v_1(t; f)$ удовлетворяет интегральному уравнению (28),

$$v_1(t; f) = V_1(t; f) + Q_1 v_1(t; f),$$

и $c(t) = a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t) = t^m b_2'(t) + b_1(t)b_2(t)$, поэтому при $t \rightarrow 0+$

$$v_1(t; f) = \frac{f(t)}{b_1(t)b_2(t)} (1 + o(1)) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)),$$

что и доказывает (25).

Далее исследуем поведение решений $v_i(t; 0)$, $i = 1, 2$ однородного дифференциального уравнения (14) или, что то же самое, однородного интегрального уравнения (28). Эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$v_i(t; 0) = C_2 v_{02}(t) + C_1 L_2^{-1} v_{01}(t) + Q_1 v_i(t; 0), \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Рассмотрим вначале интегральное уравнение (30) при $i = 1$, $C_2 = 0$. Учитывая лемму 1, при $t \rightarrow 0+$ получим

$$\begin{aligned} L_2^{-1} v_{01}(t) &= \int_0^t \frac{v_{01}(\tau)}{a_2(\tau)} \exp \left(- \int_{\tau}^t \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) d\tau = \\ &= \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \int_0^t \exp \left(\int_{\tau}^t \left(\frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} - \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} \right) d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{1 + o(t)}{b_2(t)} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

и, как следует из уравнения (30), решение $v_1(t; 0)$ неограничено при $t \rightarrow 0+$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (30) при $i = 2$, $C_1 = 0$. Поскольку функция $v_{02}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 0+$, то $v_2(t; 0)$ также неограничено при $t \rightarrow 0+$. Теорема доказана.

Замечание 1. При нахождении асимптотики функции $v_1(t; f)$ используется лемма 1, которая не позволяет выписать точную асимптотику решения $v_1(t; f)$ при $m = 1$, однако, она может быть вычислена непосредственно с помощью аналогичного алгоритма (см. далее примеры в п. 9).

5. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Случай 2.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов уравнения (14) выполнено условие 2 и $b(0) < 0$, $c(0) < 0$. Тогда для любой функции $f(t) \in C[0, d]$ существует ограниченное решение $v_2(t; f) \in C[0, d]$ этого уравнения, определяемое равенством

$$v_2(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_2)^k V_2(t; f) \in C[0, d], \quad \text{где} \quad (31)$$

$$V_2(t; f) = - \int_t^d \exp \left(\int_t^{\tau} \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \times \left(\int_0^{\tau} \exp \left(\int_{\eta}^{\tau} \frac{-b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} Q_2 v(t) &= \\ &= - \int_t^d \left(\frac{\omega(\tau)v(\tau)}{a_1(\tau)} - \int_0^{\tau} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(\int_{\eta}^{\tau} \frac{-b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \right) v(\eta) d\eta \right) \exp \left(\int_t^{\tau} \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$a_i(t)$, $b_i(t)$, $\omega(t)$ определены в (16). При этом для $m > 1$ справедлива асимптотика

$$v_2(t; f) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (34)$$

и для однородного уравнения (14) существует стремящееся к нулю при $t \rightarrow 0$ решение

$$\hat{v}_2(t; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_2)^k v_{02}(t) \in C[0, d], \quad \hat{v}_2(t; 0) = v_{02}(t)(1 + o(1)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0, \quad (35)$$

где $v_{02}(t)$ определена в (21), причём любое линейно независимое с ним решение неограничено при $t \rightarrow 0+$.

Доказательство. Пусть функция $v(t) \in C[0, d] \cap C^2(0, d]$ является решением уравнения (14), тогда в силу равенств (15), (16) она будет удовлетворять и уравнению (18). Отметим, что в условиях теоремы 2 выполнено условие $b_1(0) > 0$, $b_2(0) < 0$.

Перенесём свободный член уравнения (18) направо и поочерёдно обратим операторы в произведении $L_1 L_2 v(t)$. Как и в теореме 1, после применения определяемого равенством (19) оператора L_1^{-1} получим интегро-дифференциальное уравнение (26), которое принимает вид (27).

Поскольку теперь $b_2(0) < 0$, то применяя к уравнению (27) оператор Λ_2^{-1} из равенства (20), получим интегральное уравнение

$$v(t) = C_2 v_{02}(t) + C_1 \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + V_2(t; f) + Q_2 v(t), \quad (36)$$

где $V_2(t; f)$ и оператор Q_2 определены в (32), (33), а C_1 , C_2 — произвольные постоянные.

