

Аналог теоремы Штейнгауза для функционально-дифференциального оператора с инволюцией на графе

Григорьева Е. И. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Пенкиным О. М.)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
elenabiryukova2010@yandex.ru

Аннотация. В работе установлена равносходимость рядов $S(af)$ и $a(x)S(f)$, где $S(f)$ — ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка с инволюцией, заданного на простейшем графе из двух ребер с циклом.

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, инволюция, краевая задача, резольвента

Для цитирования: Григорьева Е.И. Аналог теоремы Штейнгауза для функционально-дифференциального оператора с инволюцией на графе. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):277–290.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-277-290EDN

Original Research

An Analogue of the Steinhaus Theorem for a Functional-Differential Operator with Involution on a Graph

Elena I. Grigorieva 

(Article submitted by a member of the editorial board Penkin O. M.)

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
elenabiryukova2010@yandex.ru

Abstract. The paper establishes the equiconvergence of the series $S(af)$ and $a(x)S(f)$, where $S(f)$ is the Fourier series in terms of eigenfunctions and associated functions of a first-order functional-differential operator with involution defined on a simple graph consisting of two edges with a cycle.

Keywords: Functional Differential Operator, Involution, Boundary Value Problem, Resolvent

For citation: Grigorieva EI. An Analogue of the Steinhaus Theorem for a Functional-Differential Operator with Involution on a Graph. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):277–290. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-277-290 EDN

1. Введение. В исследовании тригонометрических рядов широко применяется теорема равносходимости Штейнгауза, устанавливающая асимптотическую близость в равномерной метрике ряда от произведения двух функций и ряда от одной из них, умноженного на вторую [1]. Представляет интерес перенос этого классического результата на ряды, полученные при разложении по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов. Развитие данного направления в трудах В. А. Ильина, А. П. Хромова и их последователей показало, что стремление к нулю разности вида $S_n(af) - aS_n(f)$ для частичных сумм таких разложений справедливо в случае различных операторов, в том числе несамосопряженных [2, 3, 4, 5].

В работе [4] получен аналог теоремы Штейнгауза в случае функционально-дифференциального оператора (ФДО) первого порядка с инволюцией, определяемого дифференциальным выражением вида

$$l[y](x) = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x).$$

Наличие нелокальных возмущений (типа «отражения») существенно усложняет асимптотическое поведение спектра и меняет базисные свойства систем собственных и присоединенных функций (с. п. ф.). Исследования спектральных свойств таких операторов проводились в работах [6, 7, 8, 9].

В данной работе устанавливается равносходимость рядов $S(af)$ и $a(x)S(f)$, где $S(f)$ — ряд Фурье по с. п. ф. ФДО с инволюцией, заданного на графе из двух ребер, одно из которых представляет собой цикл. При обобщении задач на случай геометрического графа исследование различных вопросов сталкивается с трудностями, связанными с наличием внутренних узлов (вершин сопряжения ребер) графа, что приводит к определенной неоднородности («ветвлению») среды. Граф рассматриваемого вида является простейшим

графом, для которого можно сформулировать краевую задачу первого порядка с регулярными краевыми условиями [10].

Равносходимость рядов доказывается методом контурного интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам λ -плоскости, который широко используется при исследовании спектральных свойств ФДО [6, 11]. Для этого осуществляется переход к оператору Дирака, связанному с рассматриваемым ФДО.

Результаты данной работы существенно усиливают теоремы равносходимости из [12], снимая требование равенства нулю средних значений потенциалов. Приведенная техника и оценки резольвенты могут быть использованы для обобщения результатов из [10] на случай более сложного асимптотического поведения спектра.

2. Определение функционально-дифференциального оператора и связанных с ним краевых задач. В работе используются обозначения для рассматриваемых операторов и краевых задач из [10]. В данном пункте приводятся необходимые результаты из [10], а также вспомогательные результаты, получаемые аналогичным образом. Также в пункте 3 приводятся леммы 3.1 и 3.2, полученные соответственно в [10] и [12].

Рассматривается ФДО L в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), заданный на графе $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$. Ребро γ_1 представляет собой цикл, ребро γ_2 примыкает к γ_1 . Оператор L имеет вид

$$Ly = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \quad (2)$$

Здесь предполагается, что $x \in [0, 1]$, α_k, β_k — комплексные числа, $k = \overline{1, 2}$, $\beta_k^2 - \alpha_k^2 \neq 0$, $\beta_k \neq 0$, $p_{i,j} \in C^1[0, 1]$.

Обозначим через $\tilde{L}$ следующий оператор в пространстве вектор-функций размерности 4:

$$\tilde{L}z = Qz'(x) + P(x)z(x), \quad (3)$$

$$M_0z(0) + M_1z(1) = 0, \quad (4)$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2)$, $P(x) = \text{diag}(P_1(x), P_2(x))$, $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$, $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$, $k = \overline{1, 2}$; M_0, M_1 — квадратные матрицы размерности 4, причем $(M_0)_{11} = (M_0)_{31} = -(M_0)_{12} = -(M_0)_{33} = 1$, $(M_1)_{21} = (M_1)_{42} = -(M_1)_{22} = -(M_1)_{44} = 1$, остальные элементы этих матриц $(M_k)_{ij} = 0$.

Теорема 2.1 [10]. Если комплексное число λ таково, что резольвента R_λ оператора L существует и $y(x) = R_\lambda f$, то вектор-функция $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, где $z_1(x) = y_1(x)$, $z_2(x) = y_1(1-x)$, $z_3(x) = y_2(x)$, $z_4(x) = y_2(1-x)$, является решением (3)–(4). Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (3)–(4), и соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, то R_λ существует и $(R_\lambda f)(x) = (z_1(x), z_3(x))^T$.

Пусть $z(x) = z(x, \lambda) = \tilde{R}_\lambda F$ (в дальнейшем для краткости аргумент λ в обозначении решений различных задач будем опускать). Тогда $z(x)$ удовлетворяет задаче:

$$Qz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) + F(x), \quad (5)$$

$$M_0z(0) + M_1z(1) = 0, \quad (6)$$

где λ — спектральный параметр.

