ВЛАДИМИР МОСКОВКИН

АНДРЕЙ ЖУРАВКА

ХАРЬКОВ

УДК 330.115

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТНО-КООПЕРАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий в социально-экономических системах мы будем рассматривать с позиции качественной теории автономных динамических систем. При таком рассмотрении большое значение имеют аналогии с уравнениями популяционной динамики, основу которых заложили Верхульст, Вольтерра, Лотка и другие ученые. Как было показано нами в работе [1] Верхульст также является одним из основателей экономической динамики.

Еще в 1838 г. он в развитие мальтузианского подхода предложил свое классическое уравнение динамики роста народонаселения [2] и фактически показал, как следует математически описывать внутривидовую конкуренцию:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2, \qquad (1)$$

где N – численность народонаселения, α – коэффициент роста народонаселения, β – коэффициент сдерживания роста народонаселения, t – время.

В дальнейшем это уравнение легло в основу уравнений популяционной динамики и коэффициент β стали называть коэффициентом внутривидовой конкуренции. Ввиду своей универсальности это уравнение стало использоваться во многих областях науки, так как многие одномерные и нелинейные процессы с насыщением описывались этим уравнением. В одной из следующих своих работ Верхульст [3] назвал решение уравнения (1) логистическим. В начале 20-х годов 20 века уравнение (1) было «переоткрыто» Пирлом и Ридом [4, 5]. В тоже время Пирл в 1921 [5] признал приоритет Верхульста. В 20-м веке имя Верхульста было практически забыто. Например, во всех работах Вольтерра не было ни одной ссылки на его статьи. Итак, Верхульст первый предложил математическую модель логистического роста, которую он объяснял процессами «сопротивления среды», и первым сделал наиболее существенные предпосылки для введения в научный оборот понятия внутривидовой конкуренции. Для описания же межвидовой конкуренции Вольтерра [6] и Лотка [7] предложили систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями, в которых межвидовая конкуренция описывалась членами типа $a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} < 0$, $i \neq j$.

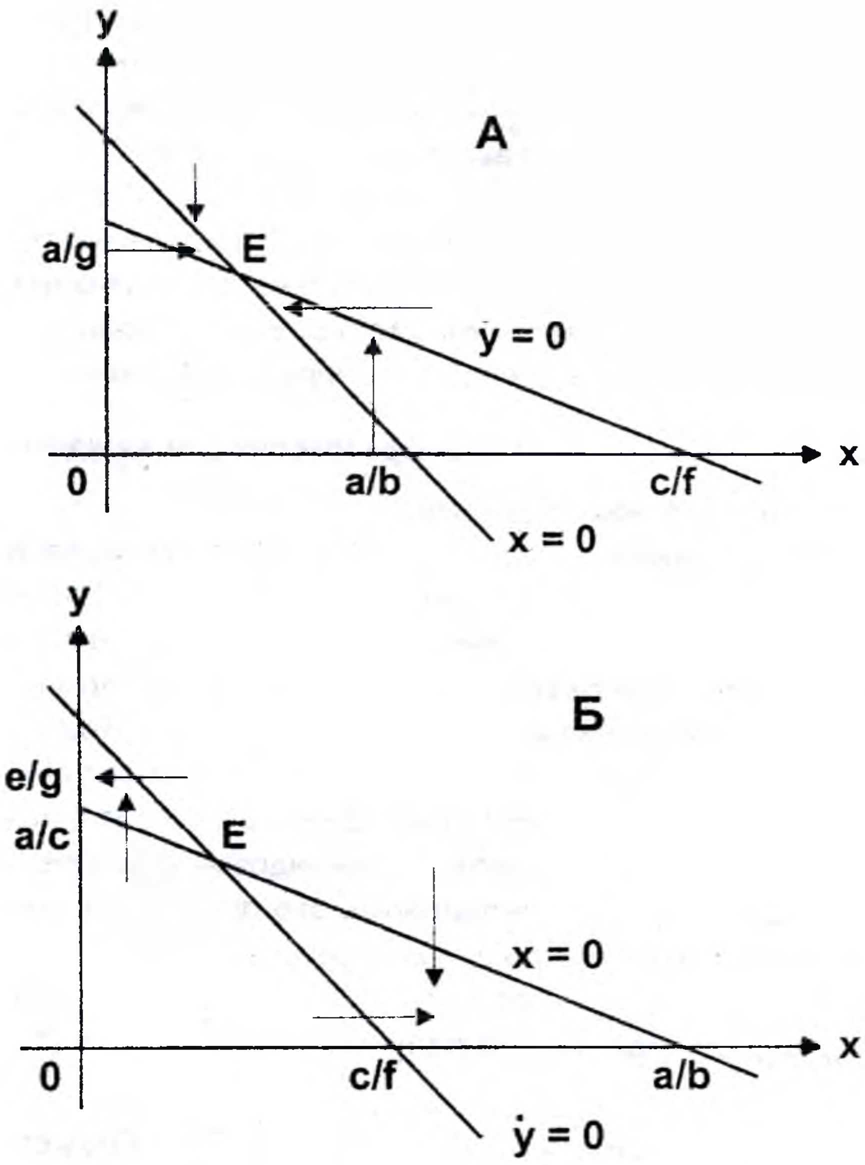
Стандартный анализ конкуренции между двумя видами, проводившийся первоначально в работах Вольтерра [6, 8, 9], Лотки [7] и Гаузе [10], начинается с записывания двумерной динамической модели конкурентных взаимодействий в виде [11]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(e - fx - gy) \end{cases} \qquad (2)$$

КОНТЕКСТ УРАВНЕНИЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Эти уравнения выводятся из логистических уравнений $\frac{dx}{dt} = x(a - bx)$, $\frac{dy}{dt} = y(e - gy)$, в которые включаются дополнительные члены ($-cxy$), ($-fxy$), чтобы описать подавляющие воздействия, оказываемые каждым видом на своего конкурента [11]. В последней работе отмечается, что конкуренция не вызывает колебаний численности у вида, не подверженного таким колебаниям в отсутствии конкуренции. Отметим, что в этой работе, также как в работах Вольтерра, отсутствует ссылка на работы основателя логистического закона роста Верхульста.

Если динамическая система (2) имеет нетривиальное (ненулевое) равновесие, то возможны два случая при которых это равновесие будет устойчивым, либо неустойчивым (*см. рис.*).



Случаи устойчивого (А) и неустойчивого (Б) равновесия в точке Е для динамической системы (2). Стрелками показаны направления фазовых траекторий в точках их пересечения с изоклинами

$$x = \frac{dx}{dt} = 0, \; y = \frac{dy}{dt} = 0.$$

Из этого рисунка для случая устойчивого равновесия получим следующие условия на параметры модели

$$\frac{a}{b}<\frac{e}{f},\frac{e}{g}<\frac{a}{c}, \quad (3)$$

а для неустойчивого –

$$\frac{a}{b}>\frac{e}{f},\frac{e}{g}>\frac{a}{c}. \quad (4)$$

Эти условия отличаются только сменой знака неравенств. В дальнейшем мы будем рассматривать эти условия в рамках детального качественного и численного анализа модели (2) с учетом ее экономической интерпретации.