При $t > 0$ каждое решение дифференциального уравнения (14) удовлетворяет интегральному уравнению (36), и наоборот.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (36) и при малых $d > 0$ оценим модуль функции $Q_2 v(t)$, если $v(t) \in C[0, d]$. При $t \rightarrow 0+$, используя леммы 1 и 2, будем иметь

$$\begin{aligned} |Q_2 v(t)| &\leq \left| \int_t^d \exp \left(- \int_t^\tau \frac{(b_2(\xi) - a_2'(\xi)) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{w_1(\tau; v) d\tau}{a_2(\tau)} \right| \leq \frac{|w_1(t; v)|}{|b_2(t)|} (1 + o(1)), \\ |w_1(t; v)| &\leq \left(\left| \frac{\omega(t)}{a_1(t)} \right| + \int_0^t \left| \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(- \int_\eta^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \right) \right| d\eta \right) \max_{[0, d]} |v(t)| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, из (37) следует, что при малом $d > 0$ оператор Q_2 ограничен в $C[0, d]$, $\|Q_2\|_C < 1$, а решение уравнения (36) при $C_1 = C_2 = 0$ находится с помощью итераций:

$$v_{2,0}(t; f) = V_2(t; f), \quad v_{2,k}(t; f) = Q_2 v_{2,k-1}(t; f) = (Q_2)^k V_2(t; f), \quad v_2(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2,k}(t; f) \in C[0, d],$$

и поэтому для произвольной функции $f(t) \in C[0, d]$ существует непрерывное на $[0, d]$ решение уравнения (14), которое имеет вид (31).

Чтобы получить первые асимптотики построенного решения $v_2(t; f)$ при $m > 1$ и $t \rightarrow 0+$, используя равенство $v_2(t; f) = V_2(t; f) + Q_2 v_1(t; f)$ и леммы 1 и 2, оценим вначале $V_2(t; f)$. Учитывая условие 2, получим

$$\begin{aligned} V_2(t; f) &= - \int_t^d \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \times \left(\int_0^\tau \exp \left(- \int_\eta^\tau \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \frac{1}{b_2(t)} \int_0^t \exp \left(- \int_\eta^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} = \frac{f(t)}{b_1(t)b_2(t)} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

и из (37) следует, что $Q_2 v_2(t; f) = o(1)$ при $t \rightarrow 0+$.

Функция $v_2(t; f)$ удовлетворяет интегральному уравнению (36) при $C_1 = C_2 = 0$

$$v_2(t; f) = V_2(t; f) + Q_2 v_2(t; f),$$

и $c(t) = a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t) = t^m b_2'(t) + b_1(t)b_2(t)$, поэтому при $t \rightarrow 0+$

$$v_2(t; f) = \frac{f(t)}{b_1(t)b_2(t)} (1 + o(1)) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)),$$

что и доказывает (34).

Далее исследуем поведение решений $\hat{v}_i(t; 0)$, $i = 1, 2$ однородного дифференциального уравнения (14) или, что то же самое, однородного интегрального уравнения (36). Эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\hat{v}_i(t; 0) = C_2 v_{02}(t) + C_1 \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + Q_2 \hat{v}_i(t; 0), \quad i = 1, 2. \quad (38)$$

Рассмотрим вначале интегральное уравнение (38) при $i = 1$, $C_2 = 0$. Учитывая лемму 1, при $t \rightarrow 0+$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) &= - \int_t^d \frac{v_{01}(\tau)}{a_2(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) d\tau = \\ &= - \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \int_t^d \exp \left(\int_t^\tau \left(\frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} - \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} \right) d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \frac{1 + o(1)}{b_2(t)} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

и, как следует из уравнения (38), решение $\hat{v}_1(t; 0)$ неограничено при $t \rightarrow 0+$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (38) при $i = 2$, $C_1 = 0$. Решение $\hat{v}_2(t; 0)$ этого однородного уравнения находится аналогично нахождению решения $v_2(t; f)$ и для него справедливо представление (35). Теорема доказана.

6. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Случай 3.