Лемма 2.1 [10]. При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $z(x) = BH(x, \lambda)v(x)$ приводит краевую задачу (5)–(6) к виду

$$v'(x) + P_\lambda(x)v(x) = \lambda Dv(x) + m(x, \lambda), \quad (7)$$

$$U_1(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \quad (8)$$

где $B = \text{diag}(B_1, B_2)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$, $b_k = \beta_k^{-1}[i\sqrt{d_k} + \alpha_k]$ ($k = 1, 2$), $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$, $D = \text{diag}(D_1, D_2)$, $D_k = \text{diag}(i/\sqrt{d_k}, -i/\sqrt{d_k})$, $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, $H_0(x) = \text{diag}(H_{01}(x), H_{02}(x))$, $H_{01} = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$, $H_{02} = \text{diag}(h_3(x), h_4(x))$, $h_i(x) = \exp\left\{-\int_0^x \tilde{p}_{ii}(t) dt\right\}$, $\tilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\tilde{P}(x)$ ($i = \overline{1, 4}$), $\tilde{P}(x) = \text{diag}(\tilde{P}_1(x), \tilde{P}_2(x))$, $\tilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$, $H_1(x) = \text{diag}(H_{11}(x), H_{12}(x))$, H_{1k} — кодиагональные матрицы, представляющие собой единственные решения матричных уравнений $H'_{0k}(x) + \tilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_kH_{1k}(x)) = 0$,

$$P_\lambda(x) = \lambda^{-1} H^{-1}(x, \lambda) [H'_1(x) + \tilde{P}(x) H_1(x)], \quad m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda) D B^{-1} F(x), \\ M_{0\lambda} = M_0 B H(0, \lambda), \quad M_{1\lambda} = M_1 B H(1, \lambda).$$

3. Исследование вспомогательных краевых задач. Исследуем решение вспомогательной задачи

$$w'(x) - \mu \tilde{D} w(x) = m(x), \quad (9)$$

$$U_1(w) = M_{0\lambda} w(0) + M_{1\lambda} w(1) = 0, \quad (10)$$

где $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$, $m_k(x) \in L[0, 1]$ ($k = \overline{1, 4}$),
 $\tilde{D} = \text{diag}(1, -1, d, -d)$, $d = \sqrt{d_1/d_2}$, $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, то есть $\lambda D = \mu \tilde{D}$.

Лемма 3.1 [10]. Если комплексное число μ таково, что матрица $\Delta_1(\mu) = U_1(V(x, \mu))$, где $V(x, \mu) = \text{diag}(e^{-\mu(1-x)}, e^{-\mu x}, e^{-\mu d(1-x)}, e^{-\mu d x})$ обратима, то краевая задача (9)–(10) однозначно разрешима при любой вектор-функции $m(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$, и ее решение имеет вид

$$w(x) = R_{1\mu} m(x) = -V(x, \mu) \Delta_1^{-1}(\mu) U_1(g_\mu m) + g_\mu m(x),$$

$$\text{где } g_\mu m(x) = \int_0^1 g(x, t, \mu) m(t) dt, \quad U_1(g_\mu m) = \int_0^1 U_{1x}(g(x, t, \mu)) m(t) dt,$$

(U_{1x} означает, что U_1 применяется к g по переменной x),

$$g(x, t, \mu) = \text{diag}(g_1(x, t, \mu), g_2(x, t, \mu), g_3(x, t, \mu), g_4(x, t, \mu)),$$

$$g_k(x, t, \mu) = \varepsilon(x, t) e^{\mu \omega_k(x-t)}, \text{ если } \text{Re}(\mu \omega_k) \leq 0,$$

$$g_k(x, t, \mu) = -\varepsilon(x, t) e^{\mu \omega_k(x-t)}, \text{ если } \text{Re}(\mu \omega_k) \geq 0, \quad (k = \overline{1, 4}),$$

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = -1, \omega_3 = d, \omega_4 = -d, \varepsilon(x, t) = 1 \text{ при } x \geq t, \varepsilon(x, t) = 0 \text{ при } x < t.$$

Рассмотрим также краевую задачу

$$w'(x) - \mu \tilde{D} w(x) = m(x), \quad (11)$$

$$U_0(w) = M_0 B H_0(0) w(0) + M_1 B H_0(1) w(1) = 0. \quad (12)$$

Лемма 3.2 [12]. Если комплексное число μ таково, что матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x, \mu))$ обратима, то краевая задача (11)–(12) однозначно разрешима при любой вектор-функции $m(x)$ с компонентами из пространства $L[0, 1]$, и ее решение имеет вид

$$w(x) = R_{0\mu} m(x) = -V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu m) + g_\mu m(x), \quad (13)$$

где $U_0(g_\mu m) = \int_0^1 U_{0x}(g(x, t, \mu)) m(t) dt$, (U_{0x} означает, что U_0 применяется к g по переменной x), $g_\mu m(x)$ и $V(x, \mu)$ имеют вид как в лемме 3.1.

Непосредственно вычисляя элементы матрицы $\Delta_0(\mu)$, получим корни определителя $\det \Delta_0(\mu)$:

$$\mu_k = k\pi i + \frac{i}{\sqrt{d_1}} \int_0^1 p_{11}(t) dt$$

и

$$\mu_k = -\frac{\ln b_2}{d} + \frac{i\pi k}{d} + \frac{i}{\sqrt{d_1}} \int_0^1 p_{21}(t) dt,$$

где k — целые числа. Удалив из комплексной μ -плоскости эти корни с круговыми окрестностями достаточно малого радиуса δ , получим область, которую назовем S_δ .

Исходя из лемм 3.1, 3.2 можно получить, что в области S_δ справедливы следующие оценки для решений задач (9)–(10) и (11)–(12):

$$\|R_{0\mu} m\|_\infty = O(\|m\|_1), \quad \|R_{0\mu} \varphi\|_\infty = O(\mu^{-1}), \quad (14)$$

$$\|R_{1\mu} m - R_{0\mu} m\|_\infty = O(\mu^{-1} \|m\|_1), \quad \|R_{1\mu} \varphi - R_{0\mu} \varphi\|_\infty = O(\mu^{-2}), \quad (15)$$

где $\varphi(x)$ — вектор-функция, компоненты которой — функции ограниченной вариации, $m(x)$ — вектор-функция с компонентами из $L[0, 1]$, $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) — норма в пространстве вектор-функций размерности 4 с компонентами из $L_\infty[0, 1]$ ($L[0, 1]$).

В [10] получено, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda) [v(x, \lambda, H^{-1}F_1) - R_{1\mu}(H_0^{-1}F_1)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0, \quad (16)$$

где $F_1(x) = DB^{-1}F(x)$, $v(x, \lambda, H^{-1}F_1)$ — решение задачи (7)–(8) при $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)F_1(x)$.

