ВЛАДИМИР МОСКОВКИН

ХАРЬКОВ

УДК 330.42

К АНАЛИЗУ ДВУХСТРАНОВОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ДИРДОРФА

На основе модели роста Солоу для закрытой односекторной экономики [1] и двухстрановой модели роста Пасинетти [2], в работе Дирдорфа [3] была предложена двухстрановая модель экономического роста в терминах «рабочая сила» и «капитал»

$$\frac{dL_1}{dt} = n_1 L_1, \frac{dL_2}{dt} = n_2 L_2,$$
$$\frac{dK_1}{dt} = s_1(wL_1 + rK_1), \frac{dK_2}{dt} = s_2(wL_2 + rK_2) \qquad (1)$$

где L_1, K_1 – численность рабочей силы и объем капитала для первой страны; L_2, K_2 – то же для второй страны; n_1, s_1 – коэффициент роста численности рабочей силы и норма сбережения для первой страны; n_2, s_2 – то же для второй страны; $w = f\left(\frac{K}{L}\right) - r\frac{K}{L}$ – конкурентная заработная плата, $K = K_1 + K_2$, $L = L_1 + L_2$; $r = \frac{df(K/L)}{d(K/L)} = f'(K/L), f(K/L)$ – производственная функция.

Очевидно, что система уравнений (1) имеет экспоненциально расходящиеся во времени решения. В связи с этим Дирдорф вводит термин «расходящиеся населения» (*diverging populations*), под которым понимается экспоненциальный рост во времени экономически активного населения, составляющего рабочую силу для двух стран.

Двухстрановая модель экономического роста в виде (1) не представляет интереса для дальнейшего анализа в связи с расходящимися решениями. Поэтому в работе (3) предложена замена переменных

$$\lambda = \frac{L_1}{(L_1 + L_2)}, \rho = \frac{K_1}{(K_1 + K_2)}, k = \frac{K}{L} = \frac{K_1 + K_2}{L_1 + L_2}, \qquad (2)$$

которая позволила свести систему (1) к нелинейной динамической системе третьего порядка

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda(1-\lambda)(n_1 - n_2);$$
$$\frac{d\rho}{dt} = [s_1 w + (n_2 - n_1)\rho]\lambda + (s_1 r - n_2)\rho; \qquad (3)$$
$$\frac{dk}{dt} = [s_1 w + (n_2 - n_1)k]\lambda + (s_1 - s_2)r\rho + s_2(w + rk) - n_2 k.$$

Мы выделили три преимущества данной замены переменных.

1. Уменьшение порядка системы уравнений.

2. Новые комплексные и относительные переменные, позволяют уйти от рассмотрения расходящихся во времени решений.

3. Третья замена переменных хорошо вписывается в математическую структуру переменных коэффициентов w и r системы уравнений (1), так как эти коэффициенты записаны в виде функции от третьей комплексной переменной k.

При анализе динамической системы (3) автор работы [3] отходит от первоначального рассмотрения предшествующей системы (1) в виде конкурентных взаимодействий рабочей силы и капитала двух стран и анализирует ее в терминах «север» – «юг», где индекс «1» соответствует промышленно развитым странам, а индекс «2» – слаборазвитым (развивающимся) странам. При таком рассмотрении накладываются естественные ограничения на параметры n_1 и s_1; $n_2 > n_1$, $s_1 > s_2$. Из первого неравенства и первого уравнения системы (3) следует, что $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$. В этом случае асимптотические уравнения для переменных ρ и k существенно упрощаются [3]:

$$\frac{d\rho}{dt} = (s_1 r - n_2)\rho, \frac{dk}{dt} = (s_1 - s_2)r\rho + [s_2 f(k) - n_2 k]. \qquad (4)$$

Эта система уравнений качественно (графически) анализируется в фазовой плоскости (k, ρ). Ниже мы дадим более строгий линейный анализ устойчивости особых (равновесных) точек этой системы, координаты которых записываются в явном (для ρ_i) или неявном виде (для k_i):

$$\begin{cases} 1.\ \rho_1 = 0, s_2 f(k_1) - n_2 k_1 = 0; \\ 2.\ \rho_2 = \dfrac{s_1[n_2 k_2 - s_2 f(k_2)]}{(s_1 - s_2)n_2}, s_1 f'(k_2) - n_2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Для положительности ρ_2, с учетом $s_1 > s_2$, необходимо, чтобы имело место неравенство $n_2 k_2 - s_2 f(k_2) > 0$. Матрица линеаризованной системы (4) в первой особой точке имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} s_1 f'(k_1) - n_2 & 0 \\ (s_1 - s_2) f'(k_1) & s_2 f(k_1) - n_2 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

