ВЛАДИМИР МОСКОВКИН

ХАРЬКОВ

УДК 330.42

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖЭТНИЧЕСКИХ КОНКУРЕНТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В работе [1] нами была высказана идея о возможности моделирования процесса межнациональных демографических взаимодействий с помощью динамических систем. В этой работе предлагалось рассмотреть динамическую систему третьего порядка для моделирования межнациональных демографических взаимодействий в Крыму, в котором превалируют по численности три этнические общины — русская, украинская и крымско-татарская. В ней же были высказаны соображения по структуре балансовой математической модели и учету в ней процессов рождаемости, смертности и миграции. Предлагалось раздельно учитывать процессы рождаемости в рамках одной общины (этнической группы) и рождаемости при межнациональных (межэтнических) браках. При этом во втором случае предлагалось использовать коэффициенты, характеризующие вероятность отнесения ребенка, родившегося в межнациональном браке, к той или иной национальности [1].

Ниже вместо терминов «межнациональные демографические взаимодействия» и «межнациональный», используемых в работе [1], мы будем использовать термины «межэтнические конкурентные взаимодействия» и «межэтнический». Рассматриваемые конкурентные взаимодействия для трех этнических групп опишем динамической системой третьего порядка, по аналогии с тем, как это принято при моделировании конкурентных взаимодействий в популяционной экологии [2, 3].

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1^2 - \delta_{21} N_1 N_2 - \delta_{31} N_1 N_3 + \\ \quad + (\gamma_{21} - \gamma_{12}) N_1 N_2 + (\gamma_{31} - \gamma_{13}) N_1 N_3 + M_1 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = \alpha_2 N_2 - \beta_2 N_2^2 - \delta_{12} N_1 N_2 - \delta_{32} N_2 N_3 + \\ \quad + (\gamma_{12} - \gamma_{21}) N_1 N_2 + (\gamma_{32} - \gamma_{23}) + M_2 \\ \dfrac{dN_3}{dt} = \alpha_3 N_3 - \beta_3 N_3^2 - \delta_{13} N_1 N_3 - \delta_{23} N_2 N_3 + \\ \quad + (\gamma_{13} - \gamma_{31}) N_1 N_3 + (\gamma_{23} - \gamma_{32}) N_2 N_3 + M_3 \end{cases}, \qquad (1)$$

где α_i — разность между коэффициентами рождаемости и смертности в i-той этнической группе; β_i и δ_{ij} — коэффициенты внутриэтнической и межэтнической конкуренции, введенные нами по аналогии с коэффициентами внутривидовой и межвидовой конкуренции, известными в популяционной экологии; γ_{ij} — коэффициент, характеризующий вероятность отнесения ребенка, родившегося в ij-том межэтническом браке, к j-той этнической группе; M_i — сальдо миграции для i-той этнической группы; N_i — численность населения i-той этнической группы; t — время.

Отметим, что в записи коэффициента межэтнической конкуренции δ_{ij} понимается конкурентное воздействие (давление) i-той этнической группы на j-тую. Очевидно, что по аналогии с динамической системой (1) легко записать динамическую систему n-го порядка для моделирования межэтнических конкурентных взаимодействий для n этнических групп. Далее отметим, что члены динамической системы (1), описывающие межэтнические браки, также связаны с процессом конкуренции в смысле привлекательности той или иной этнической принадлежности. Таким образом, большинство членов рассматриваемой модели обязано наличию конкурентных взаимодействий, что и побудило нас заменить термин «межнациональные демографические взаимодействия» на термин «межэтнические конкурентные взаимодействия». Отметим, что близкая динамическая система третьего порядка была предложена в работе [4] при моделировании конкурентных взаимодействий трех социальных групп.

Особые (равновесные) точки динамической системы (1) могут быть найдены в явном виде при $M_i = 0$. Общее количество этих точек равняется восьми. Выпишем вначале первые семь особых точек, координаты которых имеют одну нулевую компоненту или более:

$$1. (0,0,0);\ 2. \left(0, \frac{\alpha_2\beta_3 + \alpha_3(\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32})}{\beta_2\beta_3 - (\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23})(\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32})}, \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_3\beta_2 + \alpha_2(\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23})}{\beta_2\beta_3 - (\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23})(\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32})} \right);$$

$$3. \left(\frac{\alpha_1\beta_3 + \alpha_2(\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31})}{\beta_1\beta_3 - (\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31})(\gamma_{13} - \gamma_{31} - \delta_{13})}, 0, \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_3\beta_1 + \alpha_1(\gamma_{13} - \gamma_{31} - \delta_{13})}{\beta_1\beta_3 - (\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31})(\gamma_{13} - \gamma_{31} - \delta_{13})} \right);$$

$$4. \left(\frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21})}{\beta_1\beta_2 - (\gamma_{12} - \gamma_{21} - \delta_{12})(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21})}, \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_2\beta_1 + \alpha_1(\gamma_{12} - \gamma_{21} - \delta_{12})}{\beta_1\beta_2 - (\gamma_{12} - \gamma_{21} - \delta_{12})(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21})}, 0 \right);$$

$$5. \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, 0, 0 \right);\ 6. \left(0, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, 0 \right);\ 7. \left(0, 0, \frac{\alpha_3}{\beta_3} \right).$$