Анализ случая Б привел Гаузе к формулировке принципа (закона) конкурентного исключения. Одна из формулировок этого принципа гласит, что два вида с одинаковыми экологическими потребностями не могут существовать в одном местообитании. Хардин [12] указывал, что сам Гаузе не считал себя создателем этого закона, приписывая его идею Лотке и Вольтерра. Действительно, Вольтерра [9], рассматривая модель взаимодействия двух видов, борющихся за общую пищу, показал, что один из видов, более чувствительный к нехватке пищи, неизбежно исчезает. Однако Лэк [13] в своей книге отдает должное Гаузе и оставляет за ним этот принцип. Как известно, русский биолог Гаузе в 1932 г. впервые подтвердил существование этого принципа экспериментально [14, 15]. Наши дальнейшие исследования моделей конкурентных взаимодействий в социально-экономических системах убеждают в его справедливости и для вышеуказанных систем.

Возвращаясь к рассмотрению модели (2), отметим, что в случае неустойчивого равновесия (4) выживаемость одного из видов зависит исключительно от начальных условий. Здесь существуют две непересекающиеся области притяжения к двум устойчивым равновесным точкам $(\frac{a}{b},0)$ и $(0,\frac{e}{g})$ (точки равновесия для каждого вида при раздельном обитании).

В 1972 г. Джилпин и Джастис [16] сформулировали следующее правило, относящееся к случаю А (см. рис.): необходимое и достаточное условие для устойчивости конкурентного равновесия состоит в том, чтобы произведение, характеризующее внутривидовые взаимодействия, было больше произведения аналогичных величин для межвидовых взаимодействий. Здесь речь идет о коэффициентах внутривидовой и межвидовой конкуренции в модели (2). Если переложить это правило на математический язык, то получим неравенство

$$bg > cf \quad (5)$$

Это неравенство можно получить из неравенств (3), если их перемножить: $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{g}<\frac{e}{f}\cdot\frac{a}{c}\Leftrightarrow bg>cf$. Геометрический смысл неравенства (5) состоит в том, что наклон прямой $\dot{x}=0$ должен быть круче, чем прямой $\dot{y}=0$ (рис., случай А)

$$\frac{a}{c}/\frac{a}{b}>\frac{e}{g}/\frac{e}{f}\Leftrightarrow\frac{b}{c}>\frac{f}{g}\Leftrightarrow bg>cf,$$

то есть снова приходим к неравенству (5).

По мнению Одума [15], конкуренция, в самом широком смысле,– это взаимодействие двух организмов, стремящихся получить один и то же ресурс. Это определение очень близко к одному из экономических определений понятия конкуренции, о чем речь пойдет дальше. Межвидовая конкуренция в экологии – это любое взаимодействие между разными популяциями, которое неблагоприятно сказывается на их росте и выживании. Тенденция к экологическому разделению, наблюдаемая при конкуренции близкородственных или сходных в иных отношениях видов (рис., случай Б) приводит к вышеуказанному принципу конкурентного исключения. В то же время конкуренция способствует возникновению в процессе отбора многих адаптаций, что приводит к разнообразию видов, сосуществующих в данном пространстве или сообществе [15]. Все это также справедливо, на наш взгляд, при рассмотрении конкурентных взаимодействий в социально-экономических системах. В популяционной экологии межвидовая конкуренция может привести либо к установлению равновесия между видами, либо, при более жесткой конкуренции,– к замене популяции одного вида популяцией другого, либо к тому, что один вид вытеснит другой в иное место или же заставит его перейти на использование другой пищи (другого ресурса) [15]. Если внимательно присмотреться, то можно увидеть множество аналогий вышесказанному в экономике и бизнесе.

Здесь подчеркнем, что математические модели межвидовых конкурентных взаимодействий, с включением в них и внутривидовой конкуренции, были впервые независимо получены Лоткой в 1925 г. [7] и Вольтерра в 1926 г. [6]. В более общем виде, как отмечает Одум [15], они были получены в работе [17].

В противоположность моделям межвидовой конкуренции в популяционной динамике большую роль играют модели мутуализма (или симбиоза). Согласно работе [15] в мутуализме между двумя видами взаимоотношения выгодны для развития (роста) обоих видов. В математическом отношении мутуализм между двумя видами описывается тем же выражением, что и межвидовая конкуренция $a_{ij}x_ix_j$, но при $a_{ij}>0,\ i\neq j$.

При моделировании конкурентных взаимодействий в социально-экономических системах мы будем основываться на тех же моделях внутривидовой и межвидовой конкуренции, которые первоначально разработаны и развиты в популяционной динамики, а вышеуказанные модели мутуализма в приложении к социальной и экономической динамики будем называть *моделями кооперационных взаимодействий* [18]. Нам известна только одна работа, посвященная *n*-мерным популяционным системам Лотки – Вольтерры, в которой такие системы называются конкурентными при $a_{ij}\le 0,\ i\neq j$ или кооперационными при $a_{ij}\ge 0,\ i\neq j$ [19]:

$$\frac{dx_i}{dt}=x_i\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x_j-x_j^*),\ i=\overline{1,n} \quad (6)$$

где $x^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$ – положительная особая (равновесная) точка системы (6).

В отношении динамической системы (6) могут быть сделаны следующие обобщения. Рассмотрим вместо нее более общую систему

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i F_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (7)$$

где функция F_i имеет непрерывные производные по x_j и $F_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = 0$.

Применяя теорему Тэйлора для каждой из функций F_i запишем систему (7) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x^*)}{\partial x_j}(x_j - x_j^*) \qquad (8)$$

Введя обозначения $a_{ij} = \frac{\partial F_i(x^*)}{\partial x_j}$ мы придем к системе (6).

Если условие для существования мутуализма имеет вид $\frac{\partial F_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_j} \geq 0$, то необходимым условием для устойчивости равновесной точки $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ будет условие [20]

$$\frac{\partial F_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i} < 0. \qquad (9)$$

В обозначениях a_{ij} это условие примет вид $a_{ii} < 0$. В последней работе доказаны ряд теорем по глобальной устойчивости системы (7).