Теорема 3. Пусть для коэффициентов уравнения (14) выполнено условие 2 и $b(0) > 0$, $c(0) < 0$. Тогда для любой функции $f(t) \in C[0, d]$ существует ограниченное решение $v_3(t; f) \in C[0, d]$ этого уравнения, определяемое равенством

$$v_3(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_3)^k V_3(t; f) \in C[0, d], \quad \text{где} \quad (39)$$

$$V_3(t; f) = - \int_0^t \exp \left(- \int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \times \left(\int_\tau^d \exp \left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} d\eta \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} Q_3 v(t) &= \\ &= \int_0^t \left(\frac{\omega(\tau)v(\tau)}{a_1(\tau)} + \int_\tau^d \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \right) v(\eta) d\eta \right) \exp \left(\int_\tau^t \frac{-b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned} \quad (41)$$

$a_i(t)$, $b_i(t)$, $\omega(t)$ определены в (16). При этом для $t > 1$ справедлива асимптотика

$$v_3(t; f) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (42)$$

и для однородного уравнения (14) существует стремящееся к нулю при $t \rightarrow 0+$ решение

$$\tilde{v}_1(t; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_3)^k L_2^{-1} v_{01}(t) \in C[0, d], \quad \tilde{v}_1(t; 0) = \frac{v_{01}(t)}{b(t)} (1 + o(1)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (43)$$

где L_2^{-1} , $v_{01}(t)$ определены в (19), (21), причём любое линейно независимое с ним решение неограничено при $t \rightarrow 0+$.

Доказательство. Пусть функция $v(t) \in C[0, d] \cap C^2(0, d]$ является решением уравнения (14), тогда в силу равенств (15), (16), она будет удовлетворять и уравнению (18). Отметим, что в условиях теоремы 3 выполнено условие $b_1(0) < 0$, $b_2(0) > 0$.

Перенесём свободный член уравнения (18) направо и поочерёдно обратим операторы в произведении $L_1 L_2 v(t)$. После применения определяемого равенством (20) оператора Λ_1^{-1} получим интегродифференциальное уравнение

$$L_2 v(t) = C_1 v_{01}(t) - \int_t^d \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) d\tau - \int_t^d \frac{\omega(\tau)v'(\tau)}{a_1(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) d\tau, \quad (44)$$

где $v_{01}(t)$ определена равенством (21), C_1 — произвольная постоянная.

Проинтегрируем по частям последнее слагаемое в (44) и получим уравнение

$$L_2 v(t) = \tilde{C}_1 v_{01}(t) + \tilde{u}_1(t; f) + \tilde{w}_1(t; v), \quad \text{где} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t; f) &= - \int_t^d \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) d\tau, \quad \tilde{C}_1 = C_1 - \frac{\omega(d)v(d)}{a_1(d)}, \\ \tilde{w}_1(t; v) &= \frac{\omega(t)v(t)}{a_1(t)} + \int_t^d \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(\int_t^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) v(\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Применяя теперь к уравнению (45) оператор L_2^{-1} из равенства (19), получим интегральное уравнение

$$v(t) = C_2 v_{02}(t) + \tilde{C}_1 L_2^{-1} v_{01}(t) + V_3(t; f) + Q_3 v(t), \quad (46)$$

где $V_3(t; f)$ и оператор Q_3 определены в (40), (41), а $\tilde{C}_1$, C_2 — произвольные постоянные.

Следовательно, при $t > 0$ каждое решение дифференциального уравнения (14) удовлетворяет интегральному уравнению (46), и наоборот.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (46) и при малых $d > 0$ оценим модуль функции $Q_3 v(t)$, если $v(t) \in C[0, d]$. При $t \rightarrow 0+$, используя лемму 1, будем иметь

$$\begin{aligned} |Q_3 v(t)| &\leq \left| \int_t^d \exp \left(- \int_t^\tau \frac{(b_2(\xi) - a_2'(\xi))d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{\tilde{w}_1(\tau; v)d\tau}{a_2(\tau)} \right| = \frac{|\tilde{w}_1(t; v)|}{b_2(t)} (1 + o(1)), \\ |\tilde{w}_1(t; v)| &\leq \left(\left| \frac{\omega(t)}{a_1(t)} \right| + \int_t^d \left| \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(\int_t^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \right) \right| d\eta \right) \max_{[0, d]} |v(t)| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, из (47) следует, что при малом $d > 0$ оператор Q_3 ограничен в $C[0, d]$, $\|Q_3\|_C < 1$, а решение уравнения (46) при $\tilde{C}_1 = C_2 = 0$ находится с помощью итераций:

$$v_{3,0}(t; f) = V_3(t; f), \quad v_{3,k}(t; f) = Q_3 v_{3,k-1}(t; f) = (Q_3)^k V_3(t; f), \quad v_3(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{3,k}(t; f) \in C[0, d],$$

и поэтому для произвольной функции $f(t) \in C[0, d]$ существует непрерывное на $[0, d]$ решение уравнения (14), которое имеет вид (39). Используя лемму 1, как и при доказательстве теорем 1 и 2, получим его асимптотику в виде (42).