тогда характеристическое уравнение $|A - \lambda I| = 0$, где I единичная матрица, приведет к следующим собственным значениям матрицы **A**

$$\overline{\lambda_1} = s_1 f'(k_1) - n_2, \overline{\lambda_2} = s_2 f'(k_1) - n_2. \qquad (7)$$

В предположениях работы [3] функция $y = s_2 f(k)$ выходит из нуля, имеет выпуклый вид и пересекают прямую $y = n_2 k$ в единственной точке k_1. При этих предположениях автоматически выполняется неравенство $s_2 f'(k_1) < n_2$, при котором $\overline{\lambda_2} < 0$. Устойчивый узел в первой особой точке будет иметь место при дополнительном условии $\overline{\lambda_1} < 0$, что эквивалентно неравенству $s_1 f'(k_1) < n_2$, которое не рассматривалось при графическом анализе в работе [3]. В противном случае, когда $\overline{\lambda_1} > 0$, мы придем к седловой неустойчивой точке. В вышеуказанной работе было показано, что ось k (при $\rho = 0$) является фазовой траекторией системы (5), при этом движение по этой оси происходит в сторону устойчивой точки $k = k_1$. Данная ситуация интерпретируется в работе [3] как соответствующая модели экономического роста Солоу.

Матрица линеаризованной системы (3) во второй особой точке имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{s_1 f''(k_2)F}{G} \\ G & G+\dfrac{s_1}{n_2}f''(k_2)F \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где $F=n_2k_2-s_2f(k_2), G=n_2\left(\dfrac{s_2}{s_1}-1\right)$.

Отметим, что согласно работы [3] $k_2 > k_1$. Нами получено следующее характеристическое уравнение для матрицы (8):

$$\bar{\lambda}^2-\left(G+\frac{B}{n_2}\right)\bar{\lambda}-B=0, \qquad (9)$$

откуда

$$\bar{\lambda}_{1,2}=\frac{1}{2}\left(G+\frac{B}{n_2}\pm\sqrt{\left(G+\frac{B}{n_2}\right)^2+4B}\right), \qquad (10)$$

где $B=s_1f''(k_2)[n_2k_2-s_2f(k_2)]$.

Выпуклость функции **f(k)** приводит к неравенству $f''(k_2)<0$, откуда с учетом выполнения неравенства $F=n_2k_2-s_2f(k_2)>0$ (условие положительности ρ_2), получим **B<0**. Из неравенств **B** < 0, $s_1 > s_2$, получим

$G+\dfrac{B}{n_2}<0$, откуда автоматически следует устойчивость второй особой точки. При этом возможны два варианта:

1. $G+\dfrac{B}{n_2}\geq 4|B|$, тогда $\lambda_1<0, \lambda_2<0$, и мы приходим к устойчивому узлу;

2. $G+\dfrac{B}{n_2}<4|B|$, тогда имеем два комплексно сопряженных собственных значения с отрицательной действительной частью, то есть приходим к устойчивому фокусу.

Это подтверждает качественный вывод работы [3], в которой отмечалось сходимость (конвергенция) ко второй особой точке, которая не обязательно может носить монотонный характер.

Рассмотрим теперь общий трехмерный случай, тогда матрица линеаризованной системы (3) в особой точке $(\lambda*,\rho*,k*)$ имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} (n_1-n_2)(1-2\lambda*) & 0 & 0 \\ s_1M+(n_2-n_1)f* & [s_1f'(k*)-n_2]+(n_2-n_1)\lambda* & s_1N \\ (s_1-s_2)M+(n_2-n_1)k* & (s_1-s_2)f'(k*) & s_2f'(k*)-n_2+(n_2-n_1)\lambda*+(s_1-s_2)N \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

где $M=f(k*)-k*f'(k*), N=f''(k*)(\rho*-\lambda*k*)$.

При получении матрицы (10) использовалось тождество $f'(k*)-\left(f'(k)k\right)'k_x=-k*f''(k*)$.

Матрица **A** в первой особой точке системы (3) $\lambda*=0, \rho*=0, s_2f(k*)-n_2k*=0$ примет вид:

$$A=\begin{bmatrix} n_1-n_2 & 0 & 0 \\ s_1M & s_1f'(k*)-n_2 & 0 \\ (s_1-s_2)M+(n_2-n_1)k* & (s_1-s_2)f'(k*) & s_2f'(k*)-n_2 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Собственные значения этой матрицы, находящиеся из решения характеристического уравнения $\left|A-\bar{\lambda}I\right|=0$, равняются

$$\bar{\lambda}_1=n_1-n_2<0,\ \bar{\lambda}_2=s_1f'(k*)-n_2, \bar{\lambda}_3=s_2f'(k*)-n_2. \qquad (12)$$

Видим, что $\bar{\lambda}_{2,3}$ имеют тот же вид, что и для матрицы (6). Поэтому здесь возможны варианты устойчивого узла и неустойчивой особой точки седлового типа.