Попробуем теперь выделить в системе (6) верхульстовый (или логистический) член, то есть внутривидовую конкуренцию. Рассмотрим это на примере трехмерной динамической системы

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1[a_{11}(x_1 - x_1^*) + a_{12}(x_2 - x_2^*) + a_{13}(x_3 - x_3^*)] \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2[a_{21}(x_1 - x_1^*) + a_{22}(x_2 - x_2^*) + a_{23}(x_3 - x_3^*)] \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3[a_{31}(x_1 - x_1^*) + a_{32}(x_2 - x_2^*) + a_{33}(x_3 - x_3^*)] \end{cases} \qquad (10)$$

Из системы (10) видим, что классические логистические члены возникают при $a_{11}<0$, $a_{22}<0$, $a_{33}<0$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = |a_{11}| x_1(x_1^* - x_1) + a_{12}x_1(x_2 - x_2^*) + a_{13}x_1(x_3 - x_3^*) \\ \frac{dx_2}{dt} = |a_{22}| x_2(x_2^* - x_2) + a_{21}x_2(x_1 - x_1^*) + a_{23}x_2(x_3 - x_3^*) \\ \frac{dx_3}{dt} = |a_{33}| x_3(x_3^* - x_3) + a_{31}x_3(x_1 - x_1^*) + a_{32}x_3(x_2 - x_2^*) \end{cases} \qquad (11)$$

Как мы уже знаем, в этом случае, имеет место необходимое условие для устойчивости равновесной точки (x_1^*, x_2^*, x_3^*).

В отличие от работы [19], мы рассматриваем смешанные модели конкурентно-кооперационных взаимодействий [18]. Например, в системе (11) мы можем задать a_{12}, a_{21}, a_{31}, $a_{13} < 0$, рассматривая межвидовую конкуренцию между первым и вторым, а также первым и третьим видами (в нашем случае это некоторые характеристики социально-экономических объектов), а также задать a_{23}, $a_{32} > 0$, рассматривая кооперацию между вторым и третьим видами (социально-экономическими объектами). Правило в задании знаков коэффициентов a_{ij} здесь следующее: знак члена a_{ij} должен соответствовать знаку члена a_{ji}.

Запись системы конкурентно-кооперационных взаимодействий в виде (6) сразу же акцентирует внимание на одной, специально выделенной в ней, особой точки x^*. В тоже время в этой системе существуют достаточно много других особых точек, имеющих часть нулевых координат. Другой момент связан с тем, что в этой системе в явном виде не выделены логистические члены, описывающие самоограниченный рост в условиях внутривидовой конкуренции (для одной из переменных в отсутствии остальных). Поэтому мы опираемся на несколько другое задание системы типа Лотки-Вольтерры, которое восходит, по-видимому, к работе Мэя [21] и рассмотрено в работе Николиса и Пригожина [22]

$$\frac{dx_i}{dt} = k_i x_i \left[N_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j \right], \qquad (12)$$

где $k_i > 0$, $b_{ij} \neq 0$.

При заимствовании этой системы уравнений из работы [22] мы оставили только члены, отвечающие за конкурентно-кооперационные взаимодействия. Мы так же опустили член $(-d_i x_i)$, описывающий процесс гибели популяций, так как его легко учесть суммарным коэффициентом естественного прироста $\overline{k_i} = k_i - d_i$. В целом система (12) соответствует системе, предложенной Вольтерра [9]. В трактовке Мэя [21] система (12) описывает процесс насыщения роста численности популяций при их взаимодействии.

Так же, как и в случае системы (6), запишем систему (12) для трехмерного случая:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_1 x_1 (N_1 - \beta_{11}x_1 - \beta_{12}x_2 - \beta_{13}x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} = k_2 x_2 (N_2 - \beta_{21}x_1 - \beta_{22}x_2 - \beta_{23}x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = k_3 x_3 (N_3 - \beta_{31}x_1 - \beta_{32}x_2 - \beta_{33}x_3) \end{cases} \qquad (13)$$

В этой системе уравнений сразу же выделяются классические логистические члены, ответственные за процесс насыщения

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_1 x_1 (N_1 - \beta_{11}x_1) - k_1\beta_{12}x_1x_2 - k_1\beta_{13}x_1x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = k_2 x_2 (N_2 - \beta_{22}x_2) - k_2\beta_{21}x_2x_1 - k_2\beta_{23}x_2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = k_3 x_3 (N_3 - \beta_{33}x_3) - k_3\beta_{31}x_3x_1 - k_3\beta_{32}x_3x_2 \end{cases} \qquad (14)$$

В динамической системе (14) коэффициенты $k_i \beta_{ii} > 0$ являются коэффициентами внутривидовой конкуренции, а коэффициенты $k_i \beta_{ij}$ отвечают за межвидовую конкуренцию при $\beta_{ij} > 0$ и за межвидовую кооперацию при $\beta_{ij} < 0$. При этом также как и ранее знак члена β_{ij} должен соответствовать знаку члена β_{ji}.

Система (14) была взята нами за основу при моделировании попарных конкурентно-кооперационных взаимодействий в социально-экономических системах [18].

Вид системы (12) позволяет поставить задачу поиска числа особых точек в этой системе. Наш анализ динамических систем типа (8) второго, третьего и четвертого порядков позволил сделать общий вывод, что общая n-мерная система имеет 2^n особых точек [23].

Рассматривая систему (12) в несколько других обозначениях, для случая мутуализма (или кооперации в нашей трактовке) Гох [20] доказал, что необходимым и достаточным условием для локальной и глобальной устойчивости нетривиальной особой точки является положительность всех ведущих (главных) миноров матрицы Якоби для этой системы.

Динамические системы типа (12) ранее использовались в основном в популяционной динамики, за исключением работ [24 – 26], в которых моделировались взаимодействия инноваций, межэтнические конкурентные взаимодействия, а также взаимодействия в стратифицированных обществах. В ряде вышеуказанных работ [25, 26] помимо процессов внутривидовой и межвидовой конкуренции (между социальными классами (слоями), этническими группами) моделировались процессы перехода между социальными слоями и этническими группами. Например, в рамках системы (14) переход из i-того слоя (группы) в j-ый описывается суммарным коэффициентом перехода $\eta_{ij} = k_i \beta_{ij}$, а обратный переход – коэффициентом $\eta_{ji} = k_j \beta_{ij}$, причем $\eta_{ij} = -\eta_{ij}$. Таким образом, моделирование переходов в социальных системах происходит по типу моделирования процесса «хищник – жертва» в задачах популяционной динамики (популяционной экологии). Как показано в работе [26], сущность процессов перехода связана с той же конкуренцией между социальными слоями или группами.

При моделировании взаимодействий в стратифицированном обществе между тремя классами («высший», «средний», «низший») в работе [26] была предложена следующая динамическая система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1^2 - \delta_{21} x_1 x_2 + (\gamma_{21} - \gamma_{12}) x_1 x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_2^2 - \delta_{12} x_1 x_2 - \delta_{32} x_2 x_3 + (\gamma_{12} - \gamma_{21}) x_1 x_2 \\ \qquad\qquad + (\gamma_{32} - \gamma_{23}) x_2 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \alpha_3 x_3 - \beta_3 x_3^2 - \delta_{23} x_2 x_3 + (\gamma_{23} - \gamma_{32}) x_2 x_3 \end{cases} \qquad (15)$$

где x_i – численность представителей i-того класса, t – время, β_i – коэффициент внутриклассовой конкуренции для i-того класса, δ_{ij} – коэффициент межклассовой конкуренции, γ_{ij} – коэффициент межклассового перехода (переход из класса i в класс j), α_i – коэффициент воспроизводства i-того класса, индексы $i = 1, 2, 3$ относятся соответственно к «высшему», «среднему» и «низшему» классу.