Используя оценки (14) – (15), по теореме Банаха – Штейнгауза получим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)R_{1\mu}(H_0^{-1}F_1) - H_0R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, из (16) и (17) следует

Лемма 3.3. Для любой вектор-функции $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$, компоненты которой $m_k(x) \in L[0, 1]$ ($k = \overline{1, 4}$), имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}(x, \lambda)m) - H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}m)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0. \quad (18)$$

Для решения (13) краевой задачи (11)–(12) докажем соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)R_{0\mu}m - R_{0\mu}(Qm)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0,$$

где $Q(x) = \text{diag}(q_1(x), q_1(1-x), q_2(x), q_2(1-x))$, функции $q_1(x), q_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1 и $q_1(0) = q_1(1) = q_2(0) = q_2(1) = 1$, $m(x)$ — вектор-функция размерности 4, компоненты которой принадлежат пространству $L[0, 1]$.

Лемма 3.4. Для любой вектор-функции $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$, компоненты которой $m_k(x) \in L[0, 1]$ ($k = \overline{1, 4}$), имеет место оценка:

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)] d\lambda \right\|_{\infty} = O(\|m\|_1). \quad (19)$$

Доказательство. Для первой компоненты вектора в условии леммы, учитывая, что $\mu = \lambda i / \sqrt{d_1}$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 d\lambda \right| &\leq |\sqrt{d_1}| \int_{|\mu|=r_1} |[Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1| |d\mu| = \\ &= |\sqrt{d_1}| \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right\} |[Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1| r_1 d\varphi, \end{aligned} \quad (20)$$

где $r_1 = r/|\sqrt{d_1}|$, $[\]_1$ обозначает первую компоненту вектора.

Пусть $\text{Re } \mu \geq 0$. В этом случае

$$[g_{\mu}m]_1 = - \int_x^1 e^{\mu(x-t)} m_1(t) dt,$$

и первый интеграл в (20) имеет следующую оценку:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_1 d\varphi \left| \int_x^1 e^{\mu(x-t)} (q_1(t) - q_1(x)) m_1(t) dt \right| &= O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_1 e^{-\text{Re } \mu(t-x)} |q_1(t) - q_1(x)| d\varphi \right) = \\ &= O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_1 e^{-r_1 \cos \varphi(t-x)} |t-x| d\varphi \right) = O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_1 e^{-r_1 \sin \tau(t-x)} (t-x) d\tau \right) = \\ &= O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_1 e^{-r_1 c_1 \tau(t-x)} (t-x) d\tau \right) = O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_0^{\frac{\pi r_1(t-x)/2}{2}} e^{-c_1 \xi} d\xi \right) = \\ &= O \left(\int_0^1 |m_1(t)| dt \right) = O(\|m\|_1). \end{aligned}$$

Здесь использовано, что $|q_1(t) - q_1(x)| \leq L|t - x|$, где $L > 0$ — некоторое число, $|e^\mu| = e^{\operatorname{Re} \mu}$, $\operatorname{Re} \mu = r_1 \cos \varphi$, $t \geq x$ в заданных пределах интегрирования, функция $e^{-r_1 \cos \varphi (t-x)}$ четная по переменной φ , $\sin \tau \geq c_1 \tau$ при $\tau \in (0, \pi/2)$, где c_1 — некоторая константа ($0 < c_1 < 2/\pi$). Произведены замены: $\varphi = \pi/2 - \tau$ и $\xi = r_1(t - x)\tau$.

Аналогично выполняется оценка второго интеграла в (20) при $\operatorname{Re} \mu \leq 0$ и остальных компонент вектора из условия леммы. При этом при оценке третьей и четвертой компонент вектора производится замена $\eta = \mu d$, и интеграл вычисляется по круговому контуру $|\eta| = r_1|d|$. $\square$

Непосредственно вычисляя элементы матриц в (13), получим

Лемма 3.5. Для любой вектор-функции $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$, $m_k(x) \in L[0, 1]$ ($k = \overline{1, 4}$), для компонент вектора

$$\Omega(x, \mu) = Q(x)V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu m) - V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu(Qm))$$

имеет место представление

$$\Omega_k(x, \mu) = \sum_{l=1}^4 J_{kl}(x, \mu),$$

где $k = \overline{1, 4}$, $l = \overline{1, 4}$ и

$$\left| \int_{|\mu|=r_1} J_{kl}(x, \mu) d\mu \right| = O(\|m\|_1). \quad (21)$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Re}(\mu d) \geq 0$, тогда

$$\begin{aligned} J_{11}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{11}e^{\mu(x-1)} \int_0^1 e^{-\mu t}(q_1(x) - q_1(t))m_1(t)dt, \\ J_{12}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{12}e^{\mu(x-1)}h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_1(x) - q_1(1-t))m_2(t)dt, \\ J_{21}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{21}e^{-\mu x} \int_0^1 e^{-\mu t}m_1(t)(q_1(1-x) - q_1(t))dt, \\ J_{22}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{22}e^{-\mu x}h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_1(1-x) - q_1(1-t))m_2(t)dt, \\ J_{31}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{31}e^{\mu d(x-1)} \int_0^1 e^{-\mu t}(q_2(x) - q_1(t))m_1(t)dt, \\ J_{32}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{32}e^{\mu d(x-1)}h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_2(x) - q_1(1-t))m_2(t)dt, \\ J_{33}(x, \mu) &= x_{33}e^{\mu d(x-1)} \left(\int_0^1 e^{-\mu dt}(q_2(x) - q_2(t))m_3(t)dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 e^{-\mu t}(q_1(t) - q_2(x))m_1(t)dt \right), \\ J_{34}(x, \mu) &= x_{34}e^{\mu d(x-1)} \left(h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_2(x) - q_1(1-t))m_2(t)dt - \right. \\ &\quad \left. - h_4(1) \int_0^1 e^{-\mu d(1-t)}(q_2(x) - q_2(1-t))m_4(t)dt \right), \\ J_{41}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{41}e^{-\mu dx} \int_0^1 e^{-\mu t}(q_2(1-x) - q_1(t))m_1(t)dt, \end{aligned}$$

$$J_{42}(x, \mu) = (b_1 - 1)x_{42}e^{-\mu dx}h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_2(1-x) - q_1(1-t))m_2(t)dt,$$