Далее исследуем поведение решений $\tilde{v}_i(t; 0)$, $i = 1, 2$ однородного дифференциального уравнения (14) или, что то же самое, однородного интегрального уравнения (46). Эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\tilde{v}_i(t; 0) = C_2 v_{02}(t) + C_1 L_2^{-1} v_{01}(t) + Q_3 \tilde{v}_i(t; 0), \quad i = 1, 2. \quad (48)$$

Рассмотрим вначале интегральное уравнение (48) при $i = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Учитывая лемму 1, при $t \rightarrow 0+$ получим

$$\begin{aligned} L_2^{-1} v_{01}(t) &= \int_0^t \frac{v_{01}(\tau)}{a_2(\tau)} \exp \left(- \int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) d\tau = \\ &= \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \exp \left(- \int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \frac{1 + o(1)}{b_2(t)} \in C[0, d], \end{aligned}$$

поэтому ограниченное решение $\tilde{v}_1(t; 0)$ может быть найдено итерациями, которые аналогичны итерациям для нахождения $v_3(t; f)$, при этом $\tilde{v}_1(t; 0) = L_2^{-1} v_{01}(t) + Q_3 \tilde{v}_1(t; 0)$. Откуда, учитывая соотношение (47), получим (43).

Предположение о существовании ограниченного на $[0, d]$ решения уравнения (48) при $i = 2$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ приводит к противоречию. Теорема доказана.

7. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Случай 4.

Теорема 4. Пусть для коэффициентов уравнения (14) выполнено условие 2 и $b(0) < 0$, $c(0) > 0$. Тогда для любой функции $f(t) \in C[0, d]$ существует ограниченное решение $v_4(t; f) \in C[0, d]$ этого уравнения, определяемое равенством

$$v_4(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_4)^k V_4(t; f) \in C[0, d], \quad \text{где} \quad (49)$$

$$V_4(t; f) = \int_t^d \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \times \left(\int_\tau^d \exp\left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)}\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} Q_4 v(t; f) = \\ = - \int_t^d \left(\frac{\omega(\tau)v(\tau)}{a_1(\tau)} + \int_\tau^d \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) v(\eta) d\eta \right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned} \quad (51)$$

$a_i(t)$, $b_i(t)$, $\omega(t)$ определены в (16). При этом для $m > 1$ справедлива асимптотика

$$v_4(t; f) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (52)$$

и для однородного уравнения (14) существуют стремящиеся к нулю при $t \rightarrow 0+$ линейно независимые решения

$$\check{v}_1(t; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_4)^k \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) \in C[0, d], \quad \check{v}_1(t; 0) = \frac{v_{01}(t)}{b(t)} (1 + o(1)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (53)$$

$$\check{v}_2(t; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_4)^k v_{02}(t) \in C[0, d], \quad \check{v}_2(t; 0) = v_{02}(t) (1 + o(1)) = o(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (54)$$

где Λ_2^{-1} , $v_{01}(t)$, $v_{02}(t)$ определены в (20), (21).

Доказательство. Начало доказательства теоремы 4 идентично теореме 3, отметим также, что в условиях теоремы 4 выполнено условие $b_1(0) < 0$, $b_2(0) < 0$.

Перенесём свободный член уравнения (18) направо. После применения определяемого равенством (20) оператора Λ_1^{-1} и интегрирования по частям в последнем слагаемом (44), получим уравнение (45).

Применяя теперь к уравнению (45) оператор Λ_2^{-1} из равенства (20), получим интегральное уравнение

$$v(t) = C_2 v_{02}(t) + \tilde{C}_1 \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + V_4(t; f) + Q_4 v(t), \quad (55)$$

где $V_4(t; f)$ и оператор Q_4 определены в (50), (51), а $\tilde{C}_1$, C_2 — произвольные постоянные.