Здесь предполагается, что непосредственного (прямого) взаимодействия между «высшими» и «низшими» классами не происходит ($\delta_{13} = \delta_{31} = 0$, $\gamma_{13} = \gamma_{31} = 0$). Межклассовые переходы связаны с конкуренцией в том понимании этого термина, которое принято в социологии[1]. Легко видеть, что система уравнений (15) совпадает с системой (14) при $\beta_{13} = \beta_{31} = 0$. Системы такого типа, как показано в работах [18, 24 – 26], имеют восемь особых точек: нулевая, ненулевая, три точки с двумя нулевыми координатами, три точки с одной нулевой координатой. Нулевая точка всегда является неустойчивым узлом. Структура и анализ устойчивости этих особых точек позволяет сделать следующие выводы [26]:

1. Возможны варианты подавления одним из наиболее конкурентоспособных классов двух других (три варианта особых точек с двумя нулевыми координатами).

2. Возможны варианты подавления двумя классами третьего (три варианта особых точек с одной нулевой координатой).

3. Одновременное сосуществование всех трех классов (один вариант ненулевой особой точки).

Интересно отметить, что для расширенной системы (15) когда учитываются все попарные взаимодействия между тремя классами (по крайней мере $\delta_{13}, \delta_{31} \neq 0$), при $b_i = \delta_{ij} = \beta$ и $\alpha_i = \alpha$ суммарная численность всех трех классов описываются уравнением Верхульста [2]

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta X^2, \qquad (16)$$

где $X = x_1 + x_2 + x_3$.

В случае межэтнических конкурентных взаимодействий для трех этнических групп в работе [25] была получена следующая система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1^2 - \delta_{21} x_1 x_2 - \delta_{31} x_1 x_3 + (\gamma_{21} - \gamma_{12}) x_1 x_2 + \\ \qquad\qquad + (\gamma_{31} - \gamma_{13}) x_1 x_3 + M_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_2^2 - \delta_{12} x_1 x_2 - \delta_{32} x_2 x_3 + (\gamma_{12} - \gamma_{21}) x_1 x_2 \\ \qquad\qquad + (\gamma_{32} - \gamma_{23}) x_2 x_3 + M_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \alpha_3 x_3 - \beta_3 x_3^2 - \delta_{13} x_1 x_3 - \delta_{23} x_2 x_3 + (\gamma_{13} - \gamma_{31}) x_1 x_3 + \\ \qquad\qquad + (\gamma_{23} - \gamma_{32}) x_2 x_3 + M_3 \end{cases} \qquad (17)$$

где x_i – численность населения i-той этнической группы, t – время, α_i – разности между коэффициентами рождаемости и смертности в i-той этнической группе, β_i и δ_{ij} – коэффициенты внутриэтнической и межэтнической конкуренции, γ_{ij} – коэффициент, характеризующий вероятность отнесения ребенка, родившегося в ij-том межэтническом браке к j-той этнической группе, M_i – сальдо миграции для i-той этнической группы.

Отмечается, что члены динамической системы (17), описывающие межэтнические браки, также связаны с процессом конкуренции в контексте привлекательности той или другой этнической принадлежности [25]. Общие выводы по анализу этой системы полностью совпадают с аналогичными выводами по модели (15) и ее расширенному варианту. Из наиболее важных частных выводов отметим, что равновесное сосуществование двух этнических групп с одинаковыми численностями происходит в случае, когда коэффициент внутриэтнической конкуренции превышает аналогичный коэффициент для межэтнической конкуренции при одинаковых значениях параметров воспроизводства и конкуренции обоих этнических групп ($\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $\delta_{ij} = \delta < \beta$, $\gamma_{12} - \gamma_{21} = 0$, $i = 1,2$).

В работе [24] были предложены и анализировались двумерные и трехмерные модели конкурентного взаимодействия инноваций. Они имели вид уравнений Лотки-Вольтерры (12) при $\beta_{ij} < 0$ и для них справедливы те же выводы, что обсуждались для моделей взаимодей-

[1]Большой Энциклопедический Словарь.– М.: Норинг, 1998.– С. 562.

ствия в стратифицированном обществе и в этнических группах. В вышеуказанной работе также рассматривалась трехмерная модель совместной динамики фирм производителей, распространителей и потребителей инноваций, которая соответствовала модели (12) при $n = 3$, $\beta_{ij} > 0$. Согласно нашей терминологии эту модель следует отнести к моделям кооперационных взаимодействий. В отличие от предыдущей модели конкурентных межинновационных взаимодействий в этой модели не возникает ситуация подавления одного класса фирм другими. Это следует из самой структуры модели, в которой увеличение числа фирм какого-либо класса стимулирует увеличение числа фирм других классов. Отметим, что в работе [27] данная трехмерная модель рассмотрена более детально.

Помимо подхода, основанного на динамической системе (12) или ее трехмерном аналоге (14), существует несколько другой подход в моделировании конкуренции между социальными группами [28][2]. Различие состоит в том, что помимо учета численности человеческих популяций в каждой из трех социальных групп, выделяется некоторая численность нейтральной популяции индивидуумы которой не принадлежат ни к одной из групп:

$$m(t) = N - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t), \qquad (18)$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)>0$ — численности популяций в трех выделенных группах, $m(t)$ — численность нейтральной популяции, $N = const$ — общая численность популяций во всех группах.

Переходы в рассматриваемой социальной системе и их скорости представим в *таблице* [28].

Переходы в трехмерной динамической системе, описывающей взаимодействия в системе трех социальных групп

Переходы	Скорости переходов
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1+1, x_2, x_3, m-1)$	$\alpha_1 m + \beta_1 m x_1$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1, x_2+1, x_3, m-1)$	$\alpha_3 m + \beta_2 m x_2$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1, x_2, x_3+1, m-1)$	$\alpha_3 m + \beta_3 m x_3$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1-1, x_2, x_3, m+1)$	$m_1 x_1$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1, x_2-1, x_3, m+1)$	$m_2 x_2$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1, x_2, x_3-1, m+1)$	$m_3 x_3$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1-1, x_2+1, x_3, m)$	$\gamma_{12} x_1 x_2$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1+1, x_2-1, x_3, m)$	$\gamma_{21} x_2 x_1$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1, x_2-1, x_3+1, m)$	$\gamma_{23} x_2 x_3$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1, x_2+1, x_3-1, m)$	$\gamma_{32} x_3 x_2$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1-1, x_2, x_3+1, m)$	$\gamma_{13} x_1 x_3$
$(x_1, x_2, x_3, m) \to (x_1+1, x_2, x_3-1, m)$	$\gamma_{31} x_3 x_1$