$$J_{43}(x, \mu) = x_{43}e^{-\mu dx} \left(\int_0^1 e^{-\mu t}(q_2(1-x) - q_2(t))m_3(t)dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 e^{-\mu t}(q_1(t) - q_2(1-x))m_1(t)dt \right),$$

$$J_{44}(x, \mu) = x_{44}e^{-\mu dx} \left(h_2(1) \int_0^1 e^{\mu(t-1)}(q_2(1-x) - q_1(1-t))m_2(t)dt - \right. \\ \left. - h_4(1) \int_0^1 e^{\mu d(t-1)}(q_2(1-x) - q_2(1-t))m_4(t)dt \right),$$

$$J_{13}(x, \mu) = J_{14}(x, \mu) = J_{23}(x, \mu) = J_{24}(x, \mu) = 0,$$

где x_{ij} — элементы матрицы $\Delta_0^{-1}(\mu)$ (их оценки, полученные непосредственным вычислением, приведены в [12]), $h_k(1)$ — диагональные элементы матрицы $H_0(1)$.

Продолжим функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ периодически с периодом 1 на всю действительную ось. Так как $q_1(0) = q_1(1) = q_2(0) = q_2(1)$, полученные периодические функции непрерывны и удовлетворяют условию Липшица первого порядка.

1. Докажем (21) для $J_{11}(x, \mu)$. Имеем

$$\left| \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} J_{11}(x, \mu) d\mu \right| \leq |b_1 - 1| \int_0^1 |m_1(t)| dt \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{11}| |q_1(x) - q_1(t)| |e^{-\mu(t+1-x)}| |d\mu|.$$

Так как $q_1(x)$ — периодическая функция с периодом 1, то $q_1(t) = q_1(2+t)$. Отсюда и из того, что $q_1(x)$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка, получим

$$|q_1(x) - q_1(t)| = |q_1(x) - q_1(2+t)| \leq L|x - 2 - t| = L(2+t-x),$$

так как $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq x \leq 1$. $L > 0$ — константа. Тогда, используя оценки для компонент матрицы $\Delta_0^{-1}(\mu)$, где $x_{11} = O(e^{-\mu})$, замену $\varphi = \pi/2 - \tau$, неравенство $\sin \tau \geq c_1 \tau$ при $\tau \in [0, \pi/2]$ (c_1 — константа, $0 < c_1 < 2/\pi$) и замену $\xi = r_1(2+t-x)\tau$, получим

$$\int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{11}| |q_1(x) - q_1(t)| |e^{-\mu(t+1-x)}| |d\mu| = O \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\operatorname{Re} \mu(2+t-x)} (2+t-x) r_1 d\varphi \right) = \\ = O \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \cos \varphi(2+t-x)} (2+t-x) r_1 d\varphi \right) = O \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 c_1 \tau(2+t-x)} (2+t-x) r_1 d\tau \right) = \\ = O \left(\int_0^{r_1(2+t-x)\pi/2} e^{-c_1 \xi} d\xi \right) = O(1).$$

Откуда следует (21) для $k=1, l=1$.

2. Докажем (21) для $J_{31}(x, \mu)$. Имеем

$$\left| \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} J_{31}(x, \mu) d\mu \right| \leq |b_1 - 1| \int_0^1 |m_1(t)| dt \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{31}| |q_2(x) - q_1(t)| |e^{-\mu(d(1-x)+t)}| |d\mu|.$$

Так как $q_1(x)$ и $q_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица первого порядка, периодичны с периодом 1, и $q_2(1) = q_1(0)$,

$$|q_2(x) - q_1(t)| = |q_2(x) - q_2(2) + q_1(0) - q_1(t)| \leq |q_2(x) - q_2(2)| + |q_1(0) - q_1(t)| \leq \\ \leq L_1|x - 2| + L_2| - t| \leq L(2-x+t),$$

где $L_1, L_2, L = \max\{L_1, L_2\}$ – положительные константы.

Пусть $\operatorname{Re} \mu \leq \operatorname{Re}(\mu d)$, тогда $x_{31} = O(e^{-\mu})$ и

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{31}| |q_2(x) - q_1(t)| |e^{-\mu d(1-x) - \mu t}| |d\mu| &\leq M \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\operatorname{Re}(\mu d)(1-x) - \operatorname{Re} \mu(t+1)} |q_2(x) - q_1(t)| |d\mu| \leq \\ &\leq M \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\operatorname{Re} \mu(2+t-x)} (2+t-x) |d\mu|, \end{aligned}$$

где $M > 0$ – некоторые константы, в разных неравенствах разные. Полученный интеграл оценивается так же, как интеграл в пункте 1 данного доказательства.

Пусть $\operatorname{Re} \mu \geq \operatorname{Re}(\mu d)$, тогда $x_{31} = O(e^{-\mu d})$ и

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{31}| |q_2(x) - q_1(t)| |e^{-\mu d(1-x) - \mu t}| |d\mu| &\leq M \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\operatorname{Re}(\mu d)(2-x) - \operatorname{Re} \mu t} |q_2(x) - q_1(t)| |d\mu| \leq \\ &\leq M \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\operatorname{Re}(\mu d)(2+t-x)} (2+t-x) |d\mu|, \end{aligned}$$

где $M > 0$ – некоторые константы, в разных неравенствах разные. Полученный интеграл после замены $\eta = \mu d$ оценивается так же, как интеграл в пункте 1 данного доказательства. Откуда следует справедливость (21) для $k = 3, l = 1$.

Аналогично доказывается (21) для остальных подынтегральных выражений $J_{kl}(x, \mu)$, а также для случаев, когда или одна, или обе действительные части $\operatorname{Re}(\mu)$ и $\operatorname{Re}(\mu d)$ меньше нуля. $\square$

С учетом лемм 3.4 и 3.5 так же как в [13] доказывается

Теорема 3.1. Если матрица $Q(x) = \operatorname{diag}(q_1(x), q_1(1-x), q_2(x), q_2(1-x))$ такова, что функции $q_1(x), q_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1 и $q_1(0) = q_1(1) = q_2(0) = q_2(1) = 1, b_1 \neq 1, b_2 \neq 0$, то для любой вектор-функции $t(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)R_{0\mu}t - R_{0\mu}(Qt)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0. \quad (22)$$

4. Основные результаты.

