

О достаточных условиях слабого экстремума квадратичного функционала с интегралом Стильтьеса

Казакевич К. И.^{}, Шабров С. А.^{}

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
klimchik26@gmail.com, shaspoteha@mail.ru

Аннотация. В работе изучается квадратичный функционал, содержащий вторые производные, который равен потенциальной энергии системы, состоящей из цепочки шарнирно соединённых стержней, и помещённый в неоднородную среду с локализованными особенностями. Возникающая краевая задача, как необходимое условие экстремума, имеет негладкие решения. Трудности, связанные с потерей гладкости у решений возникающих граничных задач, мы преодолеваем, используя концепцию поточечной трактовки дифференциального уравнения, которая показала свою эффективность при анализе решений дифференциальных уравнений с негладкими решениями не только второго порядка, но и более высокого. Получены достаточные условия слабого экстремума квадратичного функционала с производными Радона – Никодима.

Ключевые слова: функционал, производная по мере, слабый экстремум

Для цитирования: Казакевич К.И., Шабров С.А. О достаточных условиях слабого экстремума квадратичного функционала с интегралом Стильтьеса. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):226–231.
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-226-231 EDN NHYWLB

Original Research

On Sufficient Conditions for the Weak Extremum of a Quadratic Functional with the Stieltjes Integral

Klimentiy I. Kazakevich^{}, Sergey A. Shabrov^{}

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)
Voronezh State University,

1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
klimchik26@gmail.com, shaspoteha@mail.ru

Abstract. The paper studies a quadratic functional containing second derivatives, which is equal to the potential energy of a system consisting of a chain of pivotally connected rods, and placed in an inhomogeneous medium with localized features. The resulting boundary value problem, as a necessary condition for the extremum, has non-smooth solutions. We overcome the difficulties associated with the loss of smoothness in solutions of emerging boundary value problems using the concept of a point-by-point interpretation of a differential equation, which has shown its effectiveness in analyzing solutions of differential equations with non-smooth solutions not only of the second order, but also of a higher one. The latter circumstance has a simple explanation: at each point, the equations are regarded as a relationship between the value of the solution and its derivatives up to a certain order, in contrast to the theory of generalized functions, where it is understood as the equality of two functionals over the basic space. Sufficient conditions for the weak extremum of a quadratic functional with Radon-Nicodemus derivatives are obtained.

Keywords: Functional, Measure Derivative, Weak Extremum

For citation: Kazakevich KI, Shabrov SA. On Sufficient Conditions for the Weak Extremum of a Quadratic Functional with the Stieltjes Integral. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):226–231. (In Russ.)
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-226-231 EDN NHYWLB

1. Введение. Интенсивное применение производных по мере началось после выхода работы Ю. В. Покорного [1] в 1999 году. В дальнейшем Покорным и его учениками была построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вплоть до осциллирующих теорем [2, 3, 4, 5]; и в дальнейшем результаты были перенесены на уравнение с разрывными решениями [6] и на краевые задачи более высокого порядка [7, 8, 9]. Эффективность этого подхода была обусловлена тем фактором, что уравнение рассматривалось как связь между значениями его решения и производными до определенного порядка, то есть как обыкновенное, в отличие от теории обобщенных функций, где уравнение расценивается как равенство двух функционалов над некоторым основным пространством. В этом случае приходится говорить лишь о слабом решении, что для приложений,

в большинстве случаев, недостаточно. Более того, существует ряд нерешенных проблем, например, умножение обобщенной функции на разрывную (см., напр., [10]). В то же время теория обобщенных функций показала свою эффективность в спектральных вопросах (см. работы [11, 12, 13, 14] и многие другие).

2. О необходимом условии экстремума функционала. Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{pu_{x\mu}''^2}{2} d\mu + \int_0^\ell \frac{ru_x'^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ + \int_0^\ell u dF, \quad (1)$$

который может быть рассмотрен как функционал полной энергии системы, состоящей из растянутых стержней, соединенных шарнирно. Мы считаем его заданным на множестве E — абсолютно непрерывных на $[0; \ell]$ функций, первая производная которых μ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, вторая квазипроизводная $pu_{x\mu}''(x)$ — имеет конечное на $[0; \ell]$ изменение. При этом $u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$.