На основе этой таблицы искомая динамическая система третьего порядка запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (N - x_1 - x_2 - x_3)(\alpha_1 + \beta_1 x_1) - \mu_1 x_1 - (\gamma_{12} - \gamma_{21}) x_1 x_2 - \\ \qquad - (\gamma_{13} - \gamma_{31}) x_1 x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (N - x_1 - x_2 - x_3)(\alpha_2 + \beta_2 x_2) - \mu_2 x_2 + (\gamma_{12} - \gamma_{21}) x_1 x_2 - \\ \qquad - (\gamma_{23} - \gamma_{32}) x_2 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = (N - x_1 - x_2 - x_3)(\alpha_3 + \beta_3 x_3) - \mu_3 x_3 + (\gamma_{13} - \gamma_{31}) x_1 x_3 + \\ \qquad + (\gamma_{23} - \gamma_{32}) x_2 x_3 \end{cases} \qquad (19)$$

В одном из упрощений $\alpha_i = 0$, $\beta_i = \beta$, $\mu_i = \mu$, в работе [28] была получена следующая система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1[\delta - \beta(x_1 + x_2 + x_3)] - \eta_{12} x_1 x_2 - \eta_{13} x_1 x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2[\delta - \beta(x_1 + x_2 + x_3)] + \eta_{12} x_1 x_2 - \eta_{23} x_2 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3[\delta - \beta(x_1 + x_2 + x_3)] + \eta_{13} x_1 x_2 + \eta_{23} x_2 x_3 \end{cases} \qquad (20)$$

где $\delta = \beta N - \mu$, $\eta_{12} = \gamma_{12} - \gamma_{21}$, $\eta_{13} = \gamma_{13} - \gamma_{31}$, $\eta_{23} = \gamma_{23} - \gamma_{32}$.

Для сравнения системы (20) с системой (14) приведем первую к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(\delta - \beta x_1) - (\beta + \eta_{12}) x_1 x_2 - (\beta + \eta_{13}) x_1 x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(\delta - \beta x_2) + (\eta_{12} - \beta) x_1 x_2 - (\beta + \eta_{23}) x_2 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3(\delta - \beta x_3) + (\eta_{13} - \beta) x_1 x_3 + (\eta_{23} - \beta) x_2 x_3 \end{cases} \qquad (21)$$

откуда следует эквивалентность динамических систем (14) и (20).

В работе [28] показана возможность возникновения периодических решений в динамической системе (20).

Важно отметить, что предшествующая работе [28] литература по моделированию конкурентно-переходных процессов в социальных группах была связана с небольшим количеством работ по моделированию стохастических и детерминированных двумерных нелинейных уравнений [29, 30]. Например, в работе [29] была предложена нелинейная стохастическая модель, описывающая конкуренцию двух социальных групп и показаны возможности подавления одной группы другой. Здесь процесс конкуренции между группами рассматривался в аспекте конкуренции двух различных идеологий или верований. Ряд других работ были посвящены моделированию процессов диффузии информации и распространению слухов [31 — 33]. Например, в работе [33] исследовалась конкурентная модель подавления одного слуха другим. Отметим, что во всей рассматриваемой библиографии, включая рассматриваемую работу [28], под социальными группами понимаются также политические партии, культурные общества и религиозные секты.

Нам удалось также выявить еще один небольшой класс отечественных работ, посвященных математическому анализу конкурентных взаимодействий при рассмотрении структурной эволюции производительных сил [34 — 36]. Предпосылками для этих работ послужили исследования В. Хмелько и его качественная концептуальная модель структуры и динамики макропроцессов общественного производства жизни [37, 38]. Согласно исследованиям В. Хмелько в работе [36] рассматривалось пять сфер общественного воспроизводства:

1. Первобытная присваивающая деятельность. **2.** Аграрное производство (земледелие и скотоводство). **3.** Индустриальное производство. **4.** Информационное производство. **5.** Производство целостного человека как творческой личности.

[2]Мы изложим этот подход достаточно подробно, так как цитируемая работа практически неизвестна в бывшем СССР (на нее нет ссылок и она не реферировалась в отечественных изданиях).

Оценивались доли (в процентах) каждой из выделенных производственных сфер в общих затратах общественного труда, а также их изменения в течении исторического времени. Эти доли обозначены через переменные x_i, $i=\overline{1,5}$. Функции $x_i(t)$ представляют собой волны, крутизна которых возрастает с увеличением индекса i. В работе [36] отмечается, что первую волну мы застаем в фазе подъема, а пятую — в фазе спада. Моменты времени, в которых эти волны пересекаются, названы моментами смены производственных доминант (паритетные точки t_{12}, t_{23}, t_{34}, t_{45}). Построенные графики пяти волн говорят о сильной нелинейности процессов эволюции производственных сил. Из них видно, насколько ускоряется ход эволюционных процессов по мере их приближения к настоящему времени.

Исходя из гипотезы о самоорганизационном характере социальной революции и аналогии между биологическими и социальными процессами, авторы работы [36] приходят к выводу, что фундаментальным фактором, обусловливающим ту или иную структуризацию производительных сил общества, является естественное стремление общества к выживанию и процветанию, а критерием «естественного» отбора изменений, которые происходят в структуре общественного производства, следует признать его общую эффективность. Это говорит о том, что те изменения в структуре распределения общественных трудовых ресурсов, которые способствует возрастанию эффективности общественного производства, поддерживаются обществом и «выживают», а изменения, действующие в противоположном направлении, наоборот, подавляются и гибнут.

Аналогия между биологическими и социальными процессами позволила записать в работе [36] следующее уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x\varphi(x), \tag{22}$$

где x(t) — уровень исследуемого процесса, φ(x) — функция ограничений, моделирующая влияние среды [22, 39, 40].

Такая структура уравнения (22) характерна для всех моделей популяционной динамики, включая ранее рассмотренные уравнения Лотка — Вольтерра. Два сомножителя в правой части уравнения (22) отражают две основные особенности биологических систем: первая отражает положительную обратную связь, которая считается собственно основой жизни как таковой [39], а вторая — влияние окружения, или конкурентную борьбу за доступ к ограниченным средствам существованиям (ресурсам) [36].

В общем случае, когда рассматривается система из *n*-конкурирующих субъектов, уравнение (22) переходит в *n*-мерную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\varphi(x_1, x_2, ..., x_n),\ i=\overline{1,n}. \tag{23}$$

Эта система уравнений полностью совпадает с ранее рассмотренной системой уравнений (7).

Обобщая вывод, сделанный в работе [36] для «живых» систем на социально-экономические системы можно сказать, что построение модели эволюции любых биологических и социально-экономических систем сводится к конструированию функции (или функций) ограничения, то есть к моделированию (формальному описанию) конкурирующей среды. При рассмотрении эволюции i-той производственной сферы, конкурентами (в отношении трудовых ресурсов) выступают остальные n-1 сфер. Для учета их конкурирующего влияния в работе [36] введено понятие среднеэволюционного потенциала развития c(t)

$$c(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t), \tag{24}$$

где $x_i(t)$ — относительная (в долях единицы) часть совокупных трудовых ресурсов общества, приходящаяся на *i*-тую производственную сферу.

