ВЛАДИМИР МОСКОВКИН

ХАРЬКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НАУЧНЫХ КАДРОВ

При построении математической модели динамики научных кадров возьмем за основу их постсоветскую номенклатуру и будем рассматривать трисоставляющие (категории) общей совокупности научных кадров: x – численность научных работников без научной степени; y – численность кандидатов наук; z – численность докторов наук. Процесс воспроизводства научных кадров, их безвозвратного выбытия, а также переходы научных кадров из одной категории в другую опишем динамической системой третьего порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha_1 x - \beta_1 xy - \gamma_1 xz - \varepsilon_1 x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha_2 y - \gamma_2 y + \beta_1 xy + \gamma_1 xz - \beta_2 yz - \varepsilon_2 y^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = -\alpha_3 z + \beta_2 yz + \gamma_2 y - \varepsilon_3 z^2 \end{cases} \qquad (1)$$

где $\alpha_1 x$ – воспроизводство научных кадров без научной степени (разность между их подготовкой и выбытием, не связанным с переходом в категорию кандидатов наук в единицу времени); $\beta_1 xy$ – интенсивность подготовки кандидатов наук из числа неостепененных научных кадров (x) кандидатами наук (y); $\gamma_1 xz$ – интенсивность подготовки кандидатов наук из числа неостепененных научных кадров (x) докторами наук (z); $\alpha_2 y$ – интенсивность выбытия кандидатов наук из категории научных кадров, не связанным с переходом в категорию докторов наук (выбытие за счет смертности, интеллектуальной миграции, перехода в другую сферу деятельности); $\gamma_2 y$ – интенсивность самоподготовки кандидатов наук до уровня докторов наук; $\beta_2 yz$ – интенсивность подготовки докторов наук из числа кандидатов наук (y) докторами наук (z): $\alpha_3 z$ – интенсивность выбытия докторов наук из категории научных кадров; $\varepsilon_1 x^2$, $\varepsilon_2 y^2$, $\varepsilon_3 z^2$ – члены, описывающие внутригрупповую конкуренцию в своих категориях (широко используются в моделях популяционной динамики как члены, описывающие самоограниченный (логистический) рост в уравнении Ферхюльста).

В этой модели предполагалось, что кандидаты наук готовятся только при научном руководстве со стороны кандидатов ($\beta_1 xy$) и докторов ($\gamma_1 xz$) наук, а доктора наук готовятся самостоятельно ($\gamma_2 y$) или при участии научного консультанта – доктора наук ($\beta_2 yz$).

Для простоты дальнейшего анализа предположим, что $\gamma_2 = 0$ (это соответствует современной практике, когда докторов наук готовят исключительно с участием научных консультантов). В этом случае особые (равновесные) точки динамической модели (1) находятся из решения алгебраической системы уравнений:

$$\begin{cases} x(\alpha_1 - \beta_1 y - \gamma_1 z - \varepsilon_1 x) = 0 \\ y(-\alpha_2 + \beta_1 x - \beta_2 z - \varepsilon_2 y) + \gamma_1 xz = 0. \\ z(-\alpha_3 + \beta_2 y - \varepsilon_3 z) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Эта система уравнений имеет пять неотрицательных решений:

1. $x^0 = y^0 = z^0 = 0$;

2. $x^0 = \dfrac{\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\varepsilon_2}{\beta_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}, \; y^0 = \dfrac{\alpha_1\beta_1 - \varepsilon_1\alpha_2}{\beta_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}, \; z^0 = 0;$

3. $x^0 = \dfrac{\alpha_1}{\varepsilon_1}, \; y^0 = z^0 = 0;$

$$x^0 = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 - (\beta_1\varepsilon_3 + \gamma_1\beta_2)z^0}{\varepsilon_1\beta_2}, \; y^0 = \frac{\alpha_3 + \varepsilon_3 z^0}{\beta_2},$$

4. $$z^0_{1,2} = -\frac{B_0\alpha_3 - A_0\varepsilon_3 - \gamma_1 a_0}{2(\gamma_1\beta_2 a_1 + B_0\varepsilon_3)} \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{(B_0\alpha_3 - A_0\varepsilon_3 - \gamma_1 a_0)^2}{4(\gamma_1\beta_2 a_1 + B_0\varepsilon_3)^2} + \frac{A_0 a_3}{\gamma_1\beta_2 a_1 + B_0\varepsilon_3}},$$