Координата восьмой точки находится из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\beta_1 N_1 + (\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21}) N_2 + (\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31}) N_3 = -\alpha_1 \\ (\gamma_{12} - \gamma_{21} - \delta_{12}) N_1 - \beta_2 N_2 + (\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32}) N_3 = -\alpha_2 \\ (\gamma_{13} - \gamma_{31} - \delta_{13}) N_1 + (\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23}) N_2 - \beta_3 N_3 = -\alpha_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Решение этой системы в случае, когда ее детерминант Δ не равен нулю, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} N_1^0 = \Delta_1 / \Delta,\ N_2^0 = \Delta_2 / \Delta,\ N_3^0 = \Delta_3 / \Delta, \\ \Delta_1 = (\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31})[-\alpha_2(\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23}) + \alpha_3\beta_2] - \\ \quad - (\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32})[-\alpha_1(\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23}) + \\ \quad + \alpha_3(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21})] - \beta_3[\alpha_1\beta_2 + \alpha_2(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21})], \\ \Delta_2 = -(\gamma_{12} - \gamma_{21} - \delta_{12})[\alpha_1\beta_3 + \alpha_3(\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31})] + \\ \quad + (\gamma_{13} - \gamma_{31} - \delta_{13})[-\alpha_1(\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32}) + \\ \quad + \alpha_2(\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31})] - \beta_1[\alpha_2\beta_3 + \alpha_3(\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32})], \\ \Delta_3 = (\gamma_{13} - \gamma_{31} - \delta_{13})[-\alpha_2(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21}) + \alpha_1\beta_2] - \\ \quad - (\gamma_{12} - \gamma_{21} - \delta_{12})[-\alpha_3(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21}) + \\ \quad + \alpha_1(\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23})] - \beta_1[\beta_2\alpha_3 + \alpha_2(\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23})], \\ \Delta = -\beta_1[\beta_2\beta_3 - (\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23})(\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32})] - \\ \quad - (\gamma_{12} - \gamma_{21} - \delta_{12})[-\beta_3(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21}) - \\ \quad - (\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31})(\gamma_{23} - \gamma_{32} - \delta_{23})] + (\gamma_{13} - \gamma_{31} - \delta_{13}) \times \\ \quad \times [(\gamma_{21} - \gamma_{12} - \delta_{21})(\gamma_{32} - \gamma_{23} - \delta_{32}) + \beta_2(\gamma_{31} - \gamma_{13} - \delta_{31})] \end{cases} \qquad (3)$$

При исследовании на положительность и устойчивость полученных восьми особых точек целесообразно задаваться знакоопределенностью суммарных коэффициентов вида $\gamma_{ij}-\gamma_{ji}-\delta_{ij}$. Здесь только отметим, что первая (нулевая) особая точка является неустойчивой.

Легко показать, что при $\beta_i=\delta_{ij}=\beta$, $\alpha_i=\alpha$ суммарная численность населения всех трех этнических групп $(N=N_1+N_2+N_3)$ описывается известным уравнением Ферхюльста [2 – 6]

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N-\beta N^2, \qquad (4)$$

решение которого имеет вид [3, 5, 6]

$$N(t)=\frac{(\alpha/\beta)}{1+C\,exp(-\alpha t)}, \qquad (5)$$

где C — постоянная интегрирования.

Уравнение Ферхюльста (4) имеет две особые точки: $N^0=0$ — неустойчивый узел, $N^0=\alpha/\beta$ — устойчивый узел.

Ниже проделаем линейный анализ устойчивости особых точек 5, 6 и 7 при $\alpha_i=\alpha$, $\beta_i=\delta_{ij}=\beta$, $\gamma_{ij}-\gamma_{ji}=0$. В этом случае матрица линеаризованной системы (1) в особой точке $(\alpha/\beta, 0, 0)$ примет вид

$$A=\begin{bmatrix}-\alpha & -\alpha & -\alpha\\ 0 & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & -\alpha\end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Тогда коэффициенты характеристического уравнения

$$\lambda^3-trA\lambda^2+\delta\lambda-det\,A=0 \qquad (7)$$

примут вид:

$trA=-3\alpha<0$ — след матрицы A;

$\delta=3\alpha^2>0$ — сумма главных миноров второго ранга матрицы A;

$detA=-\alpha^3<0$ — детерминант матрицы А.