Это несколько уточняет ранее введенное в работе [36] определение переменной $x_i(t)$. Далее предполагается, что разность потенциалов

$$\varphi_i(t) = c_i - c(t),\ i=\overline{1,n} \tag{25}$$

характеризует влияние среды на эволюцию *i*-той сферы. Тогда из уравнений (23 — 25) следует система нелинейных дифференциальных уравнений, впервые предложенная в работе [34]:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\sum_{j=1}^{n}(c_i - c_j)x_j,\ i=\overline{1,n} \tag{26}$$

Эта система моделирует структурную эволюцию производительных сил и имеет первый интеграл

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1 \tag{27}$$

С содержательной точки зрения последнее выражение можно интерпретировать как «закон сохранения» в «живых» и «неживых системах», а с эволюционных позиций — это условие конкуренции, или (по М. Эйгену) «константа общей организации» [41].

Решение нелинейной динамической системы (22) удается найти с помощью следующих преобразований:

$$\frac{dx_i}{dt}/x_i - \frac{dx_k}{dt}/x_k = c_i - c_k,\quad y_{ik} = x_i/x_k,$$

откуда следует линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_{ik}}{dt} = y_{ik}(c_i - c_k) \tag{28}$$

общее решение которой имеет вид [36]

$$x_i(t) = \frac{x_i(t_0)}{\sum_{j=1}^{n} x_j(t_0)\exp[(c_j - c_i)(t - t_0)]},\ i=\overline{1,n} \tag{29}$$

где $x_i(t_0)$ — начальное условие.

В работе [35] была получена следующая система неравенств на параметры модели (26)

$$c_1<c_2<c_3<c_4<c_5;\ T_1>T_2>T_3>T_4>T_5, \tag{30}$$

где $c_i=1/T_i$, T_i — пожизненные затраты рабочего времени.

В работе [36] проведена идентификация этих параметров. При задании одного из параметров (T_3=20 лет), остальные получаются автоматически по определенным формулам: T_1 = 32, T_2 = 31, T_4 = 15 и T_5 = 12 лет.

Полученные значения T_i соответствуют координатам паритетных точек.

Легко видеть, что динамическая система (26) соответствует динамической системе Лотка-Вольтерры, записанной в виде (12). Действительно их совпадение будет наблюдаться при $N_i = 0$, то есть при отсутствие логистического члена в системе (12).

В работе [36] показано, что система (26) имеет n стационарных состояний «монопольного» типа, когда доля одной из производственных сфер $x_i=1$, а доли остальных сфер равняются нулю. Из всех этих точек только точка $x_n=1, x_1=x_2=...=x_{n-1}=0$ является асимптотически устойчивой.

Из решения (29) следует, что процессы в системе (26) имеют апериодический, неколебательный характер. Этот вывод сделан в работе [36], почему-то со ссылкой на первую теорему Ляпунова об устойчивости.

В тоже время численные решения $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ представляли собой одиночные волны. Понять это можно из структуры аналитического решения (29). Действительно, наличие временного множителя $t - t_0$ под экспонентой существенно меняет характер ее роста при переходе времени через $t = t_0$. Здесь следует также иметь в виду, что при численном моделировании системы (26) использовались процедуры повторной идентификации уравнений этой системы.

Четвертый по счету большой класс работ, посвященный моделированию социально-экономических систем с позиции обобщенных биофизико-химических реакций и популяционной экологии, нам удалось выявить, благодаря недавнему выходу в свет обобщающей монографии В. П. Милованова [42]. В этой работе отмечается, что весьма многие явления в социально-экономических системах основаны на биофизико-химической кинетике (точнее сказать, на аналогиях с процессами биофизико-химической кинетики). Идея о том, что феноменологию обобщенных биофизико-химических реакций можно использовать в анализе социально-экономических систем, впервые была высказана в работе [43]. Ниже приведем соответствующее высказывание: «По своему духу и методами исследования к излагаемому нами предмету близко примыкает моделирование экономических, производственных процессов. Нет ничего удивительного в том, что биологические системы с их основными переменными – концентрациями веществ[3] – похожи на экономические, где в качестве переменных выступают количества тех или иных продуктов или предметов, а роль концентрации ферментов играет число станков в цехе или автоматические линии. В этом смысле и кинетические модели биофизики и биохимии и экономические модели являются частями одной общей отрасли кибернетики, так называемой теории сложных систем». К сожалению, мимо этой идеи, по словам В. П. Милованова [42], прошло подавляющее число исследователей социально-экономических процессов. Эта идея открывает путь физики в математическое описание социально-экономических систем и тянет за собой неравновесную термодинамику открытых систем, которая сейчас претерпевает бурное развитие, начатое в основном школой И. Пригожина [22, 44, 45]. Здесь речь идет о быстроразвивающимся новом синтетическом направлении, возникающем на стыке физики, химии, биологии, экологии, социологии, экономики и психологии, которое называется синергетикой. Такое направление не предполагает формулировку цели в явном виде, как это имеет место в задачах оптимизации и теории игр, которые являются присущими именно социально-экономическим системам. Как известно, под синергетикой понимается наука о кооперативных (коллективных) процессах и явлениях самоорганизации в открытых и неравновесных системах произвольной природы. Важно отметить, что аналогами целей в нелинейной термодинамике открытых неравновесных систем являются различные аттракторы – устойчивые положения равновесия, устойчивые предельные циклы, странные аттракторы, к которым стремятся фазовые траектории открытых систем, попав в их область притяжения [42]. Возвращаясь к исследованиям В. П. Милованова, отметим, что, начиная с 1974 г., им и его соавторами решен большой круг задач по моделированию социально-экономических систем на основе идей из биофизико-химической кинетики и качественной теории динамических систем. К ним следует отнести задачи моделирования процессов обмена и обращения в экономике [46 – 50], динамики функционирования малых социальных групп [50], моделирования экономического развития [51 – 54] и развития науки [55 – 57], моделирования процессов в психологии [58 – 60] и самоорганизации неравновесных экономических систем [61, 62]. Основным отличием перечисленных работ от наших является неучет в них логистических членов в динамических моделях социально-экономических систем.

Итак, мы рассмотрели основные подходы к моделированию конкурентно-кооперационных взаимодействий в социально-экономических системах, лежащих в сфере аналогий с популяционной динамикой, а также выделили четыре группы работ (подходов) в социально-экономическом моделировании, опирающихся на уравнения и идеи популяционной динамики [18, с. 23-27]■

[3]В популяционной экологии (популяционной динамике) это плотности популяций (количество особей данной популяции на единице площади или в единице объема).

ЛИТЕРАТУРА

1. МОСКОВКИН В. М., ЖУРАВКА А. В. ПЬЕР-ФРАНСУА ВЕРХУЛЬСТ – ЗАБЫТЫЙ ПЕРВООТКРЫВАТЕЛЬ ЗАКОНА ЛОГИСТИЧЕСКОГО РОСТА И ОДИН ИЗ ОСНОВАТЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ // НАУКА ТА НАУКОЗНАВСТВО.– К., 2002.– № 3.