Матрица **A** во второй особой точке $\bar{\lambda}*=1$, $\rho*=\dfrac{s_1[f(k*)-k*f'(k*)]}{n_1-s_1f'(k*)}, s_1f(k*)-n_1k*$ примет вид

$$A=\begin{bmatrix} n_2-n_1 & 0 & 0 \\ \dfrac{s_1M[n_2-s_1f'(k*)]}{n_1-s_1f'(k*)} & s_1f'(k*)-n_2 & M_1 \\ (s_1-s_2)M+(n_2-n_1)k* & (s_1-s_2)f'(k*) & N_1 \end{bmatrix}, \qquad (13)$$

где $M_1=\dfrac{s_1f''(k*)[s_1f(k*)-n_1k*]}{n_1-s_1f'(k*)}$,

$$N_1=s_2f'(k*)-n_1+(\frac{s_2}{s_1}-1)M_1.$$

После громоздких вычислений собственные значения матрицы (13) определяются следующим образом: $\bar{\lambda}_1=n_2-n_1, \bar{\lambda}_2=\xi_2-n_1, \bar{\lambda}_3=\xi_3-n_1$, где ξ_2 , ξ_3 являются корнями квадратного уравнения

$$\xi^2-\xi\left[\left(\frac{s_2}{s_1}-1\right)M_1+f'(k*)(s_1+s_2)\right]+s_1s_2[f'(k*)]^2=0. \qquad (14)$$

Здесь только обратим внимание на линейный случай функции $f(k)$, тогда $f''(k*)=0$. В этом случае $\lambda_2=f'(k*)s_1-n_1, \lambda_3=f'(k*)s_2$.

Возвращаясь к анализу первой особой точки, отметим, что нулевые значения λ и ρ не говорят о том, что $L_1=K_1=0$. Как мы уже отмечали, исходя из решения системы (1), они стремятся к бесконечности. Покажем возникающую здесь предельную ситуацию на основе первых двух уравнений системы (1). Их решения имеют простой вид: $L_1(t)=C_1exp(n_1t), L_2(t)=C_2exp(n_2t)$, тогда

$$\lambda(t)=\frac{L_1(t)}{L_1(t)+L_2(t)}=\frac{C_1exp(n_1t)}{C_1exp(n_1t)+C_2exp(n_2t)}=$$
$$=\frac{1}{1+C\exp[(n_2-n_1)t]}, \qquad (15)$$

где $C=C_2/C_1=const$.

Из выражения (15) видим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(t)=0$ при $n_2-n_1>0$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(t)=1$ при $n_2-n_1<0$. В нашем случае отмечается первый вариант.

Развитие модели Дирдорфа мы видим в следующих направлениях.

1. Рассмотрение логистического роста численности рабочей силы:

$$\frac{dL_1}{dt}=n_1L_1-\beta_1L_1^2, \frac{dL_2}{dt}=n_2L_2-\beta_2L_2^2$$
$$\frac{dK_1}{dt}=s_1(wL_1+rK_1), \frac{dK_2}{dt}=s_2(wL_2+rK_2). \qquad (16)$$

По аналогии с работой [3] здесь можно ввести термин *«converging populations»*. Нами показано, что к этой системе уравнений замена переменных (2) не применима ввиду наличия квадратных членов в первых двух уравнениях.

2. Можно попытаться учесть в процессе воспроизводства рабочей силы долю капитала, направляемого на создание новых рабочих мест и переподготовку безработного населения, тогда коэффициенты роста в моделях (1) и (3) будут отвечать за демографические процессы поступления и выбытия из состава рабочей силы. В этом случае модель (1) можно записать в виде:

$$\frac{dL_1}{dt}=n_1L_1+m_1K_1,\ \frac{dL_2}{dt}=n_2L_2+m_2K_2$$
$$\frac{dK_1}{dt}=s_1(wL_1+rK_1),\ \frac{dK_2}{dt}=s_2(wL_2+rK_2). \quad (17)$$

Она допускает использование замены (2), которые приводят ее к виду (3) со следующими дополнительными членами: $m_1\rho-m_2\lambda k$ – для первого уравнения; $\rho^2(m_2-m_1)-m_2\rho k$ – для второго уравнения; $(m_2-m_1)\rho k-m_2k^2$ – для третьего уравнения. Здесь $m_i=\overline{m_i}\varepsilon_i$, где $\varepsilon_i<1$ – доля инвестиций (капитала K_i), направляемых на создание новых рабочих мест и переподготовку безработного населения. Наиболее просто здесь исследуется случай при $m_1=m_2$, $s_1=s_2$, $n_1=n_2$.