Отсюда видно, что само характеристическое уравнение $\lambda^3+3\alpha\lambda^2+3\alpha^2\lambda+\alpha^3=(\lambda+\alpha)^3=0$ имеет три одинаковых отрицательных корня: $\lambda_{1,2,3}=-\alpha$. Таким образом, приходим к устойчивому узлу.

Матрица линеаризованной системы (1) в особой точке $(0,\alpha/\beta,0)$ примет вид

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -\alpha & -\alpha & -\alpha\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Для нее $trA=-\alpha<0$, $\delta=0$, $detA=0$ и характеристическое уравнение (7) имеет вид $\lambda^3+\alpha\lambda^2=\lambda^2(\lambda+\alpha)=0$. Собственные числа λ равняются: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=-\alpha<0$. Следовательно, рассматриваемая особая точка является вырожденной устойчивой точкой и в ней возможна бифуркация.

Матрица линеаризованной системы (1) в особой точке $(0, 0, \alpha/\beta)$ примет вид

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha & 0\\ -\alpha & -\alpha & -\alpha\end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Для нее $trA=-2\alpha<0$, $\delta=\alpha^2>0$, $detA=0$ и характеристическое уравнение (7) имеет вид

$$\lambda^3+2\alpha\lambda^2+\alpha^2\lambda=\lambda(\lambda+\alpha)^2=0.$$

Собственные числа λ равняются: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=-\alpha<0$ и, следовательно, снова приходим к вырожденной устойчивой особой точке. В ней возможна бифуркация седлово типа (типа «седло-узел»).

Таким образом, во всех трех случаях м ı получили ос бые точки в виде устойчивых узлов.

В работе [4], в которой рассматривалась близкая моде конкурентных взаимодействий трех социальных групп, так была показана возможность описания динамики суммарн численности трех социальных групп уравнением Ферхюльст

Отметим, что близкая к динамической системе (1) (п $M_i=0$) по структуре модель была предложена нами п моделировании межинновационных взаимодействий [6].

Детальный анализ устойчивости особых точек в моде межэтнических конкурентных взаимодействий рассмотри на примере двух этнических групп в отсутствии процес миграции. В этом случае динамическая система второ порядка запишется в виде

$$\begin{cases}\frac{dN_1}{dt}=\alpha_1N_1-\beta_1N_1^2-\delta_{21}N_1N_2+(\gamma_{21}-\gamma_{12})N_1N_2\\ \frac{dN_2}{dt}=\alpha_2N_2-\beta_2N_2^2-\delta_{12}N_1N_2+(\gamma_{12}-\gamma_{21})N_1N_2\end{cases} \qquad (1$$

Найдем все особые точки данной системы:

$$1.(0,0);\ 2.(0,\alpha_2/\beta_2);\ 3.(\alpha_1/\beta_1,0);$$

$$4.\left(\frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2(\gamma_{21}-\gamma_{12}-\delta_{21})}{\beta_1\beta_2-(\gamma_{21}-\gamma_{12}-\delta_{21})(\gamma_{12}-\gamma_{21}-\delta_{12})},\ \frac{\alpha_2\beta_1+\alpha_1(\gamma_{12}-\gamma_{21}-\delta_{12})}{\beta_1\beta_2-(\gamma_{21}-\gamma_{12}-\delta_{21})(\gamma_{12}-\gamma_{21}-\delta_{12})}\right)$$

Как и ранее, рассмотрим частный случай: $\beta_i=\delta_{ij}=\beta$, $\alpha_i=\alpha$

В этом случае особые точки примут вид:

$$1.(0,0);\ 2.(0,\alpha/\beta);\ 3.(\alpha/\beta,0);\ 4.\left(\frac{\alpha}{\gamma_{21}-\gamma_{12}},\frac{\alpha}{\gamma_{12}-\gamma_{21}}\right)$$

Отметим, что для четвертой особой точки $N_1^0+N_2^0=0$ и она является нереальной.