2. VERHULST P.-F. NOTICE SUR LA LOI QUE LA POPULATION SUIT DANS SON ACCROISSEMENT //CORRESPONDENCE MATHEMATIQUE ET PHYSIQUE.- BRUXELLES, 1838.- TOME 10.- P. 113 - 121.

3. VERHULST P.-F. RECHERCHES MATHEMATIQUES SUR LA LOI D'ACCROISSEMENT DE LA POPULATION // NOUVEAUX MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES LETTRES DE BRUXELLES, 1845.– № 18.- P. 1 - 38.

4. PEARL R., REED L. J. ON THE RATE GROWTH OF THE POPULATION OF THE UNITED STATES SINCE 1790 AND ITS MATHEMATICAL REPRESENTATION // PROC. NAT. ACAD. SCI. USA, 1920.- VOL 6.- P. 274 - 288.

5. PEARL R. THE BIOLOGY OF DEATH: V. NATURAL DEATH, PUBLIC HEALTH AND THE POPULATION PROBLEM// SCI. MONTH., 1921.- VOL. 13.- P. 206.

6. VOLLTERRA V. VARIAZIONI E FLUTTUAZIONI DEL NUMERO D'INDIVIDUI IN SPECIE ANIMALI CONVIVENTI.– «MEM. ACAD. LINCEI», 1926. T. 2.

7. LOTKA A. J. ELEMENTS OF PHYSICAL BIOLOGY. WILLIAMS AND WILKINS,BALTIMORE,1925.

8. VOLLTERRA V. LECONS SUR LA THEORIE MATHEMATIQUE DE LA LUTTE POUR LA VIE. PARIS, 1931.

9. ВОЛЬТЕРРА В. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БОРЬБЫ ЗА СУЩЕСТВОВАНИЕ.– М.: НАУКА, 1976.– 286 С.

10. GAUSE G. F. THE STRUGGLE FOR EXISTENCE,WILLIAMS AND WILKINS,BALTIMORE.– 1934.– 163 P.

11. ДЖ. М. СМИТ. МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ.М.: МИР,1976.– 184 С.

12. HARDIN G. THE COMPETITIVE EXCLUSION PRINCIPLE //SCIENCE,1960.– VOL. 131.– P. 1292 - 1297.

13. LACK D. DARWIN'S FINCHES.– LONDON: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS,1947.

14. GAUSE G. F. EXPERIMENTAL STUDIES OF THE STRUGGLE FOR EXISTENCE //J. EXP. BIOL.– 1932.– VOL. 9, № 4.– P. 389 - 402.

15. ОДУМ Ю. ЭКОЛОГИЯ: В 2-Х ТОМАХ. Т. 2.– М.: МИР,1986.– 376 с.

16. GILPIN M. E., JUSTICE K. E. REINTERPRETATION OF THE INVALIDATION OF THE PRINCIPLE OF COMPETITIVE EXCLUSION //NATURE.– 1972.– VOL. 236.– P. 273 - 301.

17. WIEGERT R. G. COMPETITION: A THEORY BASED ON REALISTIC GENERAL EQUATIONS OF POPULATION GROWTH // SCIENCE.– 1974.– VOL. 185.– P. 539 – 542.

18. МОСКОВКИН В. М., ЖУРАВКА А. В. МАТЕМАТИЧЕСКОЕМОДЕЛИРОВАНИЕКОНКУРЕНТНО-КООПЕРАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ // ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА.– ДОНЕЦК, 2001.– №3-4.– С. 46 - 51.

19. LU Z, TAKEUCHI Y. QUALITATIVE STABILITY AND GLOBAL STABILITY FOR LOTKA-VOLTERRA SYSTEMS // J. OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS.– 1994.– V. 182.– № 1.– P. 260 - 268.

20. GOH B. S. STABILITY IN MODELS OF MUTUALISM//THE AMERICAN NATURALIST.– 1979.– VOL. 113, №2.– P. 261 - 275.

21. MAY R. M. MODEL ECOSYSTEMS.- PRINCETON: U.P.,1973.

22. НИКОЛИС Г., ПРИГОЖИН И. САМООРГАНИЗАЦИЯ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ. ОТ ДИССЕПАТИВНЫХ СТРУКТУР К УПОРЯДОЧНОСТИ ЧЕРЕЗ ФЛУКТУАЦИИ.– М.: МИР, 1979.– 512 с.

23. МОСКОВКИН В. М., ШЕВЧЕНКО Л. П., ЖУРАВКА А. В. МАТЕМАТИЧЕСКОЕМОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НА ОБЩИХ РЫНКАХ ТРУДА И КАПИТАЛА // ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА.– ДОНЕЦК, 2001.– № 5-6.– С. 31 - 35.

24. МОСКОВКИН В. М. ОСНОВЫ КОНЦЕПЦИИ ДИФФУЗИИ ИННОВАЦИЙ // БИЗНЕС ИНФОРМ.– 1998.– № 17-18.– С.41-48.

25. МОСКОВКИН В. М. МАТЕМАТИЧЕСКОЕМОДЕЛИРОВАНИЕМЕЖЭТНИЧЕСКИХ КОНКУРЕНТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ //БИЗНЕС ИНФОРМ.– 2000.– № 4.– С. 11 - 13.

26. МОСКОВКИН В. М. КОНКУРЕНТНЫЕВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОБЩЕСТВЕ(МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ) // БИЗНЕС ИНФОРМ.– 2000.– № 2.– С. 36 - 39.

27. ЖУРАВКА А. В., МОСКОВКИН В. М. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬРОСТА КОЛИЧЕСТВА ИННОВАЦИОННО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ФИРМ // НАУКОВИЙ ВІСНИК БУДІВНИЦТВА.– ХАРКІВ, 2001.– № 115.– С. 286-289.

28. TAKEUCHI YASUHIRO, KARMESHU, DYNAMIC MODEL OF THREE COMPETING SOCIAL GROUPS // INT. JOURNAL OF SYSTEMS SCIENCE.– 1989.– VOL 20, №11.– P. 2125 - 2137.

29. KARMESHU, PATHRIA R. K. // J. MATH. SOCIOL.– 1980.–VOL. 7.– P. 47.

30. BARTHOLOMEW D. J. // CAN. J. STATISTICS.– 1984.–VOL. 12.– P. 39.

31. BARTHOLOMEW D. J.// J. MATH. SOCIOL.– 1976.–VOL. 4.– P. 187.

32. BARTHOLOMEW D. J. STOCHASTIC MODELS FOR SOCIAL PROCESSES.– CHICHESTER: WILEY (THIRD EDITION), 1982.

33. OSIE G. K., THOMPSON J. W.// J.APPL. PROBAB.–1977.– VOL. 14.– P. 127.

34. ПОВЕЩЕНКО Г., ЧЕХОВИЙ Ю. ПРО МОДЕЛЬ ЕВОЛЮЦІЇ ПРОДУКТИВНИХ СИЛ СУСПІЛЬСТВА //І УКРАЇНСЬКА КОНФЕРЕНЦІЯ З АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ «АВТОМАТИКА-94».– К., 1994.– С. 312.