3. Упрощенный синтез моделей (16) и (17) с учетом логистического роста капитала и без учета переменных параметров w и r для рынков труда и капитала одной страны имеет вид:

$$\frac{dL_1}{dt}=n_1L_1-\beta_1L_1^2+m_1K_1,\ \frac{dK_1}{dt}=\delta_1L_1+c_1K_1-\gamma_1K_1^2. \quad (18)$$

В этой системе уравнений, кроме неустойчивой нулевой особой точки, могут возникать еще две ненулевые особые точки. В качестве варианта двухстрановой модели экономического роста можно предложить модель

$$\frac{dL_i}{dt}=n_iL_i-\beta_iL_i^2+m_iK_i,\ \frac{dK_i}{dt}=s_i\left(wL_i+rK_i\right), \quad (19)$$

где $i = 1, 2$.

4. Учет процессов конкуренции рабочей силы и капитала разных стран за свободные рабочие места и объекты инвестирования одной из стран с помощью членов типа $\varepsilon_{ij}L_iL_j$ и $\xi_{ij}K_iK_j$, где $i\neq j,\ i,j=1,2$. Здесь могут строиться динамические системы **2n**-ного порядка для общего рынка труда и капитала **n** стран.

5. Построение моделей взаимодействия типа: свободные рабочие места **(P)** – численность рабочей силы, конкурирующей за эти места **(L)** для одной или нескольких стран. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. **SOLOW R. M.** A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ECONOMIC GROWTH // QUARTERLY JOURNAL OF ECONOMICS.– 1956.– VOL. 70.– P. 65 - 94.

2. **PASINETTI L.** THE RATE OF PROFIT AND INCOME DISTRIBUTION IN RELATION TO THE RATE OF ECONOMIC GROWTH // REVIEW OF ECONOMIC STUDIES.– 1962.– P. 267 - 279.

3. **DEARDORFF A. V.** GROWTH AND INTERNATIONAL INVESTMENT WITH DIVERGING POPULATIONS // OXFORD ECONOMIC PAPERS.– 1994.– VOL. 46.– P. 477 - 491.

ПО МАТЕРИАЛАМ СМИ

БЮДЖЕТ ЕВРОПЕЙСКОГО СОЮЗА

Как формируется бюджет ЕС. В период 1958 – 1970 гг. своих денег в Содружестве не было, что обусловливало его полную зависимость от государств – членов. Собственные средства появились у него впервые только после Люксембургского Европейского Совета в апреле 1970 г., где с целью создания независимого бюджета Содружества была создана система собственных ресурсов. Решение вступило в силу с 1971 г. Собственные ресурсы накапливались за счет взимания общего таможенного тарифа при ввозе на территорию Содружества промышленных и сельскохозяйственных товаров, импортированных из третьих стран. Позднее их стали называть традиционными собственными ресурсами (*Traditional Own Resources, TOR*). Оба сбора взимает страна, к которой товар впервые поступает из-за границы Содружества, то есть в общую «копилку» они поступают от определенной страны. Еще одним источником наполнения бюджета с 1979 г. стали отчисления от национальных НДС.

Система финансирования Содружества претерпела с того времени значительные изменения, в частности, фундаментальную реформу начал Брюссельский саммит в июне 1988 г. Он добавил еще один способ формирования собственных ресурсов, опирающийся на реальную платежеспособность государства-члена — определенный процент от его валового национального продукта (ВНП). Теперь 17% собственных ресурсов составляют TOR, 40% — «НДС-источник» (ставка отчисления неоднократно корректировалась, в 2000 г. она составила 1% и запланировано ее дальнейшее снижение), остаток же средств — приблизительно 43% — это часть (около 0,5%) ВНП государств-членов. Важное ограничение: объем собственных ресурсов ЕС имеет свой «потолок» — он не должен превышать 1,27% от общего ВНП всех 15 государств-членов. Однако если вспомнить, что последний составляет 8 трлн (8 тысяч миллиардов) евро, становится понятным, что и об 1% такой суммы некоторые страны могут лишь мечтать. Кроме собственных ресурсов, есть и другие, хотя и гораздо менее весомые, возможности наполнения бюджета ЕС — это излишек с предыдущего года, налог на доходы чиновников Евросоюза (их насчитывается около 24 500 во всех учреждениях ЕС), штрафы, наложенные Судом ЕС на компании или на целые страны за нарушение законодательства Содружества и др.

ЄВРОБЮЛЕТЕНЬ, октябрь 2000 г.