где

$$a_0 = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{\varepsilon_1\beta_2}, \; a_1 = \frac{\beta_1\varepsilon_3 + \gamma_1\beta_2}{\varepsilon_1\beta_2};$$

$$A_0 = \frac{\beta_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1) - \varepsilon_1(\alpha_2\beta_2 + \varepsilon_3\alpha_3)}{\beta_2\varepsilon_1};$$

$$B_0 = \frac{\beta_1(\beta_1\varepsilon_3 + \gamma_1\beta_2) + \varepsilon_1\left(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \beta_2^2\right)}{\varepsilon_1\beta_2}.$$

В четвертом случае имеем два решения системы (2), которые следует дополнительно исследовать на действительность и неотрицательность.

Матрица линеаризованной системы (1) имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & -\beta_1 x^0 & -\gamma_1 x^0 \\ \beta_1 y^0 + \gamma_1 z^0 & v_2 & \gamma_1 x^0 - \beta_2 y^0 \\ 0 & \beta_2 z & v_3 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

где
$$v_1 = \alpha_1 - \beta_1 y^0 - \gamma_1 z^0 - 2\varepsilon_1 x^0;$$
$$v_2 = \alpha_2 + \beta_1 x^0 - \beta_2 z^0 - 2\varepsilon_2 y^0;$$
$$v_3 = -\alpha_3 + \beta_2 y^0 - 2\varepsilon_3 z^0.$$

При $x^0 = y^0 = z^0 = 0$ характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda I| = (\alpha_1 - \lambda)(-\alpha_2 - \lambda)(-\alpha_3 - \lambda) = 0, \qquad (4)$$

откуда собственные числа матрицы A равны: $\lambda_1 = \alpha_1 > 0$, $\lambda_2 = -\alpha_2 < 0$, $\lambda_3 = -\alpha_3 < 0$,откуда следует, что нулевая особая точка является седлом. Здесь I – единичная матрица.

Во втором случае характеристическое уравнение приводится к виду

$$|A - \lambda I| = \left[\frac{\beta_2(\alpha_1\beta_1 - \varepsilon_1\alpha_2) - \left(\beta_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right)\alpha_3}{\beta_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2} - \lambda\right] \times$$
$$\times\left[(A - \lambda)(B - \lambda) + \beta_1^2 AB\right] = 0, \qquad (5)$$

где $A = \frac{-\varepsilon_1(\alpha_1\varepsilon_2 + \alpha_2\beta_1)}{\beta_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}$; $B = \frac{\varepsilon_2(\alpha_2\varepsilon_1 - \alpha_1\beta_1)}{\beta_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}$.

Собственные числа матрицы A находятся из решения уравнения (5):

$$\lambda_1 = \frac{\beta_2(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\varepsilon_1) - \alpha_3\left(\beta_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right)}{\beta_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2};$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+B)^2}{4} - AB\beta_1^2},$$

где A, B – те же, что и в формуле (5).

В частном случае при $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \gamma_i = \varepsilon_i = \beta$ имеем $x^0 = \frac{\alpha}{\beta}$, $y^0 = z^0 = 0$ и приходим к случаю 3.

В третьем случае характеристическое уравнение имеет вид

$$(-\alpha_3 - \lambda)(-\alpha_1 - \lambda)\left(-\alpha_2 + \frac{\alpha_1\beta_1}{\varepsilon_1} - \lambda\right) = 0, \qquad (6)$$

откуда $\lambda_1 = -\alpha_3 < 0$, $\lambda_2 = -\alpha_1 < 0$, $\lambda_3 = -\alpha_2 + \frac{\alpha_1\beta_1}{\varepsilon_1}$.

При $-\alpha_2 + \frac{\alpha_1\beta_1}{\varepsilon_1} < 0$ приходим к устойчивому узлу, при $-\alpha_2 + \frac{\alpha_1\beta_1}{\varepsilon_1} > 0$ — к седлу, при $-\alpha_2 + \frac{\alpha_1\beta_1}{\varepsilon_1} = 0$ имеет место бифуркация типа «седло-узел».