Исследуем устойчивость этих особых точек. Для этог запишем матрицу Якоби для системы (10):

$$A=\begin{bmatrix}\alpha=-2\beta N_1^0+(\gamma_{21}-\gamma_{12}-\beta)N_2^0 & (\gamma_{21}-\gamma_{12}-\beta)N_1^0\\ (\gamma_{12}-\gamma_{21}-\beta)N_2^0 & \alpha-2\beta N_2^0+(\gamma_{12}-\gamma_{21}-\beta)\end{bmatrix}, \qquad (11)$$

а также характеристическое квадратное уравнение с его решением

$$\lambda^2-trA\cdot\lambda+det\,A=0,\ \lambda_{1,2}=\frac{trA\pm\sqrt{tr^2A-4\,det\,A}}{2}. \qquad (12$$

Для первой особой точки $N_1^0=N_2^0=0$ матрица (11) примет вид $A=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$, откуда $trA=2\alpha>0$, $detA=\alpha^2>0$. Следовательно, $\lambda_{1,2}=\alpha>0$ и нулевая особая точка являетс неустойчивым узлом.

Для второй особой точки $N_1^0=0$, $N_2^0=\alpha/\beta$ матрица (11) примет вид

$$A=\begin{bmatrix}(\gamma_{21}-\gamma_{12})\frac{\alpha}{\beta} & 0\\ (\gamma_{12}-\gamma_{21}-\beta)\frac{\alpha}{\beta} & -\alpha\end{bmatrix},$$

откуда

$$trA=-\alpha+\frac{\alpha}{\beta}(\gamma_{21}-\gamma_{12}),\ det\,A=-\frac{\alpha^2}{\beta}(\gamma_{21}-\gamma_{12}).$$

Следовательно,

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha+\frac{\alpha}{\beta}(\gamma_{21}-\gamma_{12})\pm\sqrt{\left[\alpha+\frac{\alpha}{\beta}(\gamma_{21}-\gamma_{12})\right]^2}}{2}.$$

Рассмотрим два случая:

1. $\alpha\beta+\alpha(\gamma_{21}-\gamma_{12})>0 \Leftrightarrow \beta>\gamma_{12}-\gamma_{21}$.

Собственные числа равны: $\lambda_1=\frac{\alpha}{\beta}(\gamma_{21}-\gamma_{12}), \lambda_2=-\alpha$.

Тогда при $\gamma_{21}-\gamma_{12}<0 \Leftrightarrow \gamma_{12}-\gamma_{21}>0$ имеем устойчивый узел. Объединяя оба неравенства, получим, что устойчивый узел имеет место при $0<\gamma_{12}-\gamma_{21}<\beta$, а седло ($\lambda_1$ и λ_2 имеют разные знаки) при

$\gamma_{21}-\gamma_{12}>0 \Leftrightarrow \gamma_{12}-\gamma_{21}<0$.

2. $\alpha\beta+\alpha(\gamma_{21}-\gamma_{12})<0 \Leftrightarrow \beta<\gamma_{12}-\gamma_{21}$.

Собственные числа равны: $\lambda_1=-\alpha, \lambda_2=\frac{\alpha}{\beta}(\gamma_{21}-\gamma_{12})$.

Случай $\gamma_{21}-\gamma_{12}>0 \Leftrightarrow \gamma_{12}-\gamma_{21}<0$ противоречит предыдущему неравенству, то есть вариант седловой точки не имеет места. При $\gamma_{21}-\gamma_{12}<0 \Leftrightarrow \gamma_{12}-\gamma_{21}>0$ имеем устойчивый узел.

Объединяя оба случая, видим, что устойчивый узел имеет место при $\gamma_{12}-\gamma_{21}>0$, а седло — при $\gamma_{12}-\gamma_{21}<0$.

Для третьей особой точки $N_1^0=\alpha/\beta, N_2^0=0$ матрица (11) примет вид

$$A=\begin{bmatrix}-\alpha & \frac{\alpha}{\beta}(\gamma_{21}-\gamma_{12}-\beta)\\ 0 & \frac{\alpha}{\beta}(\gamma_{12}-\gamma_{21})\end{bmatrix},$$

откуда $trA=\alpha+\frac{\alpha}{\beta}(\gamma_{12}-\gamma_{21}),\ det\,A=-\frac{\alpha^2}{\beta}(\gamma_{12}-\gamma_{21})$.

Проделав аналогичный анализ, как и для второй особой точки, получим устойчивый узел при $\gamma_{12}-\gamma_{21}<0$, а седло — при $\gamma_{12}-\gamma_{21}>0$.

Таким образом, если вторая особая точка является устойчивым узлом, то третья — седлом и наоборот.