В работах [7, 15] было получено необходимое условие экстремума функционала (1) на множестве E , а именно, если $u_0(x)$ дает минимум $\Phi(u)$ на E , то существует строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция $\sigma(x)$, которая порождает на $[0; \ell]$ меру, такую, что $u_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} (pu_{x\mu}''')'_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В [8, 7] задача (2) достаточно подробно изучена, в частности получены достаточные условия её однозначной разрешимости, доказано существование функции Грина, изучен спектр (когда в правой части уравнения из (2) вместо $F'_\sigma(x)$ ставится $\lambda M'_\sigma(x)u$).

Однако достаточные условия минимума функционала $\Phi(u)$ на E в указанных работах не рассматривались.

3. Основные результаты. Нам удобно считать, что производная первого порядка (как квазипроизводная третьего порядка) задана на специальном расширении отрезка $[0; \ell]$, которое мы в дальнейшем будем обозначать $\overline{[0; \ell]}_S$. Строится оно следующим образом. Пусть $\mu(x)$ — строго возрастающая и ограниченная на $[0; \ell]$ функция; через $S(\mu)$ обозначим множество точек разрыва функции $\mu(x)$. На множестве $[0; \ell] \setminus S(\mu)$ введем метрику $\rho_\mu(x; y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Если $S(\mu) \neq \emptyset$, что мы и будем далее предполагать, то метрическое пространство $([0; \ell] \setminus S(\mu); \rho_\mu)$ неполное. Стандартное пополнение с точностью до изоморфизма и дает нам $\overline{[0; \ell]}_S$. Отметим, что в этом множестве вместо точки $\xi \in S(\mu)$ появляются два собственных элемента ξ_-, ξ_+ , которые ранее были символами предельных переходов (см. рисунок 1).

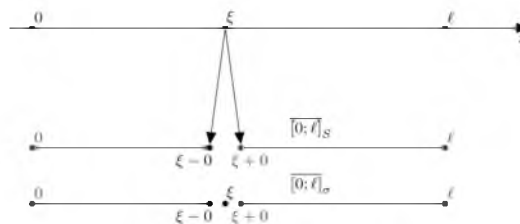


Рис. 1. Структура множеств $\overline{[0; \ell]}_S$ и $\overline{[0; \ell]}_\sigma$

Fig. 1. Structure of the set $\overline{[0; \ell]}_S$ and $\overline{[0; \ell]}_\sigma$

Сохраняя естественную упорядоченность, мы будем иметь $x < \xi_- < \xi_+ < y$ для всех x и y , для которых ранее было $x < \xi < y$. Само уравнение из (2) мы считаем заданным на множестве $\overline{[0; \ell]}_\sigma = \overline{[0; \ell]}_S \cup S(\sigma)$, в котором точки $\xi \in S(\sigma)$ «вставлены» на свои прежние места (см. рисунок 1), причем в этих точках понимается как равенство

$$\Delta p(u_{x\mu}'')'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ .

Мы будем предполагать выполненными следующие условия:

- 1) $x, \mu(x), p(x), r(x), Q(x), F(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$;
- 2) $\inf_{x \in [0; \ell]} p(x) > 0$;

При этих условиях, как нетрудно увидеть, вторая вариация $\delta^2\Phi(u_0)h$ имеет вид:

$$\delta^2\Phi(u_0)h = \int_0^\ell p h_{x\mu}'^2 d\mu + \int_0^\ell r h_x'^2 dx + \int_0^\ell h^2 dQ, \quad (3)$$

где $u_0(x)$ является решением (2).

Для того, чтобы функция $u_0(x)$ давала слабый минимум на E , достаточно, чтобы вторая итерация (3) была неотрицательна на E , т. е.

$$\delta^2\Phi(u_0)h \geq 0$$

для всех $h \in E$.