При $t > 0$ каждое решение дифференциального уравнения (14) удовлетворяет интегральному уравнению (55), и наоборот.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (55) и при малых $d > 0$ оценим модуль функции $Q_4 v(t)$, если $v(t) \in C[0, d]$. При $t \rightarrow 0+$, используя лемму 3, будем иметь

$$\begin{aligned} |Q_4 v(t)| &\leq \left| \int_t^d \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{\tilde{w}_1(\tau; v) d\tau}{a_2(\tau)} \right| = \frac{|\tilde{w}_1(t; v)|}{|b_2(t)|} (1 + o(1)), \\ |\tilde{w}_1(t; v)| &\leq \left(\left| \frac{\omega(t)}{a_1(t)} \right| + \int_t^d \left| \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) \right| d\eta \right) \max_{[0, d]} |v(t)| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Таким образом, из (56) следует, что при малом $d > 0$ оператор Q_4 ограничен в $C[0, d]$, $\|Q_4\|_C < 1$, а решение уравнения (55) при $\tilde{C}_1 = C_2 = 0$ находится с помощью итераций:

$$v_{4,0}(t; f) = V_4(t; f), \quad v_{4,k}(t; f) = Q_4 v_{4,k-1}(t; f) = (Q_4)^k V_4(t; f), \quad v_4(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{4,k}(t; f) \in C[0, d],$$

и поэтому для произвольной функции $f(t) \in C[0, d]$ существует непрерывное на $[0, d]$ решение уравнения (14), которое имеет вид (49). Используя лемму 1, как и при доказательстве теорем 1–3, получим его асимптотику в виде (52).

Далее исследуем поведение решений $\tilde{v}_i(t; 0)$, $i = 1, 2$ однородного дифференциального уравнения (14) или, что то же самое, однородного интегрального уравнения (55). Эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\tilde{v}_i(t; 0) = C_2 v_{02}(t) + \tilde{C}_1 \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + Q_4 \tilde{v}_i(t; 0), \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Рассмотрим вначале интегральное уравнение (57) при $i = 1$, $\tilde{C}_1 = 1$, $C_2 = 0$. Учитывая лемму 1, при $t \rightarrow 0+$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) &= - \int_t^d \frac{v_{01}(\tau)}{a_2(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) d\tau = \\ &= - \int_t^d \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \exp \left(\int_t^\tau \frac{(b_2(\xi) - a_2'(\xi))}{a_2(\xi)} d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \frac{v_{01}(t)(1 + o(1))}{|b_2(t)|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

поэтому ограниченное решение $\tilde{v}_1(t; 0)$ может быть найдено итерациями, которые аналогичны итерациям для нахождения $v_4(t; f)$, при этом $\tilde{v}_1(t; 0) = \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + Q_4 \tilde{v}_1(t; 0)$. Откуда, учитывая соотношение (56), получим (54).

Для интегрального уравнения (57) при $i = 2$, $\tilde{C}_1 = 0$, $C_2 = 1$ решение $\tilde{v}_2(t; 0)$ может быть найдено аналогичными итерациями, при этом $\tilde{v}_2(t; 0) = v_{02}(t) + Q_4 \tilde{v}_2(t; 0)$, и справедливо (53). Теорема доказана.

8. Начальная задача с условием в точке вырождения. Классическая постановка задачи Коши для дифференциальных уравнений второго порядка предполагает нахождение решения, удовлетворяющего в определённой точке двум заданным условиям. Как известно, см. [3, 4, 5, 6], для вырождающихся уравнений второго порядка невозможно задание двух классических условий в точке вырождения, чтобы определить ограниченное решение, а одновременное вырождение старших коэффициентов в уравнении (14) добавляет к задаче Коши свои особенности.

Задачей Коши для уравнения (14) в точке вырождения коэффициентов этого уравнения будем называть задачу нахождения функции $v(t) \in C[0, d] \cap C^2(0, d]$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению (14) и в точке вырождения $t = 0$ условию

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v(t) = v_0. \quad (58)$$

Задача (14), (58) ранее была исследована в [6] для уравнения вида (14), допускающего факторизацию в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка. Установленные нами теоремы 1–4 позволяют решить эту задачу и для уравнений более общего вида, которые и рассмотрены в настоящей статье.

Теорема 5. Пусть выполнено условие 2. Тогда лишь при единственном начальном значении $v_0 = \frac{f(0)}{c(0)}$

задача (14), (58) имеет решение $v(t)$ и для него справедливы следующие утверждения.