Теорема 4.1. Пусть $A(x) = \operatorname{diag}(a_1(x), a_1(1-x), a_2(x), a_2(1-x))$, $a_1(0) = a_1(1) = a_2(0) = a_2(1)$, $a_1(x), a_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, $G(x) = BA(x)B^{-1}$, $\beta_k^2 \neq \alpha_k^2, \beta_k \neq 0$ ($k = \overline{1, 2}$). Тогда для любой вектор-функции $F(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x), f_2(1-x))^T$ с компонентами из $L[0, 1]$ выполняется соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|G(x)\widetilde{S}_r(F, x) - \widetilde{S}_r(GF, x)\|_{\infty} = 0, \quad (23)$$

где $\widetilde{S}_r(F, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda} F d\lambda$ – частичная сумма ряда Фурье вектор-функции $F(x)$ по собственным и

присоединенным функциям оператора $\widetilde{L}$, включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$.

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\int_0^1 p_{11}(t)dt = \int_0^1 p_{21}(t)dt = 0$. Тогда для компонент матрицы $H_0(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x))$ выполнены условия $h_k(0) = h_k(1) = 1$ ($k = \overline{1, 4}$). Функции $h_k(x) \in C^1[0, 1]$ и удовлетворяют условию Липшица порядка 1. Поэтому в (22) в качестве $Q(x)$ можно взять $H_0(x)$. Тогда, используя леммы 2.1, 3.3 и теорему 3.1, получим

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda} F d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} BH(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}(x, \lambda)F_1) d\lambda = \int_{|\lambda|=r} BH_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1) d\lambda + o(1) = \\ &= \int_{|\lambda|=r} BR_{0\mu}(H_0H_0^{-1}F_1) d\lambda + o(1), \end{aligned}$$

где $\|o(1)\|_\infty \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $F_1(x) = DB^{-1}F(x)$. Таким образом, имеем

$$\int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda F d\lambda = \int_{|\lambda|=r} BR_{0\mu}(F_1) d\lambda + o(1). \quad (24)$$

Пусть $a_1(0) = a_1(1) = a_2(0) = a_2(1) = c$, где c — константа, и $A(x) = cA_1(x)$. Тогда $A_1(x)$ — диагональная матрица, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1, и в силу перестановочности диагональных матриц $A(x)$ и D получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=r} A(x)R_{0\mu}(F_1) d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} cR_{0\mu}(A_1F_1) d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(ADB^{-1}F) d\lambda + o(1) = \\ &= \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DAB^{-1}F) d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DB^{-1}BAB^{-1}F) d\lambda + o(1). \end{aligned}$$

То есть при $r \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_{|\lambda|=r} A(x)R_{0\mu}(F_1) d\lambda = \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DB^{-1}GF) d\lambda + o(1). \quad (25)$$

Из (24) и (25) получим

$$G(x) \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda F d\lambda = BA(x) \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(F_1) d\lambda + o(1) = B \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DB^{-1}GF) d\lambda + o(1). \quad (26)$$

Положим $\Phi(x) = G(x)F(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x))^T$. Нетрудно проверить инвариантность свойства симметрии компонент для функции $\Phi(x)$: $\varphi_2(x) = \varphi_1(1-x)$ и $\varphi_4(x) = \varphi_3(1-x)$. Поэтому из (26), используя предыдущие рассуждения в обратном порядке, получим

$$\begin{aligned} G(x) \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda F d\lambda &= B \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DB^{-1}\Phi) d\lambda + o(1) = \\ &= B \int_{|\lambda|=r} H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}DB^{-1}\Phi) d\lambda + o(1) = \\ &= \int_{|\lambda|=r} BH(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}(x, \lambda)DB^{-1}\Phi) d\lambda + o(1) = \\ &= \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda \Phi d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda (GF) d\lambda + o(1) \end{aligned}$$

при $r \rightarrow \infty$. Откуда следует (23).

2. Пусть теперь $\int_0^1 p_{11}(t)dt = a_1 \neq 0$, $\int_0^1 p_{21}(t)dt = a_2 \neq 0$. Контур интегрирования в (23) лежит в области $\widetilde{S}_{\delta_0}$,

образованной из комплексной λ -плоскости удалением чисел $\lambda_k = k\pi\sqrt{d_1} + a_1$ и

$\lambda_k = k\pi\sqrt{d_2} + i\sqrt{d_2} \ln b_2 + a_2$ (k — целое число) вместе с их окрестностями достаточно малого радиуса δ_0 .

Рассмотрим оператор

$$L_1 y = \begin{pmatrix} \alpha_1 y'_1(x) + \beta_1 y'_1(1-x) + \widetilde{p}_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y'_2(x) + \beta_2 y'_2(1-x) + \widetilde{p}_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \end{pmatrix},$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0),$$

где $\widetilde{p}_{11}(x) = p_{11}(x) - a_1$, $\widetilde{p}_{21}(x) = p_{21}(x) - a_2$, который порождает оператор

$$\widetilde{L}_1 z = Qz'(x) + \widetilde{P}_1(x)z(x), \quad M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0.$$

В $\widetilde{L}_1$ матрица $\widetilde{P}_1(x)$ определяется через $\widetilde{p}_{11}(x)$, $p_{12}(x)$, $\widetilde{p}_{21}(x)$, $p_{22}(x)$ так же, как $P(x)$ в (3), матрица Q такая же, как в операторе $\widetilde{L}$.

Пусть $\widetilde{R}_\lambda^1$ — резольвента оператора $\widetilde{L}_1$. Тогда $\int_0^1 \widetilde{p}_{11}(x)dx = \int_0^1 \widetilde{p}_{21}(x)dx = 0$, и по уже доказанному

$$G(x) \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda^1 F d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda^1 (GF) d\lambda + o(1). \quad (27)$$

В (27) интегрирование ведется по круговым контурам, целиком лежащим в области S_{δ_1} , образованной удалением из комплексной плоскости точек $\lambda_k = k\pi\sqrt{d_1}$ и $\lambda_k = k\pi\sqrt{d_2} + i \ln b_2 \sqrt{d_2}$ (k — целое число) вместе с их окрестностями достаточно малого радиуса δ_1 .