Заметим, что если помимо условий 1)–2) дополнительно потребовать, чтобы $r(x) \geq 0$ и $Q'_\sigma(x) \geq 0$, то вторая вариация $\delta^2\Phi(u_0)h$ будет неотрицательна.

Однако, если одно или оба этих требования убрать, то гарантировать неотрицательность второй вариации мы не можем.

Предположим, что при некоторой $h_0(x)$, принадлежащей множеству E , вторая вариация (3) отрицательна. Без ограничения общности мы можем считать, что $\int_0^\ell h_0^2(x) d\sigma(x) = 1$, другими словами мы можем считать $h_0(x)$ нормированной функцией.

Лемма 3.1. Пусть $Q(x)$ и $r(x)$ – функции ограниченной на $[0; \ell]$ вариации. Тогда существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что неравенства

$$\int_0^\ell r h_x'^2 dx \leq c_1 \int_0^\ell h_{x\mu}'^2(x) d\mu \quad (4)$$

и

$$\int_0^\ell h^2 dQ \leq c_2 \int_0^\ell h_{x\mu}'^2(x) d\mu \quad (5)$$

справедливы для всех функций h , принадлежащих множеству E .

Доказательство. Из представления $h'_x(x) = \int_0^x h''_{x\mu}(t) d\mu(t)$, справедливого для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$, и так как $h \in E$, т. е. $h'(0) = 0$, мы находим

$$|h'_x(x)| \leq \int_0^\ell |h''_{x\mu}(t)| d\mu(t). \quad (6)$$

Применим к интегралу, стоящему в правой части неравенства (6), неравенство Коши, будем иметь

$$|h'_x(x)|^2 \leq (\mu(\ell) - \mu(0)) \int_0^\ell |h''_{x\mu}(t)|^2 d\mu(t). \quad (7)$$

Представим функцию $r(x)$ в виде разности двух неотрицательных функций: $r(x) = r_+(x) - r_-(x)$.

Умножив обе части неравенства (7) на $r_+(x)$, проинтегрировав его по мере x по всему отрезку $[0; \ell]$, придем к неравенству

$$\begin{aligned} \int_0^\ell r_+(x) |h'_x(x)|^2 dx &\leq (\mu(\ell) - \mu(0)) \cdot \int_0^\ell r_+(x) dx \int_0^\ell |h''_{x\mu}(x)|^2 d\mu(x) < \\ &< (\mu(\ell) - \mu(0)) \left(\int_0^\ell r_+(x) dx + 1 \right) \int_0^\ell |h''_{x\mu}(x)|^2 d\mu(x), \end{aligned}$$

а так как $\int_0^\ell r(x) |h'_x(x)|^2 dx \leq \int_0^\ell r_+(x) |h'_x(x)|^2 dx$, то неравенство (4) будет справедливо при $c_1 = (\mu(\ell) - \mu(0)) \left(\int_0^\ell r_+(x) dx + 1 \right)$.

Докажем теперь неравенство (5).

Аналогично последовательно получаем

$$|h(x)| \leq \int_0^x |h'_x(s)| ds \leq \int_0^\ell |h'_x(s)| ds \leq \left(\int_0^\ell |h'_x(s)|^2 ds \int_0^\ell 1^2 ds \right)^{1/2}.$$

Отсюда находим

$$|h(x)|^2 \leq \ell \cdot \int_0^\ell |h'_x(s)|^2 ds.$$

Из результатов работы [16] следует, что существует такая строго возрастающая и ограниченная на $[0; \ell]$ функция $\sigma(x)$, порождающая на этом множестве меру, что $Q(x)$ является σ -абсолютно непрерывной на $[0; \ell]$ функцией; причем σ -производная функции $Q(x)$ является σ -суммируемой функцией.

Тогда $Q'_\sigma(x)$ также можно представить в виде разности двух неотрицательных функций, причем можно даже добиться, чтобы обе они были положительными: $Q'_\sigma(x) = q_+(x) - q_-(x)$.