Итак, в ситуации равенства коэффициентов внутриэтнической и межэтнической конкуренции, а также равенства разности коэффициентов рождаемости и смертности для двух этнических групп со временем происходит подавление одной этнической группы другой в зависимости от знака разности коэффициентов $\gamma_{12}-\gamma_{21}$. Поставим теперь следующий вопрос: возможно ли в данной модели одновременное равновесное сосуществование двух этнических групп? Покажем, что это возможно, например, при отличии коэффициентов внутриэтнической и межэтнической конкуренции: $\beta_i=\beta,\ \delta_{ij}=\delta,\ \beta\neq\delta$ и $\gamma_{12}-\gamma_{21}=0$. В этом случае матрица линеаризованной системы (10) имеет вид

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1-2\beta N_1^0-\delta N_2^0 & -\delta N_1^0\\ -\delta N_2^0 & \alpha_2-2\beta N_2^0-\delta N_1^0\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Найдем след и детерминант этой матрицы:

$$\begin{cases} trA=\alpha_1+\alpha_2-(\delta+2\beta)(N_1^0+N_2^0)\\ det\,A=\alpha_1\alpha_2+2\beta\delta\left[\left(N_1^0\right)^2+\left(N_2^0\right)^2\right]+\\ +4\beta^2N_1^0N_2^0-(\alpha_1\delta+2\alpha_2\beta)N_1^0-(\alpha_2\delta+2\alpha_1\beta)N_2^0\end{cases} \tag{14}$$

Без ограничения общности положим $\alpha_i=\alpha$ и выпишем координаты интересующей нас четвертой особой точки $N_1^0=N_2^0=\frac{\alpha}{\beta+\delta}$.

В этом случае выражения (14) примут вид

$$trA=\frac{-2\alpha\beta}{\beta+\delta}<0,\quad det\,A=\frac{\alpha^2(\beta-\delta)}{(\beta+\delta)}, \tag{15}$$

откуда собственные значения матрицы A запишутся в виде

$$\lambda_1=\frac{\alpha(\delta-\beta)}{\beta+\delta},\ \lambda_2=-\alpha<0. \tag{16}$$

Таким образом, при $0<\delta<\beta$ имеем устойчивый узел, а при $\delta>\beta$ — седло. В первом случае возможно равновесное сосуществование двух этнических групп с одинаковыми численностями.

Посмотрим теперь, что происходит в это же время с двумя другими особыми точками. При $N_1^0=0, N_2^0=\alpha/\beta$ из выражений 14 (при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$) получим

$$trA=-\frac{\alpha\delta}{\beta}<0,\quad det\,A=\frac{\alpha^2(\delta-\beta)}{\beta}, \tag{17}$$

откуда собственные значения матрицы A запишутся в виде

$$\lambda_{1,2}=\frac{\alpha}{2\beta}\left[-\delta\pm\sqrt{\delta^2+4\beta^2-4\beta\delta}\right]. \tag{18}$$

Из выражения (18) следует, что при $\delta>\beta$ собственные значения являются отрицательными и, следовательно, имеет место устойчивый узел. Как было показано ранее, в этом случае четвертая особая точка с ненулевыми компонентами является неустойчивой (седлом).

При $\delta<\beta$ рассматриваемая особая точка является седлом.

При $N_1^0=\alpha/\beta, N_2^0=0$ приходим к тем же выражениям (17) и (18) и к тем же результатам.

Можно сказать, что при $\delta>\beta$ существуют две симметричные области притяжения (аттракторы), в первом квадранте фазовой плоскости (N_1, N_2), к особым устойчивым точкам $(0, \alpha/\beta)$ и $(\alpha/\beta, 0)$. Эти области разделяет между собой сепаратриса $N_2=N_1$.

Итак, нами показано, что равновесное сосуществование двух этнических групп происходит в случае, когда коэффициент внутриэтнической конкуренции превышает аналогичный коэффициент для межэтнической конкуренции при одинаковых значениях параметров воспроизводства и конкуренции обеих этнических групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Московкин В. М.** Перспективы социального моделирования // Бизнес Информ.— 1994.— № 40 – 41.— С. 30 – 32.

2. **Николис Г., Пригожин И.** Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации.— М., 1979.

3. **Прокопенко А. И., Вайнер В. Г., Галкин В. Л.** Экономико-экологическое моделирование.— Х., 1997.

4. **Karmeshu, Yasuhiro Takeuchi.** Dynamic model of three competing social groups // Int. Journ. of Systems Science.— 1989.— V. 20, N 11.— P. 2125 – 2137.

5. **Verhulst P. F.** Notice sur le loi que la population suit dans son accroisement // Corresp. Math. et Phys.— 1838.— V. 10.

6. **Московкин В. М.** Основы концепции диффузии инноваций // Бизнес Информ.— 1998.— № 17 – 18.— С. 41 – 48.

Материал предоставлен 04.04.2000 г.