1°. Если $b(0) > 0$, $c(0) > 0$, то существует единственное решение $v(t) = v_1(t; f)$ задачи (14), (58), которое определяется формулами (22)–(24), и для этого решения справедлива асимптотика (25).

2°. Если $b(0) < 0$, $c(0) < 0$, то существует однопараметрическое семейство функций $v(t, C_2) = v_2(t; f) + C_2 \tilde{v}_2(t; 0)$, где C_2 — произвольная постоянная, $v_2(t; f)$, $\tilde{v}_2(t; 0)$ определены соответственно в (31)–(33), (35), каждая функция которого является решением задачи (14), (58). При этом для $v_2(t; f)$, $\tilde{v}_2(t; 0)$ справедливы асимптотики (34) и (35).

3°. Если $b(0) > 0$, $c(0) < 0$, то существует однопараметрическое семейство функций $v(t, C_1) = v_3(t; f) + C_1 \tilde{v}_1(t; 0)$, где C_1 — произвольная постоянная, $v_3(t; f)$, $\tilde{v}_1(t; 0)$ определены соответственно в (39)–(41), (43), каждая функция которого является решением задачи (14), (58). При этом для $v_3(t; f)$, $\tilde{v}_3(t; 0)$ справедливы асимптотики (42) и (43).

4°. Если $b(0) < 0$, $c(0) > 0$, то существует двухпараметрическое семейство функций $v(t, C_1, C_2) = v_4(t; f) + C_1 \tilde{v}_1(t; 0) + C_2 \tilde{v}_2(t; 0)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $v_4(t; f)$, $\tilde{v}_1(t; 0)$, $\tilde{v}_2(t; 0)$ определены соответственно в (49)–(51), (53), (54), каждая функция которого является решением задачи (14), (58). При этом для $v_4(t; f)$, $\tilde{v}_1(t; 0)$, $\tilde{v}_2(t; 0)$ справедлива асимптотика (52)–(54).

Доказательство. Справедливость теоремы 5 вытекает из утверждений теорем 1–4. Приведем, например, рассуждения, доказывающие п. 4°.

В силу теоремы 4 общее решение уравнения (16) имеет вид

$$v(t, C_1, C_2) = v_4(t; f) + C_1 \tilde{v}_1(t; 0) + C_2 \tilde{v}_2(t; 0),$$

и, учитывая асимптотические формулы (52)–(54), получаем требуемое нам утверждение пункта 4° теоремы 5. Пункты 1°–3° теоремы 5 устанавливаются аналогично.

9. Примеры. Если выполнено условие 2, то для произвольных коэффициентов уравнения (14) элементарных выражений для решений, как правило, не существует. Но фундаментальную систему

решений и ограниченное решение неоднородного уравнения в ряде случаев удаётся определить искусственными методами. Приведём соответствующие примеры.

Далее будем рассматривать частный случай уравнения (14), а именно:

$$(t^{n+m}v'(t))' + bt^mv'(t) + cv(t) = f(t). \quad (59)$$

Пример 1. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n \geq 2, m = 1, b = \text{const} > 0, c = nb, \omega(t) = (n-1)t^n, f(t) = 1,$$

а начальное значение в условии (58) $v_0 = \frac{1}{nb}$.

По формулам (16) определим входящие в равенство (23) коэффициенты

$$a_1(t) = t, a_2(t) = t^n, b_2(t) = b, b_1(t) = n, f(t) = 1,$$

и после многочисленных, но несложных вычислений, из (22)–(24) получим

$$V_1(t; f) = \frac{1}{nb}, Q_1 V_1(t; f) = 0, v_1(t; f) = \frac{1}{nb}.$$

Таким образом, на основании п. 1° теоремы 5, единственным решением задачи (58), (59), при сделанных предположениях, является функция $v_1(t; f) = \frac{1}{nb}$.

Отметим, что в рассматриваемом конкретном примере, а также и в дальнейших примерах, фундаментальную систему решений и частное решение неоднородного уравнения удобнее найти, не используя приведённые в теореме 5 формулы для решения.

Действительно, если подобрать частное решение уравнения (59), удовлетворяющее начальному условию (58), то это и будет определяемое равенством (22) решение $v_1(t; f)$, поскольку при $t \rightarrow 0+$ решения однородного уравнения либо стремятся к нулю, либо неограничены. В рассматриваемом примере очевидно, что функция $v_1(t; f) = \frac{1}{nb}$ является требуемым частным решением неоднородного уравнения.