Нетрудно видеть, что обе они являются σ -суммируемыми функциями.

На основании неравенства последовательно получаем

$$\int_0^\ell h^2 dQ = \int_0^\ell h^2 Q'_\sigma d\sigma \leq \int_0^\ell q_+(x) h^2 d\sigma \leq \ell \cdot \int_0^\ell q_+(x) d\sigma \cdot \int_0^\ell h_x'^2(s) ds. \quad (8)$$

Но, на основании неравенства (7), цепочку неравенств (8) мы можем продолжить

$$\int_0^\ell h^2 dQ \leq \ell^2 \cdot \int_0^\ell q_+(x) h^2 d\sigma \cdot (\mu(\ell) - \mu(0)) \cdot \int_0^\ell |h_{x\mu}''(t)|^2 d\mu(t),$$

и неравенство (5) справедливо при

$$c_2 = \ell^2 \cdot \int_0^\ell q_+(x) d\sigma \cdot (\mu(\ell) - \mu(0)).$$

Лемма доказана.

На основании леммы, из равенства (3) мы получаем оценку для второй вариации

$$\delta^2 \Phi(u_0)h = \int_0^\ell (p(x) - c_1 - c_2) h_{x\mu}''^2 d\mu.$$

Теорема 3.1. Пусть помимо условий 1–2), выполнено

$$p(x) \geq (\mu(\ell) - \mu(0)) \left[\int_0^\ell r_+(x) dx + 1 \right] + \ell^2 (\mu(\ell) - \mu(0)) \cdot (Q_+(\ell) - Q_+(0)) + \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число и $Q_+(x)$ — возрастающая составляющая из жорданова разложения функции ограниченной вариации на сумму возрастающей и убывающей функций.

Тогда функция $u_0(x)$, удовлетворяющая задаче (2), дает слабый минимум функционалу $\Phi(u)$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\Delta \Phi(u_0) = \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0),$$

где h — произвольная функция, принадлежащая пространству E допустимых функций. Как нетрудно видеть, разность можно представить в следующем виде

$$\Delta \Phi(u_0) = \delta \Phi(u_0)h + \delta^2 \Phi(u_0)h,$$

или, с учетом того, что u_0 — допустимая экстремаль,

$$\Delta \Phi(u_0) = \delta^2 \Phi(u_0)h. \quad (9)$$

Но в силу условий теоремы, на основании леммы 3.1, правая часть (9) принимает положительные значения для всех $h(x) \neq 0$, принадлежащих пространству E .

Теорема доказана.

4. Заключение. В работе доказана теорема, позволяющая давать ответ: действительно ли является минималью функционала $\Phi(u)$ функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера – Пуассона для $\Phi(u)$; речь идет о слабом экстремуме.

Благодарность. Авторы выражают благодарность доценту кафедры математического анализа Зверевой Маргарите Борисовне за ряд ценных рекомендаций, способствовавших улучшению рукописи.

Список литературы

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Доклады Академии наук, 1999;364(2):167–169.
2. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач. Успехи математических наук, 2008;63(1(379)):111–154.

3. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Шабров К теории Штурма—Лиувилля для уравнения с обобщенными коэффициентами. *Журнал математических наук*, 2004;(6(119)):769–787.
4. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. *Физматлит*, 2004;272.
5. Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. *Физматлит*, 2009;192.
6. Зверева М.Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стильтьеса. *Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. Ю.В. Покорный*, 15.11.2005;120.
7. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика*, 2013;1:232–250.
8. Шабров С.А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере. *Воронеж. гос. ун-т ; науч. консультант А. Д. Баев*, 20.12.2017;412.
9. Бородин Е.А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с негладкими решениями. *Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. С. А. Шабров*, 2018;133.
10. Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. Динамические обобщенные функции и проблема умножения. *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2007;(5(540)):33–45.
11. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений. *Матем. Заметки*, 2023;(2(113)):217–235.
12. Гранильщикова Я.А., Шкаликов А.А. Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*, 2022;(4):67–71.
13. Шкаликов А.А. Регулярные спектральные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. *Успехи математических наук*, 2021;(4(76)):203–204.
14. Шейпак И.А., Владимиров А.А. Асимптотика собственных значений задачи высшего четного порядка с дискретным самоподобным весом. *Успехи математических наук*, 2012;(2(24)):104–119.
15. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильтьеса. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2012;(1):52–55.
16. Шабров С.А. О μ -регуляризации функции с конечным изменением. *Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ*, 1999:166–169.