Четвертый случай, состоящий из двух особых точек, слишком громоздок для аналитического рассмотрения, поэтому на нем останавливаться не будем. Отметим только, что здесь возникают наиболее интересные ситуации при наличии ненулевых компонент особых точек.

Рассмотрим теперь ситуацию при отсутствии внутригрупповой конкуренции, когда $\varepsilon_i = 0$. В этом случае алгебраическая система (2) имеет следующие неотрицательные решения:

1. $x^0 = y^0 = z^0 = 0$;
2. $x^0 = \frac{\alpha_2}{\beta_1}$, $y^0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $z^0 = 0$;
3. $x^0 = \frac{\alpha_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_2\gamma_1)}{\alpha_1\beta_2\gamma_1}$, $y^0 = \frac{\alpha_3}{\beta_2}$, $z^0 = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{\gamma_1\beta_2}$.

В третьем случае при $\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 > 0 \Leftrightarrow z^0 > 0$ автоматически следует, что $x^0 > 0$.

В первом случае, также как и ранее при $\varepsilon_i \neq 0$ имеем седловую особую точку в нуле.

Во втором случае характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha_2 & -\frac{\gamma_1\alpha_2}{\beta_1} \\ \alpha_1 & -\lambda & C \\ 0 & 0 & B-\lambda \end{vmatrix} = (B-\lambda)\left(\lambda^2 + \alpha_1\alpha_2\right) = 0, \qquad (7)$$

где $C = \frac{\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1}$, $B = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{\beta_1}$.

Из уравнения (7) получим:

$$\lambda_1 = B = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{\beta_1}, \ \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\alpha_1\alpha_2}.$$

Таким образом, при $B > 0$ особая точка $x^0 = \frac{\alpha_2}{\beta_1}$, $y^0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $z^0 = 0$ является неустойчивым фокусом, при $B < 0$ — устойчивым фокусом, при $B = 0$ – центром (здесь не возникает бифуркации рождения цикла, так как $\det A = 0$).

В третьем случае матрица (3) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{M\beta_1}{\gamma_1} & M \\ \alpha_1 & N & \frac{\alpha_3(\alpha_2\gamma_1 - \alpha_3\beta_1)}{\alpha_1\beta_2} \\ 0 & \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{\gamma_1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где:

$$M = \frac{-\alpha_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_2\gamma_1)}{\alpha_1\beta_2},$$

$$N = \frac{\alpha_3\beta_1(2\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\gamma_1) - \alpha_3^2\beta_1^2 - \alpha_1^2\beta_2^2}{\alpha_1\beta_2\gamma_1} - \alpha_2.$$

Тогда характеристическое уравнение можно представить в виде

$$|A - \lambda I| = \frac{(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_2)}{\gamma_1}\left[\frac{(\alpha_3\beta_1 - \alpha_2\gamma_1)\alpha_3}{\alpha_1\beta_2}\lambda - \alpha_1 M\right] - \lambda\left[(\lambda - N)\lambda - \frac{\alpha_1\beta_1 M}{\gamma_1}\right] = 0, \qquad (9)$$

которое представляет собой кубическое уравнение.

Можно показать, что в этом случае

$\det A = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1)\alpha_1 M}{\gamma_1} < 0$, так как $\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 > 0$ и $M < 0$. В этом случае наверняка существует область параметров динамической системы, в которой она является устойчивой. В частном случае $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \gamma_i = \beta$ третья особая точка переходит во вторую: $x^0 = y^0 = \frac{\alpha}{\beta}$, $z^0 = 0$.

Таким образом, в данной статье нами построена математическая модель динамики научных кадров в виде нелинейной динамической системы третьего порядка, определены ее особые точки в двух вариантах: $(\gamma_2 = 0, \varepsilon_i \neq 0)$ и $(\gamma_2 = 0, \varepsilon_i = 0)$, проделан анализ их устойчивости в самом общем случае. В дальнейшем необходим детализированный анализ устойчивости особых точек этой системы с проведением численных экспериментов, поиском бифуркаций рождения цикла и странных аттракторов.

Материал предоставлен 12.05.2000 г.