В области $\tilde{S}_\delta = \tilde{S}_{\delta_0} \cap S_{\delta_1}$ справедлива формула:

$$(\tilde{R}_\lambda - \tilde{R}_\lambda^1)F = \tilde{R}_\lambda^1(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda F.$$

Из (18) следует, что

$$\tilde{R}_\lambda F = BH(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}DB^{-1}F) = BH_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}DB^{-1}F) + o(1).$$

Отсюда, учитывая оценки (14)–(15), для резольвенты оператора $\tilde{L}$ и аналогично для резольвенты оператора $\tilde{L}_1$ получаем

$$\|\tilde{R}_\lambda F\|_\infty = O(\|F\|_1), \quad \|\tilde{R}_\lambda^1 F\|_\infty = O(\|F\|_1).$$

Оператор $(\tilde{L}_1 - \tilde{L})$ представляет собой покомпонентное умножение функции $z(x)$ на скалярные величины, следовательно, для любой вектор-функции $F(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}_\lambda F - \tilde{R}_\lambda^1 F\|_\infty &= \|\tilde{R}_\lambda^1(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda F\|_\infty = O(\|(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda F\|_\infty) = \\ &= O(\|\tilde{R}_\lambda F\|_\infty) = O(\|F\|_1). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(x)$ — вектор-функция, компоненты которой являются функциями ограниченной вариации. Учитывая оценки (14)–(15), для резольвент операторов $\tilde{L}$ и $\tilde{L}_1$ доказываются формулы:

$$\|\tilde{R}_\lambda \varphi\|_\infty = O(\lambda^{-1}), \quad \|\tilde{R}_\lambda^1 \varphi\|_\infty = O(\lambda^{-1}).$$

Следовательно,

$$\|\tilde{R}_\lambda \varphi - \tilde{R}_\lambda^1 \varphi\|_\infty = \|\tilde{R}_\lambda^1(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda \varphi\|_\infty = O(\lambda^{-1}\|(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda \varphi\|_\infty) = O(\lambda^{-2}).$$

Тогда

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} [\tilde{R}_\lambda \varphi - \tilde{R}_\lambda^1 \varphi] d\lambda \right\|_\infty \leq M_1 \int_{|\lambda|=r} \left| \frac{d\lambda}{\lambda^2} \right| \leq \frac{M_2}{r},$$

где $M_1 > 0, M_2 > 0$ — некоторые числа. Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [\tilde{R}_\lambda \varphi - \tilde{R}_\lambda^1 \varphi] d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

Так как множество функций ограниченной вариации всюду плотно в $L[0, 1]$, по теореме Банаха – Штейнгауза для любой вектор-функции $F(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$ имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [\tilde{R}_\lambda F - \tilde{R}_\lambda^1 F] d\lambda \right\|_\infty = 0. \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует соотношение (23) для $\tilde{R}_\lambda F$. $\square$

Теорема 4.2. Пусть $a(x) = \text{diag}(a_1(x), a_2(x))$, где $a_1(x), a_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, $a_1(x) = a_1(1-x)$, $a_2(x) = a_2(1-x)$, $a_1(0) = a_1(1) = a_2(0) = a_2(1)$, $\beta_k^2 \neq \alpha_k^2$, $\beta_k \neq 0$ ($k = 1, 2$), $p_{ij} \in C^1[0, 1]$ ($i, j = 1, 2$). Тогда для любой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|a(x)S_r(f, x) - S_r(af, x)\|_\infty = 0, \quad (29)$$

где $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$ — частичная сумма ряда Фурье вектор-функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L , включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$.

Доказательство. Имеем $[R_\lambda f]_1 = [\tilde{R}_\lambda F]_1$, $[R_\lambda f]_2 = [\tilde{R}_\lambda F]_3$, где $F(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x), f_2(1-x))^T$. Положим $A(x) = \text{diag}(a_1(x), a_1(1-x), a_2(x), a_2(1-x))$, тогда, перемножив матрицы в теореме 4.1, получим $G(x) = BA(x)B^{-1} = A(x) = \tilde{A}(x)$, где $\tilde{A}(x) = \text{diag}(a_1(x), a_1(x), a_2(x), a_2(x))$ (так как $a_1(x) = a_1(1-x)$, $a_2(x) = a_2(1-x)$), и соотношение (23) принимает вид

$$\tilde{A}(x) \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda F d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda (\tilde{A}F) d\lambda + o(1). \quad (30)$$

Из (30), рассматривая первую и третью компоненты, получим соотношения:

$$\begin{aligned} a_1(x) \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda f]_1 d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda (af)]_1 d\lambda + o(1), \\ a_2(x) \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda f]_2 d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda (af)]_2 d\lambda + o(1), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Если потребовать от $a(x)$ только лишь условий классической теоремы Штейнгауза, то удастся доказать теорему о покомпонентной равносходимости на внутренних компактах ребер графа. Тем самым на внутренних участках ребер сохраняется классический характер сходимости, а влияние структуры узлов локализуется в их окрестностях. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу:

$$w'(x) = \mu \tilde{D} w(x) + m(x), \quad (31)$$

$$U^0(w) = w(0) - w(1) = 0, \quad (32)$$

где $\tilde{D} = \text{diag}(1, -1, d, -d)$, $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$ — вектор-функция с компонентами из $L[0, 1]$.

Удалим из области S_δ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ_0 собственные значения $\mu_k = \frac{2\pi i k}{\omega_j}$ (k — целые числа) краевых задач:

$$w'(x) = \mu \omega_j w(x), \quad w(0) - w(1) = 0 \quad (j = \overline{1, 4}),$$

где $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = d$, $\omega_4 = -d$, и получившуюся область обозначим S_{δ_0} . Тогда в S_{δ_0} краевая задача (31)–(32) однозначно разрешима и ее решение имеет вид:

$$w(x, \mu) = R_{2\mu} m(x) = -V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) U^0(g_\mu m(x)) + g_\mu m(x), \quad (33)$$

где $\Delta_{00}^{-1}(\mu) = U^0(V(x, \mu))$, а $V(x, \mu)$ и $g_\mu m(x)$ те же, что и в лемме 3.1.

Лемма 4.1. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\mu|=r_1} H_0 J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0, \quad (34)$$

где $J(x, \mu) = R_{0\mu} m(x) - R_{2\mu} m(x)$, $r_{1,k} = \lambda i / \sqrt{d_k}$, $r_1 = \min |r_{1,k}|$, $\delta \in (0, 1/2)$, $\|\cdot\|_{C[\delta, 1-\delta]}$ — норма в пространстве вектор-функций, непрерывных на отрезке $[\delta, 1-\delta]$.