References

1. Pokorniy YuV. Stieltjes integral and derivatives with respect to measure in ordinary differential equations. *DAN*, 1999;364(2):167–169. (In Russ.)
2. Pokorniy YuV., Zvereva MB., Shabrov SA. Oscillation theory of Sturm-Liouville for impulse problems. *Russian Mathematical Surveys*, 2008, 63(1(379)):111–154. (In Russ.)
3. Pokorniy YuV., Shabrov SA. Toward A Sturm-Liouville Theory For An Equation With Generalized Coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004;(6(119)):769–787.
4. Pokorniy YuV., Penkin OM., Pryadiev VL., Borovskikh AV., Lazarev KP., Shabrov SA. Differential Equations on Geometric Graphs. *Fizmatlit*, 2004;272.
5. Pokorniy YuV., Bakhtina ZhI., Zvereva MB., Shabrov SA. Sturm's Oscillation Method in Spectral Problems. *Fizmatlit*, 2009;192.
6. Zvereva MB. On some questions of the qualitative theory of differential equations with Stieltjes derivatives. *Voronezh. state. univ. ; scientific. hands. Yu.V Pokorniy*, 15.11.2005;120.
7. Shabrov SA. On a Mathematical Model of Small Deformations of a Rod System with Internal Features. *Vestn. Voronezh. gos. un-ta. Ser. Fizika, matematika*, 2013;1:232–250.
8. Shabrov SA. Mathematical modeling and qualitative methods of analysis of boundary value problems with derivatives in the measure. *Voronezh. state. univ. ; scientific consultant A. D. Baev*, 20.12.2017;412.
9. Borodina EA. Mathematical modeling and qualitative methods for the analysis of boundary value problems with non-smooth solutions. *Voronezh State University ; scientific supervisor S. A. Shabrov*, 2018;133.
10. Derr VYa., Kinzebulatov DM. Dynamic Generalized Functions and the Multiplication Problem. *News of Higher Education Institutions. Mathematics*, 2007;(5(540)):33–45. (In Russ.)
11. Konechnaya NN., Mirzoev KA., Shkalikov AA. On the Asymptotics of Solutions of Biproduct Differential Equations. *Mathem. Notes*, 2023;(2(113)):217–235.
12. Granilshchikova YaA., Shkalikov AA. Spectral properties of a differential operator with involution. *Vestn. Mosk. univ. Ser. 1. Matem.*, 2022;(4):67–71.
13. Shkalikov AA. Regular spectral problems for systems of ordinary differential equations of the first order. *UMN*, 2021;(4(76)):203–204.

14. Sheypak I.A., Vladimirov A.A. Asymptotics of Eigenvalues of a Higher Even-Order Problem with a Discrete Self-Similar Weight. *Advances in Mathematical Sciences*, 2012;(2(24)):104–119.
15. Shabrov S.A. On the necessary condition for the minimum of one quadratic functional with an integral Stiltjes. *Proceedings of the Saratov University. A new series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2012;(1):52–55.
16. Shabrov S.A. On μ -regularization of a function with a finite change. *Collection of articles by postgraduate students and students of the Faculty of Mathematics at VSU*, 1999:166–169.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.02.2026

Received February 27, 2026

Поступила после рецензирования 22.03.2026

Revised March 22, 2026

Принята к публикации 25.03.2026

Accepted March 25, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Казакевич Климентий Игоревич – аспирант кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Шабров Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Klimentiy I. Kazakevich – Graduate Student of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sergey A. Shabrov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

К содержанию