После замены $w(t) = t^{n+1}v'(t)$ в уравнении (59) получим уравнение

$$w'(t) + \frac{bw(t)}{t^n} + nbv(t) = 1,$$

которое после дифференцирования примет вид

$$w''(t) + \frac{bw'(t)}{t^n} = 0.$$

Поскольку $w'(t) = C_2 \exp\left(\frac{b}{(n-1)t^{n-1}}\right)$, то единственным ограниченным решением будет функция $w(t) = \text{const}$, а единственное решение $v(t)$ уравнения (59), удовлетворяющее условию (58), имеет вид $v_1(t; f) = \frac{1}{nb}$.

Пример 1 является иллюстрацией к пункту 1° теоремы 5. Он подтверждает постановку начального условия, структуру указанного в этом пункте решения и его асимптотику.

Пример 2. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n \geq 2, m = 1, b = \text{const} < 0, c = nb, f(t) = 1,$$

а начальное значение в условии (58) $v_0 = \frac{1}{nb}$.

После замены $w(t) = t^n v'(t)$ и последующего дифференцирования получим уравнение

$$w''(t) + \frac{bw'(t)}{t^n} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$w(t) = C_1 + C_2 \int_0^t \exp\left(\frac{b}{(n-1)s^{n-1}}\right) ds,$$

откуда находим требуемое решение $v(t)$ уравнения (59), удовлетворяющее условию (58),

$$v(t) = \frac{1}{nb} + C_2 \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{n+1}} \int_0^\tau \exp\left(\frac{b}{(n-1)s^{n-1}}\right) ds = \frac{1}{nb} + \frac{C_2}{n} \int_0^t \exp\left(\frac{b}{(n-1)s^{n-1}}\right) \frac{t^n - s^n}{t^n s^n} ds.$$

Использование приведённых в теореме 5 формул (32), (33), (36) для нахождения решения более громоздко и мы проиллюстрируем их применение для частного случая, когда $n = 2$, $b = -1$, $c = -2$, при этом $a_1(t) = t$, $a_2(t) = t^2$, $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $\omega(t) = t^2$.

В результате получим

$$V_2(t; 1) = \frac{1}{2} \left(\exp\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{t}\right) - 1 \right),$$

$$Q_2 v(t) = -\exp\left(-\frac{1}{t}\right) \int_t^d \left(\tau v(\tau) - \frac{3}{\tau^2} \int_0^\tau \eta^2 v(\eta) d\eta \right) \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau^2}.$$

Интегральное уравнение (36) при $C_1 = C_2 = 0$ примет вид

$$v_2(t; 1) = V_2(t; 1) + Q_2(v_2(t; 1)),$$

а его решением, удовлетворяющим требуемому начальному условию, будет функция

$$v(t) = -\frac{1}{2} + \frac{C_2}{2} \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{s}\right) \frac{t^2 - s^2}{t^2 s^2} ds = -\frac{1}{2} + \frac{C_2}{2} \left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{s}\right) ds \right).$$

Пример 2 является иллюстрацией к пункту 2° теоремы 5. Он подтверждает постановку начального условия, структуру указанного в этом пункте решения и его асимптотику.

Пример 3. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n = 2, m = 1, b = 1, c = -2, f = 1,$$

а начальное значение в условии (58) $v_0 = -1/2$.

Использование приведённых в теореме 5 формул (39), (40), (46) для нахождения решения весьма громоздко, поэтому мы применим искусственный способ.

Очевидно, функция $v_3(t; f) = -1/2$ является частным решением неоднородного уравнения (59), удовлетворяющим начальному условию (58).

Найдём общее решение однородного уравнения. После замены $x = 1/t$, $v(t) = u(x)$ получим вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$xu''(x) + (-1 - x)u'(x) - 2u(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид (см. [7, §§ 9.9–9.12])

$$u(x) = C_2 x^2 {}_1F_1(4, 3; x) + C_1 x^2 \Psi(4, 3; x),$$

где ${}_1F_1(4, 3; x)$, $\Psi(4, 3; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции Куммера и Трикоми, причём при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотики

$$x^2 {}_1F_1(4, 3; x) = \frac{x^2}{3}(x+3)e^x \sim \frac{1}{3}xe^x, \quad x^2 \Psi(4, 3; x) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Поэтому, при сделанных предположениях, общее решение уравнения (59) имеет вид

$$v(t) = \frac{C_2}{t^2} {}_1F_1\left(4, 3; \frac{1}{t}\right) + \frac{C_1}{t^2} \Psi\left(4, 3; \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2}, \quad \text{причём } \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{C_1}{t^2} \Psi\left(4, 3; \frac{1}{t}\right) = 0,$$

а решением $v(t)$ уравнения (59), удовлетворяющим условию (58), будет функция

$$v(t) = \frac{C_1}{t^2} \Psi\left(4, 3; \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2},$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Пример 3 является иллюстрацией к пункту 3° теоремы 5. Он подтверждает постановку начального условия, структуру указанного в этом пункте решения и его асимптотику.