Доказательство. Из (13) и (33) известно, что

$$J(x, \mu) = V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) U^0(g_\mu m(x)) - V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu m(x)) = J_1(x, \mu) + J_2(x, \mu),$$

где $J_1(x, \mu) = V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) U^0(g_\mu m(x))$, $J_2(x, \mu) = -V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu m(x))$.

1. Пусть $\text{Re } \mu \geq 0$, $d > 0$. Рассмотрим $J_1(x, \mu)$. Обозначим элементы матрицы

$V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) = \{\gamma_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, 4}$). Для элемента γ_{11} получим оценку $\gamma_{11} = O(e^{\mu(x-1)}) = O(e^{-\mu\delta}) = O(e^{-\mu\delta_1})$ ($\delta_1 = \min\{\delta, d\delta\}$). Аналогично можно показать, что все остальные компоненты этой матрицы имеют такую же оценку. Таким образом, получаем, что

$$V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) = O(e^{-\mu\delta_1}). \quad (35)$$

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} \|U^0(g_\mu m(x))\|_\infty &= \max_{0 \leq x \leq 1} \left(\max_{1 \leq k \leq 4} \left| \int_0^1 g_k(0, t, \mu) m_k(t) dt - \int_0^1 g_k(1, t, \mu) m_k(t) dt \right| \right) = \\ &= O\left(\int_0^1 \sum_{k=1}^4 |m_k(t)| dt \right) = O(\|m\|_1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (35) получаем, что $\|J_1(x, \mu)\|_\infty = O(e^{-\mu\delta_1} \|m\|_1)$. Аналогично можно получить такую же оценку для $J_2(x, \mu)$. Таким образом, доказано, что при $\text{Re } \mu \geq 0$, $d > 0$

$$\|J(x, \mu)\|_\infty = O(e^{-\mu\delta_1} \|m\|_1). \quad (36)$$

Аналогичным образом можно показать, что при $\operatorname{Re} \mu \leq 0$, $d > 0$ будет выполняться оценка

$$\|J(x, \mu)\|_{\infty} = O(e^{\mu \delta_1} \|m\|_1). \quad (37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \int_{|\mu|=r_1} J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} &= O \left(\int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\mu \delta_1} \|m\|_1 |d\mu| + \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \leq 0}} e^{\mu \delta_1} \|m\|_1 |d\mu| \right) = \\ &= O \left(\|m\|_1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi \right) \right) = \\ &= O \left(\|m\|_1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi \right) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \sin \tau \delta_1} r_1 d\tau \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 c_1 \tau \delta_1} r_1 d\tau = O(1).$$

Здесь использованы: замена $\varphi = \pi/2 - \tau$, оценка $\sin \tau \geq c_1 \tau$ при $\tau \in (0, \pi/2)$, где c_1 — некоторая константа ($0 < c_1 < 2/\pi$). Такую же оценку можно получить и для второго интеграла. Таким образом, получаем, что

$$\left\| \int_{|\mu|=r_1} J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O(\|m\|_1). \quad (38)$$

В силу ограниченности $H_0(x)$ и (38) получаем, что

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\mu|=r_1} H_0 J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O(\|m\|_1). \quad (39)$$

2. Пусть теперь компоненты $m_k(x) = \varphi_k(x)$ есть функции ограниченной вариации. Используя представление для $g_\mu m(x)$ из леммы 3.1 и интегрирование по частям, получим, что $\|U^0(g_\mu \varphi)\|_{\infty} = O(\mu^{-1})$. Аналогично выполняется и то, что $\|U_0(g_\mu \varphi)\|_{\infty} = O(\mu^{-1})$. Тогда отсюда и из (36), (37) получаем при $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $d > 0$

$$\|J(x, \mu)\|_{\infty} = O\left(\frac{e^{-\mu \delta_1}}{\mu}\right).$$

Аналогично, при $\operatorname{Re} \mu \leq 0$, $d > 0$

$$\|J(x, \mu)\|_{\infty} = O\left(\frac{e^{\mu \delta_1}}{\mu}\right).$$

Тогда, интегрируя по контуру $|\mu| = r_1$, получаем, что

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\mu|=r_1} H_0 [R_{0\mu} \varphi(x) - R_{2\mu} \varphi(x)] d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0.$$

Отсюда и из (39) по теореме Банаха – Штейнгауза получаем утверждение леммы. $\square$

Теорема 4.3. Если $a(x) = \operatorname{diag}(a_1(x), a_2(x))$, $a_1(x), a_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, то для любой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|a(x) S_r(f, x) - S_r(af, x)\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0, \quad (40)$$

где $\delta \in (0; 1/2)$, $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$ — частичная сумма ряда Фурье вектор-функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L , включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$.

Доказательство. С помощью лемм 3.3 и 4.1 нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}F_1) - H_0 R_{2\mu}(H_0^{-1}F_1)] d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \leq \\ & \leq \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}F_1) - H_0 R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1)] d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} + \\ & + \left\| \int_{|\lambda|=r} H_0 R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1) - H_0 R_{2\mu}(H_0^{-1}F_1) d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

так как $\left\| \int_{|\mu|=r_1} H_0 J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Откуда следует, что

$$\int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda F_1 d\lambda = \int_{|\lambda|=r} z(x) d\lambda = \int_{|\lambda|=r} B H_0 R_{2\mu}(H_0^{-1}F_1) d\lambda + o(1),$$

где $\|o(1)\|_{C[\delta, 1-\delta]} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $F_1(x) = B^{-1}Q^{-1}F(x)$, $\tilde{R}_\lambda$ — резольвента оператора $\tilde{L}$.