35. ПОВЕЩЕНКО Г., ЧЕХОВИЙ Ю. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ СПІЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ // СУЧАСНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ — ШЛЯХ ДО ІНФОРМАЦІЙНОГО СУСПІЛЬСТВА.– К., 1998.– С. 63 - 70.

36. ПОВЕЩЕНКО Г., ЧЕХОВОЙ Ю. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ОБЩЕСТВЕННЫХ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ СИЛ // СОЦИОЛОГИЯ: ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, МАРКЕТИНГ.- К., 2001.– №3.– С. 41 - 59.

37. ХМЕЛЬКО В. ОБЩЕСТВЕННОЕПРОИЗВОДСТВО ЖИЗНИ: СТРУКТУРА ПРОЦЕССОВ И ЕЕ ДИНАМИКА // ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.– М., 1987.– № 2.

38. ХМЕЛЬКО В. КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬСТРУКТУРЫ И ДИНАМИКИ ПРОЦЕССОВ ОБЩЕСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА ЖИЗНИ // МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ.– М., 1989.

39. ПРИГОЖИН И., СТЕНГЕРС И. ПОРЯДОК ИЗ ХАОСА: НОВЫЙ ДИАЛОГ ЧЕЛОВЕКА С ПРИРОДОЙ.– М.: ПРОГРЕСС, 1986.– 431с.

40. НИКОЛИС Г., ПРИГОЖИН И. ПОЗНАНИЕСЛОЖНОГО: ВВЕДЕНИЕ.– М.,1990.– 342 с.

41. ИСИДА К. НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА ГИПЕРЦИКЛОВ // ТЕРМОДИНАМИКА И РЕГУЛЯЦИЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.– М., 1984.– С. 238.

42. МИЛОВАНОВ В. П. НЕРАВНОВЕСНЫЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: СИНЕРГЕТИКА И САМООРГАНИЗАЦИЯ.–М.: ЭДИТАТОРИАЛ УРСС, 2001.– 264 с.

43. РОМАНОВСКИЙ Ю. М., СТЕПАНОВА Н. В., ЧЕРНАВСКИЙ Д. С. ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОФИЗИКА (КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОФИЗИКЕ).– М.: ПОСВЯЩЕНИЕ, 1971.– 136 с.

44. ПРИГОЖИН И. ВВЕДЕНИЕВ ТЕРМОДИНАМИКУ НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ.– М.: ИЛ., 1961.

45. ГЛЕНСДОРФ П., ПРИГОЖИН И. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТРУКТУРЫ, УСТОЙЧИВОСТИ И ФЛУКТУАЦИИ.– М.: МИР, 1973.– 280 с.

46. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬТОРГОВОЙ СИСТЕМЫ //АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ. ПОД РЕД. Ю.А. РЯЗАНОВА.– М., 1977.– ВЫП. 10.– С. 64 - 67.

47. СИНЬКО В. И., МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОГО СНАБЖЕНИЯ И КАЧЕСТВО ПРОДУКЦИИ//ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В СНАБЖЕНИИ. - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1979.– С. 86 - 100.

48. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЦЕНООБРАЗОВАНИЮ // ВСЕСОЮЗНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ТЕОРИЯ СИСТЕМ И РАЗРАБОТКА АСУ». ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ДИЛИЖАН, 5-7 ОКТЯБРЯ.– М., 1979.– С. 64 - 65.

49. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. МОДЕЛИРОВАНИЕЗАКОНА СТОИМОСТИЦЕН, ЭМИССИИ ДЕНЕГ, КУРСОВ ВАЛЮТНЫХ СИСТЕМ, СТАГФЛЯЦИИ // МЕЖВУЗОВСКИЙ СБОРНИК СТАТЕЙ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ».- М.: МИЭМ, 1983.– С. 153 – 160.

50. МИЛОВАНОВ В. П. ОБМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ: ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЦЕНЫ, ВЗАИМНАЯ ДИНАМИКА ОЦЕНИВАЮЩИХ ФАКТОРОВ; ТЕОРИЯ МАЛЫХ СОЦИАЛЬНЫХ ГРУПП //АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ. МЕЖВУЗОВСКИЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ.– М.: ВЗМИ.– С. 134 - 136.

51. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ // НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.- ТРУДЫ МИЭМ.– М., 1973.- ВЫП. 36.- М., 1973.– С. 69 - 80.

52. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ // МАТЕРИАЛЫ ВСЕСОЮЗНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ», 15-17 МАРТА, 1982.– ТБИЛИСИ.– С. 110 - 111.

53. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. О НАПРАВЛЕНИИ ЭВОЛЮЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ // МОСКОВСКОЕ ГОРОДСКОЕ ПРАВЛЕНИЕ НТО ПРИБОРОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ. МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ. КОНФЕРЕНЦИЯ «ТЕОРИЯ СИСТЕМ И РАЗРАБОТКА АСУ». ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ.– 1982.– С. 24.

54. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ // КИБЕРНЕТИКА.– 1984.–№ 2.– С. 87 - 92.

55. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ // НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ТРУДЫ МИЭМ.- М., 1974.- ВЫП. 46.– С. 240 - 255.

56. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬВОЗРАСТАЮЩЕГО ЧИСЛА НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ // ТР. ВСЕСОЮЗНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА ПО УПРАВЛЕНИЮ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ (ТБИЛИСИ, 1973).- ТБИЛИСИ: МЕЦНИРИЕБА, 1974.– С. 230 - 237.

57. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А., СИНЬКО В. И. МОДЕЛИРОВАНИЕРАЗВИТИЯ НАУКИ // НАУКОВЕДЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА. ВЫП. 23.– К.: НАУКОВА ДУМКА, 1983.– С. 34 - 42.

58. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ // АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ. МЕЖВУЗОВСКИЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ.– М.: ВЗМИ, 1984.– С. 89 - 91.

59. МИЛОВАНОВ В. П., ПУПКОВ К. А. ИНТУИЦИЯ КАК ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ //АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ / ПОД РЕД. Ю. А. РЯЗАНОВА.– М.: ВЗМИ, 1983.– С. 42 - 45.

60. МИЛОВАНОВ В. П. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЛЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ И МЫСЛИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ МОЗГА // МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ. МЕЖВУЗОВСКИЙ СБОРНИК.- М.: МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ, 1986.– С. 159 - 162.

61. МИЛОВАНОВ В. П. КООПЕРАТИВНЫЕЯВЛЕНИЯ И САМООРГАНИЗАЦИЯ В ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ И СОЦИАЛЬНЫХ КОЛЛЕКТИВАХ // МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.- М.: ЦЭМИ АН СССР, 1991.– С. 38 - 56.

62. МИЛОВАНОВ В. П. КООПЕРАТИВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И САМООРГАНИЗАЦИЯ В ЦЕНООБРАЗОВАНИИ // ВЕСТНИК МГУ. СЕР.6 ЭКОНОМИКА, 1993.– № 6.

Материал предоставлен 28. 06. 02 г.