Пример 4. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n = 2, m = 1, b = -1, c = 2, f = 1.$$

Как и в примерах 1–3, использование приведённых в теореме 5 формул (49), (50), (55) для нахождения решения весьма громоздко, и мы опять применим искусственный способ.

Очевидно, функция $v_4(t; f) = 1/2$ является частным решением неоднородного уравнения (59), удовлетворяющим начальному условию (58).

Найдём общее решение однородного уравнения. Как и в примере 3, после замены $x = -1/t, v(t) = u(x)$ получим вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$xu''(x) + (-1 - x)u'(x) - 2u(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(x) = C_1 x^2 {}_1F_1(4, 3; x) + C_2 x^2 \Psi(4, 3; x),$$

причём при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотики

$$x^2 {}_1F_1(4, 3; x) = \frac{1}{3}(x + 3)e^x \sim \frac{1}{3}xe^x, \quad \Psi(4, 3; x) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной $x = -1/t$ и учитывая указанную асимптотику вырожденных гипергеометрических функций Куммера и Трикоми, найдём общее решение уравнения (59), которое удовлетворяет условию (58). Оно имеет вид

$$v(t) = \frac{C_2}{t^2} {}_1F_1\left(4, 3; -\frac{1}{t}\right) + \frac{C_1}{t^2} \Psi\left(4, 3; -\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 4 является иллюстрацией к пункту 4° теоремы 5. Он подтверждает постановку начального условия, структуру указанного в этом пункте решения и его асимптотику.

Как указано в замечании 1, при нахождении асимптотики функции $v_1(t; f)$ в теореме 1 остался не исследованным случай $n = m = 1$, который мы рассмотрим в следующем примере.

Пример 5. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n = 1, m = 1, b = b_1 b_2, b_1 = b_2 = c = f = 1, \omega(t) = 0.$$

Общее решение уравнения (59), полученного после подстановки указанных коэффициентов, имеет вид $v(t) = \frac{1}{t}(C_1 \ln t + C_2) + 1, v_1(t; f) = 1$.

Вычисления по формулам (22)–(24) также приводят к указанному результату для $v_1(t; f)$, поскольку $V_1(t; f) = 1, Q_1 V_1(t; f) = 0, v_1(t; f) = 1$.

Список литературы

1. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференциальные уравнения*. 2011;47(10):1383–1393.
2. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(3):197–206.
3. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(2):87–96.
4. Архипов В.П., Глушак А.В. Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(4):245–260.
5. Глушак А.В. О разрешимости вырождающихся гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2021;57(1):61–75.
6. Архипов В.П., Глушак А.В. О разрешимости начальной задачи для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):193–207.
7. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. Физматлит. 1963. 358.

References

1. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations*. 2011;47(10):1383–1393. (In Russ.)

2. Arkhipov VP., Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics & Physics*. 2023;55(3):197–206. (In Russ.)
3. Arkhipov VP., Glushak AV. Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(2):87–96. (In Russ.)
4. Arkhipov VP., Glushak AV. Two-sided Cauchy problem for degenerate second-order differential equations with conditions at the degeneracy point. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(4): 245 — 260. (In Russ.)
5. Glushak AV. Solvability of degenerating hyperbolic differential equations with unbounded operator coefficients. *Differential Equations*. 2021;57:1:60–74. (In Russ.)
6. Arkhipov VP., Glushak AV. On the solvability of the initial value problem for a factorized degenerate second-order differential equation. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):193–207. (In Russ.)
7. Lebedev N.N. 1963. Special functions and their applications. Fizmatlit. 358. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.02.2026

Received February 20, 2026

Поступила после рецензирования 06.04.2026

Revised April 06, 2026

Принята к публикации 08.04.2026

Accepted April 8, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Orel State University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)