Согласно теореме 2.1 $R_\lambda f = (z_1(x), z_3(x))^T$, где $z_1(x)$ и $z_3(x)$ — компоненты вектора $z(x, \lambda)$ — решения задачи (5)–(6). Поэтому для первой компоненты $S_r(f, x)$, как в теореме 5 из [14], имеем:

$$(S_r(f, x))_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} z_1(x) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} [B H_0 R_{2\mu}(H_0^{-1}F_1)]_1 d\lambda = \sigma_{r_1}(f_1, x) + o(1),$$

где $\sigma_{r_1}(f_1, x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f_1(x)$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i k x}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r_1$, $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [\delta, 1-\delta]$. Отсюда имеем для первой компоненты:

$$(S_r(f, x))_1 = \sigma_{r_1}(f_1, x) + o(1). \quad (41)$$

По теореме Штейнгауза [1] известно, что

$$a_1(x)\sigma_{r_1}(f_1, x) = \sigma_{r_1}(a_1 f_1, x) + o(1).$$

Отсюда и из (41) имеем:

$$a_1(x)(S_r(f, x))_1 = a_1(x)\sigma_{r_1}(f_1, x) + o(1) = \sigma_{r_1}(a_1 f_1, x) + o(1) = (S_r(a f, x))_1 + o(1).$$

Аналогично можно показать, что $a_2(x)(S_r(f_2, x))_2 = (S_r(a f, x))_2 + o(1)$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$

5. Заключение. В работе установлена равносходимость рядов $\tilde{S}(G(x)F)$ и $G(x)\tilde{S}(GF)$, где $\tilde{S}(F)$ — ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора $\tilde{L}$, заданного в пространстве вектор-функций размерности 4 и связанного с рассматриваемым ФДО L . Также установлена равносходимость рядов $S(a f)$ и $a(x)S(f)$, где $S(f)$ — ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям ФДО L , а элементы $a_1(x)$ и $a_2(x)$ диагональной матрицы $a(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, $a_1(x) = a_1(1-x)$, $a_2(x) = a_2(1-x)$ и $a_1(0) = a_1(1) = a_2(0) = a_2(1)$. Наконец, доказан аналог теоремы Штейнгауза, а именно: равносходимость рядов $S(a f)$ и $a(x)S(f)$, где $a(x)$ — диагональная матрица порядка 2, компоненты которой удовлетворяют условию Липшица порядка 1.

Список литературы

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз; 1961. 936 с.
2. Ильин В.А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора. *Математические заметки*. 1977;22(5):679–698.
3. Ломов И.С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2015;15(4):405–418. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418>
4. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов. *Математические заметки*. 2011;90(1):22–33. <https://doi.org/10.4213/mzm8628>
5. Рыхлов В.С. О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза. *Таврический вестник информатики и математики*. 2015;3(28):62–81. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26153987>
6. Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией. *Доклады РАН*. 2007;414(4):443–446.

7. Baskakov A.G., Krishtal I.A., Romanova E.Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution. *Journal of Evolution Equations*. 2017;17:669–684. <https://doi.org/10.1007/s00028-016-0332-8>
8. Владыкина В.Е., Шкаликов А.А. Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией. *Математические заметки*. 2019;106(5):643–659. <https://doi.org/10.4213/mzm12557>
9. Крицков Л.В., Сарсенби А.М. Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией. *Дифференциальные уравнения*. 2015;51(7):990–996. <https://doi.org/10.1134/S0374064115080026>
10. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл. *Дифференциальные уравнения*. 2007;43(12):1597–1605. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-1-9-14>
11. Бурлуцкая М.Ш. Теорема Жордана – Дирихле для функционально-дифференциального оператора с инволюцией. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2013;13(3):9–14. DOI: 10.18500/1816-9791-2013-13-3-9-14
12. Григорьева Е.И. Теорема равносходимости для функционально-дифференциального оператора с инволюцией на графе. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. 2026;1:27–39.
13. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2009;9(4):3–10. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-1-3-10>
14. Бурлуцкая М.Ш. Теорема равносходимости для интегрального оператора на простейшем графе с циклом. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2008;8(4):8–13. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-4-8-13>

References

1. Bari NK. A treatise on trigonometric series. Oxford, New York: Pergamon Press; 1964. 553 p. (In Russ.)
2. Il'in VA. Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1977; 22: 870–882. <https://doi.org/10.1007/BF01098352> (In Russ.)
3. Lomov IS. Estimates of speed of convergence and equiconvergence of spectral decomposition of ordinary differential operators *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2015; 15(4): 405–418. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418> (In Russ.)
4. Burlutskaya MSh, Khromov AP. The Steinhaus theorem on equiconvergence for functional-differential operators. *Mathematical Notes*. 2011;90(1):22–33. <https://doi.org/10.1134/S0001434611070030> (In Russ.)
5. Rykhlov VS. On the rate of equiconvergence in an analogue of the Steinhaus theorem. *Tavricheskii vestnik informatiki i matematiki [Taurida journal of computer science theory and mathematics]*. 2015; 3(28): 62–81. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26153987>
6. Burlutskaya MSh, Kurdyumov VP, Lukonina AS, Khromov AP. Functional-differential operator with involution. *Dokl. Math.*. 2007;75(4):399–402. <https://doi.org/10.1134/S1064562407030180> (In Russ.)
7. Baskakov AG, Krishtal IA, Romanova EYu. Spectral analysis of a differential operator with an involution. *Journal of Evolution Equations*. 2017;17:669–684. <https://doi.org/10.1007/s00028-016-0332-8>
8. Vladykina VE, Shkalikov AA. Regular ordinary differential operators with involution. *Mathematical Notes*. 2019;106(5):674–687. <https://doi.org/10.1134/S0001434619110026> (In Russ.)
9. Kritskov LV, Sarsenbi AM. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution. *Differential Equations*. 2015;51(7):984–990. <https://doi.org/10.1134/S0012266115080029> (In Russ.)
10. Burlutskaya MSh, Khromov AP. On the equiconvergence of eigenfunction expansions for a first-order functional-differential operator on a cycle-containing graph with two edges. *Differential Equations*. 2007;43(12): 1597–1605. <https://doi.org/10.1134/S0012266107120038> (In Russ.)
11. Burlutskaya MSh. Jordan–Dirichlet theorem for a functional-differential operator with involution. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2013;13(3):9–14. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-3-9-14> (In Russ.)
12. Grigoryeva EI. Equiconvergence theorem for a functional-differential operator with involution on a graph. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.*. 2026;1:27–39. (In Russ.)
13. Burlutskaya MSh, Khromov AP. On the same theorem on a equiconvergence at the whole segment for the functional-differential operators. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2009;9(4):3–10. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-1-3-10> (In Russ.)
14. Burlutskaya MSh. Equiconvergence theorem for an integral operator on the simplest graph with a cycle. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2008;8(4):8–13. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-4-8-13> (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.05.2026

Поступила после рецензирования 08.07.2026

Принята к публикации 14.07.2026

Received May 18, 2026

Revised July 8, 2026

Accepted July 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Григорьева Елена Игоревна – преподаватель кафедры математического моделирования математического факультета, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Elena I. Grigorieva – Lecturer of the Department of Mathematical Modeling, Faculty of Mathematics Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)